F 1130

R

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC BUCUREȘTI

TOMUL XXVI FASCICOLA 1 ANUL 1964
IANUARIE — FEBRUARIE

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC BUCUREŞTI

apare, cu şase fascicole pe an, în continuarea vechilor periodice ştiinţifice: „Bulletin de Mathématiques et de Physique pures et appliquées" şi „Buletinul Politehnicei din Bucureşti".

Organizat pe baze noi, el reflectă în primul rînd activitatea ştiinţifică a corpului didactic din Institutul Politehnic Bucureşti. În limita spaţiului disponibil, se pot publica şi lucrări ştiinţifice ale colaboratorilor din afara Institutului.

Corespondenţa şi schimburile de publicaţii cu Redacţia şi Administraţia Buletinului se fac pe adresa:

INSTITUTUL POLITEHNIC BUCUREŞTI
CALEA GRIVIŢEI 132
(cu menţiunea „pentru Buletinul Institutului")

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC BUCUREŞTI

издаётся в шестых годовых выпусках являясь продолжением прежних научных периодических журналов „Bulletin de Mathématiques et de Physique pures et appliquées" и „Buletinul Politehnicei din Bucureşti".

Составленный на новых основах, он отражает в первую очередь научную деятельность преподавательского состава Бухарестского Политехнического Института. В пределах возможностей будут опубликованы и научно-исследовательские работы и внеинститутскик сотрудников.

Переписка и обмен периодическими изданиями с Редакцией и Руководством Бюллетеня производятся по адресу:

INSTITUTUL POLITEHNIC BUCUREŞTI
CALEA GRIVIŢEI 132
(с указанием „pentru Buletinul Institutului")

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC BUCUREŞTI

est une publication, continuant les anciens périodiques scientifiques: „Bulletin de Mathématiques et de Physique pures et appliquées" et „Buletinul Politehnicei din Bucureşti".

Tel qu'il se présente, il reflète en premier lieu l'activité scientifique du corps didactique de l'Institut Polytechnique de Bucarest. On pourra y ajouter aussi, dans la limite des possibilités, les travaux des collaborateurs qui n'appartiennent pas à l'Institut.

L'adresse pour la correspondance et les échanges de publications est:

INSTITUTUL POLITEHNIC BUCUREŞTI
CALEA GRIVIŢEI 132
(avec la mention „pentru Buletinul Institutului")

F 1130

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC BUCUREŞTI

TOMUL XXVI — FASCICOLA 1

IANUARIE — FEBRUARIE
1964

COMITETUL DE REDACȚIE

Prof. Dr. *I. Agîrbiceanu*, membru corespondent al Academiei R.P.R.; Prof. Dr. *I. S. Antoniu*, membru corespondent al Academiei R.P.R.; Acad. Prof. *M. Bercovici*; Prof. Dr. *E. Bratu*, membru corespondent al Academiei R.P.R.; Prof. *Gh. Buzdugan*, membru corespondent al Academiei R.P.R.; Acad. Prof. Dr. *E. Carafoli*; Conf. *S. Călin*, cand. St. Th.; Acad. Prof. Dr. *D. Dumitrescu*; Conf. *I. Grădisteanu*, cand. St. Ec.; Prof. *C. Ionescu-Bujor*; Prof. Dr. *Gh. Manea*, membru corespondent al Academiei R.P.R.; Prof. *N. Manolescu*; Prof. *St. Mantea*; Prof. *N. Marinescu*, cand. St. Th.; Acad. Prof. Dr. *C. Nenițescu*; Prof. *C. Penescu*, membru corespondent al Academiei R.P.R.; Prof. *M. Postelnicescu*; Acad. Prof. Dr. *R. Rădulet*; Prof. *Al. Rău*; Prof. *Al. Spătaru*; Prof. *L. Stoicescu*; Prof. *I. Zăgănescu*.

Redactor responsabil: Prof. *C. Dinculescu*
Membru corespondent
al Academiei R. P. R.

Sumar

MATEMATICA

D. Mangeron, L. E. Krivošein

Probleme mixte pentru o clasă de ecuații integro-diferențiale de tip parabolic 17

M. St. Botez

Sur une généralisation de l'epure de Monge 33

CHIMIE TEHNOLOGICA

F. M. Albert, V. T. Mărculețiu, V. Brăteanu, N. Căplescu, M. Stoia, M. Popescu-Văleanu.

Recuperarea vanadiului din catalizatorul de la industria acidului sulfuric de contact 41

Gr. Teodorescu și A. Dinescu

Metodă calorimetrică pentru dozarea hidrazidei acidului izonicotinic . 49

CHIMIE FIZICA

I. Răducanu și T. Făşie

Contribuții la studiul coroziunii utilajului minier în exploatările de cărbuni care conțin sulf 53

REZISTENȚA MATERIALELOR

St. Bratu N. Iliescu

Studiul eforturilor unitare în bara de secțiune dreptunghiulară supusă la torsiune prin analogia cu rețelele electrice 63

CONSTRUCȚIA DE MAȘINI

Gh. Manea, M. R. Mustafa, D. Tudor, Gh. Vasilca

Aspecte ale comportării poliamidei ca bucșe pentru lagăre cu alunecare 79

ELECTROTEHNICA

I. S. Gheorghiu

Teoria unitară a mașinilor electrice 99

ENERGETICA

C. Penescu, S. Călin, I. Chenzbraun

Studiul posibilității de utilizare a releului RD-11 în rețelele electrice în R.P.R. 115

ELECTRONICA

R. Piringer

Asupra aplicării reacției negative de tensiune la un etaj de amplificare 141

Резюме

Д. К. 517.9

Д. Манжерон, Л. Е. Кривосеин

Смешанные граничные задачи относящиеся к параболическим интегро-дифференциальным уравнениям

В ряде своих предыдущих работ [9] — [10] авторы исследовали серию граничных задач относящихся к новым классам (линейных и нелинейных) интегро-дифференциальных уравнений высшего порядка с частными производными, заинтересовавших многих других исследо ателей [11], [22].

В настоящей статье исследуются вопросы существования, единственности, устойчивости и каллитативных оценок (априорных и апостериорных) смешанной задачи для интегро-дифференциальных уравнений содержащих внешний дифференциальный оператор параболического типа (5) — (7); (5), (6), (25).

Buletinul Inst. Polit. Buc. fasc. 1/964.

Д. К. 513.1

М. Щт. Ботез

Отхосительно обобшения эпюры монжа

Автор обобшает эпюру Монжа, принимая в качестве знака некоторый двугранник. Угол между плоскостями знака, называемый модулем эпюры, указан на эпюре. Используется параллельная проекция. После того как показывается, каким овразом превращается нормальная эпюра Монжа в обобшенную эпюру, находятся упрошения, получаюшиеся применением этой эпюры к решению одного класса метрических задач.

Buletinul Inst. Polit. Buc. fasc. 1/964.

Д. К. 669.292.3:661.25

Ф. М. Алберт, В. Т. Мэркулециу, В. Брэтеану, Н. Кэплеску, М. Стона, М. Попеску-Вэлеану

Экстратроване ванадия из катализатора, применяемого при получении серной кислоты контактным методом

В работе описано три метода экстратрования ванадия из использованного катализатора, а именно водой, 0,1 Н. раствором H_2O, $NaOH$ и 0,1 Н, раствором Na_2CO_3 Из полученных экстрактов осаждают ванадий в виде NH_4VO_3 путем добавления концеетрированного NH_4OH (pH = 11) и твердого NH_4Cl.

Тогда как при экстратровании водой можно получить 55—56%, ванадия из данного катализатора, применяя $NaOH$ или Na_2CO_3 получают 95 — 98%.

Метод, в котором используют $NaOH$ наиболее удобен и требует наименьшей эатраты времени.

Buletinul Inst. Polit. Buc. fasc. 1/964.

Summary

D.C. 517.9

D. Mangeron, L. E. Krivošein

Boundary Value, Problems Concerning a Class of Parabolic Partial Integro-differential Equations

In a set o the authors' previous papers [9]—[10], mentioned in some recent research work of other scientists [11], [22], boundary value problems concerning ordinary and partial both linear and non linear integro-differential equations of higher order were studied.

In the present paper one finds some uniqueness, existence, stability and valuation problems concerning a new class of parabolic partial integro-differential equations (5)—(7); (5), (6), (25), both linear and non linear.

Buletinul Inst. Polit. Buc. fasc. 1/964.

D.C. 513.1

M. St. Botez

On a Generalization of Monge Draught

Monge draught is generalizedw ith respect to a dihedron the angle between the reference dihedron planes — i.e. the draught modulus — is showen on the draught.

The parallel projection is used. After showing the way the normal Monge draught may be transformed into a generalized draught simplification obtained using this draught to solve some class of metric problems are found.

Buletinul Inst. Polit. Buc. fasc. 1/964.

D.C. 669.292.3 : 661.25

F. M. Albert, V. T. Măreuleţiu, V. Brăteanu, N. Căplescu, M. Stoia, M. Popescu-Văleanu

Requiring of Vanadium the Catalyst of the Contact Sulfuric Acid Industry

There are given three methods for the extraction of vanadium from the consumed catalyst, using the extraction with H_2O, NaOH 0,1 n and Na_2CO_3 1 n. From the obtained solutions, the vanadium is precipitated as NH_4VO_3 adding conc. NH_4OH (pH-11) and solid NH_4Cl.

Whereas the extraction with H_2O yields 55—56% of the catalyst vanadium, the extraction with NaOH, 0,1 n or $NaCO_3$ 1 n yield 95—98%.

The method with NaOH 0,1 n is the most convenient and expeditious.

Buletinul Inst. Polit. Buc. fasc. 1/964.

Д. К. 536.62 : 547.398.6

Гр. Теодореску и А. Динеску

Колориметрический метод количественного определения гидразидов изоникотиновой кислоты

В работе дан метод колориметрической дозировки гидразида изоникотиновой кислоты, с употреблением в качестве реактива, соли Рейнэкэ.

Описанный метод является более точным и быстрым, чем объемный или весовой метод, употребленный для количественного определения того-же вещества.

Buletinul Inst. Polit. Buc. fasc. 1/964.

Д. К. 620.196.2:622

И. Рэдукану и Т. Фэшие

К вопросу изучения коррозии шахтного оборудования в разработке угля содержащего серу

Настоящая работа занимается изучением скорости коррозии OL-38 в агрессивных шахтных водах различных кислотностей (*pH*) разных температур.

Скорость коррозии определялась двумя методами:

1. Электротехническим методом (одновременное снятие поляризационных кривых у анода и катода) и

2. методом потери веса с помощью коррозионной камеры.

Значения коррозионной скорости, определенные с помощью этих двух методов, являются в некоторой степени совпадающими.

Сталь ОЛ-38 корродируется приблизительно 1,0 — 1,4 мм/год, так что его употребление в такой среде не рекомендуется.

Buletinul Inst. Polit. Buc. fasc. 1/964.

Д. К. 620.175 : 621.311.1

Ст. Брату и Н. Илиеску

Изучение единичных усилий в бруске прямоугольного сечения подверженного кручению по аналогии с электросетью

В работе „Кручение стержня прямоугольного сечения методом аналогии с электрическими цепями", показан новый практический метод вычисления стержня прямоугольного сечения.

Результаты полученные этим методом сравниваются с данными результатами точного метода Сэнт-Венант.

Преимущество этого практического метода состоит в том, что его можно применить к исследованию кручения стержней различного сечения.

Buletinul Inst. Polit. Buc. fasc. 1/964.

Д. К. 547. 298.1 : 621-233

Г. Маня, М. Р. Мустафа, Д. Тудор, Г. Василка

Виды поведения отечественного полиамида в качестве втулок для подшипников скольжения

На основе экспериментальных исследований втулок, изготовленных из отечественного полиамида, выявляется влияние геометрических параметров, относителиного зазора, природы смазки и в особенности технологии изготовления втулок, которое имеет первостепенное значение для строения полузаготовки, на поведение действующих втулок.

Подчеркивается, что температура достигаемая при эксплуатации, является решительно зависящей от физико-механических свойств полиамида, которые в свою очередь связана со строением, так что выводы, правильные для металлических вкладышей по отношению к термической обработке и в частности наилучшее соотношение что касается нагрева, требуют корекций.

Buletinul Inst. Polit. Buc. fasc. 1/964.

D.C. 536.62 : 547.398.6

Gr. Teodorescu, A. Dinescu

Colorimetric Method for the Determination of Isonicotinic Acid Hydrazide

It is given a method for the determination of isonicotinic acid hydrazide, in which the Reinecke's salts are used as reagent. The procedure as indicated is precise and much more rapid than volumetric methods or the gravimetric ones used for the determination of the same substance.

Buletinul Inst. Polit. Buc. fasc. 1/964.

D.C. 620.196.2 : 622

I. Răducanu și T. Fășie

Contributions to the Corrosion Study of the Mining Equipment for Coal, Which Contain Sulphur

This work studies corrosion rate of the carbon steel (OL-38) in the aggressive mine waters, by various acidities (*pH*) at different temperatures.

The corrosion rate is shown by two methods:

1) an electrochemical method (the simultaneous tracing of the anodic and cathodic polarization curves) and.

2) the loss of weight method by means of a corrosion room.

The corrosion rate of the carbon steel shown by the two methods is approximatively 1,0—1,4 mm per year, and its use is therefore not indicated in this environment.

Buletinul Inst. Polit. Buc. fasc. 1/964.

D.C. 620.175 : 621.311.1

St. Bratu, N. Iliescu

The Study of the Unitary Stress in the Bar of Rectangular Section Subjected to Torsion by Analogy with the Electric Networks

In the work (paper) "The Torsion of the rectangular section bar by the method analogous with the electrical systems" a new practical method of calculating the rectangular section is shown.

The results obtained by this method are compared to the results given by Saint-Venant's exact method.

The advantage of this practical method consists in that it may be applied to the study of torsion bars of different sections.

Buletinul Inst. Polit. Buc. fasc. 1/964.

D.C. 547.298.1 : 621—233

Gh. Manea, M. R. Mustafa, D. Tudor, Gh. Vasilca

Aspects of the Behaviour of Polyamide as Bearing Materials

On the basis of experimental researches on bearings made out of polyamide, it is spotlighted the influence of geometrical parameters, of the relative clearance, of the nature of the lubricant and, especially of the bearing manufacturing technology — of great importance for the structure of the semi-product — on the behaviour of bearings in operation.

It is stressed that the temperature which may be reached during the operation highly depends on the physical and mechanical properties of the polyamide, which depends in its turn on structure; therefore the conclusions holding true for the metallic bearings as to the thermal regime and especially the best ratio $\frac{l}{d}$ from the heating standpoint, require corrections.

Buletinul Inst. Polit. Buc. fasc. 1/964.

Д. К 621.331

И. С. Георгиу

Единая теория электрических машин

Возобновляя об отношении между тремя пульсациями трехфазных асинхронных и синхронных электрических машин и между двумя пульсациями реактивных синхронных машин, установленной в прошлом Полем Бушерот и Жаном Фалли, автор показывает, что это обобщенная теорема является единой теорией всех электрических машин и доказывает последовательно, что она применяется во всех категориях элекрических машин в трехфазных и однофазных асинхронных и синхронних машинах в трансформаторах, в машинах с геотеорополярным и однополярным постоянным током, в ампдинах и методинах, во всех электрических машинах с паралельной характеристикой и во всех параеменных машинах с коллектором.

Для многих электрических машин эта теория единая является одновременно феноменологическим новым и побуждающим обьяснением процесса функционирования машины.

Buletinul Inst. Polit. Buc. fasc. 1/964.

Д. К. 621.318 3 : 621.311,1(R)

К. Пенеску, С. Кэлин, И. Кензбраун

Изучение возможности внедрения РД. — 11 в электрических сетях Р. Н. Р.

Изучены особенности и характеристики действия реле 211 в различных режимах дефекта и перегрузки главным образом в случае коротких одножазных замыканий в параллельных линиях.

Изучены возможности внедрения этих характеристик использования реле для защиты электрических систем в Р. Н. Р.

Buletinul Inst. Polit. Buc. fasc. 1/964.

Д. К. 621.396,64

Р. Пиригер

О применении отрицательной обратной связи по напряжению в усилительном каскаде

В работе устанавливается эквивалентность между параллельной отрицательной обратной связью по напряжению и последовательной обратной связью такого же рода. С другой стороны доказывается, что схема с параллельной обратной связью может быть рассмотрена, по отношению к входному сигналу, как будучи без обратной связи, но с изменённым полным входным сопротивлением, и что оба способа рассматривания приводят к одному и тому же результату.

Buletinul Inst. Polit. Buc. fasc. 1/964.

D.C. 621.313

I. S. Gheorghiu

A Unitary Theory of Electrical Machines

The author resumes a theorem regarding the relation between the three pulsations of three phase induction and syncrhronous machines and of the two pulsations of reactive synchronous machines, already stated by *Paul Boucherot* and *Jean Fallou*. He shows that this generalized theorem build up a unitary theory for *all* electrical machines. He gradually proves that it applies to all kinds of classical electrical machines: to the three and single phase induction and synchronous machines, to transformers, to the mono and heteropolar d.c. machines, to amplidynes and metadynes, to all electrical machines with series characteristics and to all commutator a.c. machines.

For most electrical machines, this unitary theory at the same time represents a new and suggestive phenomenological explanation of the running process of the machine.

Buletinul Inst. Polit. Buc. fasc. 1/964.

D.C. 621.318.3 : 621.311.1(R)

C. Penescu, S. Călin, I. Chenzbraun

Study on the Possibility of Utilizing the RD-11 Relay in the R.P.R. Electrical Networks

The operation peculiarities and features of the RD-11 relay in various fault and overload regimes are analyzed, especially in the case of monophase short circuits on parallel lines.

The possibilities of adopting these features in order to use the relay under the protection of the R.P.R. electric systems have been studied.

Buletinul Inst. Polit. Buc. fasc. 1/964.

DC. 621.396.64

R. Piringer

On the Potential Negative Feedback Applied to an Amplifier-stage

In this article is established an equivalence between parallel and series potential negative feedback. It is also shown, that a circuit with parallel feedback may be regarded as a circuit without feedback if it is taken in consideration a modified input impedance. Both methods of considering the circuit are equivalent.

Buletinul Inst. Polit. Buc. fasc. 1/964.

Résumé

C.D. 517.9

D. Mangeron, L. E. Krivošein

Problèmes mixtes pour une classe d'équations intégro-différentielles de type parabolique

Les auteurs, tout en tenant compte de l'intérêt accordé par le monde scientifique aux problèmes qui se relient étroitement à la physique théorique et à la science de l'ingénieur [1]—[4] et en continuant la série de leurs recherches antérieures consacrées aux études de différentes classes nouvelles d'équations intégro-différentielles [9]—[10], consacrent ce travail à l'étude des problèmes de l'existence, de l'unicité, de la stabilité et de l'évaluation qualitative (aposteriorique et apriorique) des solutions des problèmes mixtes relatifs aux équations intégro-différentielles paraboliques linéaires et non linéaires [11], [19], [24] (5)—(7) ; (5), (6), (25).

Buletinul Inst. Polit. Buc. fasc. 1/964.

C.D. 513.1

M. St. Botez

Sur une généralisation de l'épure de Monge

On obtient une généralisation de l'épure de Monge, en considérant comme repère un dièdre quelconque. L'angle du dièdre-nommé module de l'épure — sera indiqué sur le dessin. En utilisant la projection parallèle, on trouve la transformation d'une épure Monge dans une épure généralisée et l'on obtient de cette manière une méthode qui simplifie la résolution d'une classe de problèmes métriques.

Buletinul Inst. Polit. Buc. fasc. 1/964.

D.C. 669.292.3 : 661.25

F. M. Albert, V. T. Mărculeţiu, V. Brăteanu, N. Căplescu, M. Stoia, M. Popescu-Văleanu

Récuperation du vanadium éxistant dans le catalyseur utilisé dans l'industrie de l'acide sulfurique

On présente trois méthodes pour l'extraction du vanadium existant dans le catalyseur épuisé. On utilise l'éxtraction avec H_2O, NaOH 0,1 n et Na_2CO_3 1 n. Dans les solutions obtenues on précipite le vanadium comme NH_4VO_3 par traitement avec NH_4OH conc. (pH=11) et NH_4Cl solide.

Pendant que par la méthode d'extraction avec H_2O on récupère 55—56% du vanadium éxistant dans le catalyseur, par l'extraction avec NaOH 0,1 n ou avec Na_2CO_3 1 n on obtient 95—98%.

La méthode avec NaOH 0,1 n est la plus commode et la plus expéditive.

Buletinul Inst. Polit. Buc. fasc. 1/964.

Zusammenfassung

D.K. 517.9

D. Mangeron, L. E. Krivošein

Randwertprobleme die eine Klasse parabolischer Integraldiferentialgleichungen betreffen

Der Reihe ihrer früheren Forschungsarbeiten [9]—[10], die den Randwertproblemen verschedener Typen der Integraldifferentialgleichungen gewidmeit waren und die Interesse der wissenschaftlichen Kreisen erweckt hatten [11], [22], folgend, stellen die Verfasser in dieser Arbeit die Einheits-Existenz-Stabilitäts-und Abschätzungs probleme, die eine neue Klasse der parabolischen linearen und nichtlinearen Intergraldifferenzialgleichungen [3], [24] (5)—(7); (5), (6) (25) betreffen, dar.

Buletinul Inst. Polit. Buc. fasc. 1/964.

D.K. 513.1

M. St. Botez

Uber eine Verallgemeinerung des Monge'eschen Aufrisses

Der Verfasser verallgemeinert den Monge'eschen Aufriss indem er als Merkzeichen einen beliebigen Keilwinkel nimmt. Der Winkel zwischen den Flächen des Merkzeichens — Modul des Aufrisses genannt — ist auf dem Aufriss bezeichnet.

Es wird parallele Projektion angewendet Indem gezeigt wird, wie der normale Monge'eschen Aufriss in einen verallgemeinerten Aufriss umgewandelt wird, findet man die Vereinfachungen, welche durch die Anwendung dieses Aufrisses zur Lösung von Klassen metrischer Probleme erhalten werden.

Buletinul Inst. Polit. Buc. fasc. 1/964.

D.K. 669.292.3 : 661.25

F. M. Albert, V. T. Mărculeţiu, V. Brăteanu,
N. Căplescu, M. Stoia, M. Popescu-Văleanu

Wiedergewinnung des Vanadiums aus dem in der Schwefelsäureindustrie benutztem Katalysator

Es werden drei Methoden für die Ausziehung des Vanadiums aus dem Vanadiumkatalysator beschrieben. Zu diesem Zwecke werden H_2O, NaOH 0,1 n und Na_2CO_3 1 n als Ausziehungsmittel verwendet. Durch die Behandlung der Lösungen mit konz. NH_4OH (pH=11) und festem NH_4Cl wird das Vanadium als NH_4VO_3 gefällt.

Während bei der Ausziehung mit H_2O 55—56% des im Katalysator sich befindlichen Vanadium gewonnen werden, erhält man bei der Extraktion mit NaOH 0,1 n oder mit Na_2CO_3 1 n 95—98%.

Die Methode mit NaOH 0,1 n ist die bequemste und die rascheste.

Buletinul Inst. Polit. Buc. fasc. 1/964.

C.D. 536.62 : 547.398.6

Gr. Teodorescu, A. Dinescu

Méthode colorimétrique pour le dosage de l'hydraside de l'acide isonicotinique

On donne une méthode de dosage colorimétrique pour l'hydraside de l'acide isonicotinique, utilisant comme réactif, le sel de Reinecke. La méthode préconisée est précise et beaucoup plus rapide que les méthodes volumétrique ou gravimétrique utilisées pour le dosage de la même substance.

Buletinul Inst. Polit. Buc. fasc. 1/964.

C.D. 620.196.2 : 622

I. Răducanu şi T. Făşie

Contributions à l'étude de la corrosion de l'outillage de mines dans les exploitations de charbon qui contient du souffre

On étudie la vitesse de corrosion de l'acier OL-38 au sein des eaux acides des mines à differentes acidités (*pH*) et à diverses températures.

On a déterminé la vitesse de corrosion par deux méthodes :

1. — la méthode électrochimique (par l'inscription simultanée des courbes de polarisation anodique et cathodique).

2. — la méthode de la diminution du poids à l'aide d'une chambre de corrosion à l'immersion alternée.

Les valeurs de la vitesse de corrosion determinées par ces deux méthodes sont presque concordantes.

L'acier OL-38 est corrodé à une vitesse d'aproximativement 1,0—1,4 mm/ann ; son utilisation dans de tels milieux n'est donc pas indiquée.

Buletinul Inst. Polit. Buc. fasc. 1/964.

C.D. 620.175 : 621.311.1

St. Bratu, N. Iliescu

Etude des efforts unitaires dans la barre de section rectangulaire soumise a la torsion par analogie avec les réseaux électriques

Dans l'ouvrage intitulé „La torsion de la barre de section rectangulaire par la méthode de l'analogie avec les réseaux électriques" on montre une nouvelle méthode pratique de calculer la barre de section rectangulaire. Les résultats obtenus grâce à cette méthode sont comparés aux résultats obtenus par la méthode exacte de Saint-Venant.

L'avantage présenté par cette méthode pratique consiste dans le fait qu'elle peut être appliquée à l'étude de la torsion des barres de differentes sections

Buletinul Inst. Polit. Buc. fasc. 1/964.

C.D. 547.298.1 : 621—233

Gh. Manea, M. R. Mustafa, D. Tudor, Gh. Vasilca

Quelques aspects du comportement de la polyamide employée aux conssinets pour les paliers glissants

On présente les résultats des recherches expérimentales qui montrent l'influence des paramètres géometriques, du jeu relatif ψ, de la nature du lubrifiant et, surtout, de la méthode technologique de fabrication du coussient — très importante pour la structure de la pièce — sur sa manière de se comporter pendant le fonctionnement.

On relève que la température admissible est conditionnée par les propriétés physique-mécaniques de la polyamide — dépendantes de la structure — de sorte que les conclusions valables pour les coussinets métalliques en ce qui concerne le régime thermique surtout le rapport optimum $\frac{l}{d}$ sont susceptibles d'une correction.

Buletinul Inst. Polit. Buc. fasc. 1/964.

D.K. 536.62 : 547.398.6

Gr. Teodorescu, A. Dinescu

Kolorimetrische Methode für die Dosierung der Hydraside der Isonikotinsäure

Man gibt eine Methode für die Dosierung der Hydraside der Isonikotinsäure in der die Reinecke'sche Lösung benutzt wird. Die vorgefürte Methode ist präzis und viel schneller als die volumetrischen oder gravimetrischen Methoden die jetzt für die Dosierung der angegebenen Substanz benützt werden.

Buletinul Inst. Polit. Buc. fasc. 1/964.

D.K. 620.196.2 : 622

I. Răducanu și T. Făşie

Beitrag zum Studium der Korrosion der Mineneinrichtung der Kohle mit Schwefelinhalt

Die vorgeführte Arbeit beschäftigt sich mit der Korrosinsgeschwindigkeit des OL-38 Stahls in den agresiven Schachtwässern, verschiedener Azidität (pH), bei verschiedenen Temperaturen.

Die Korrosionsgeschwindigkeit wurde durch zwei Methoden bestimmt:

1) Die Elektrochemische Methode (durch gleichzeitige Darstellung der anodischen und kathodischen Polarisationskurven) und

2) Die Methode der Gewichtsverluste mit Hilfe einer Korrosionkammer.

Die Korrosionsgeschwindigkeit des Karbon-Stahls, bestimmt durch die beiden Methoden ist etwa 1,0—1,4 mm/Jahr, und deshalb ist dessen Anwendung in diesem Fall nicht zu empfehlen.

Buletinul Inst. Polit. Buc. fasc. 1/964.

D.K. 620.175 : 621.311.1

St. Bratu, N. Iliescu

Das Studium der Drehspannungen in einem verdrehten Stab mit rechteckigen Querschnitt, mittels elektrischen Netzanalogien

In der Arbeit: „Verudrehung des Stabes von rechteckigem Querschnitt durch die Methode der Analogie mit den elektrischen Netzen" wird eine neue praktische Methode für die Berechnung des Stabes von rechteckigem Querschnitt vorgeführt. Die durch diese Methode erhaltenen Ergebnisse werden mit den Ergebnissen der gennanten Saint-Venantmethode verglichen.

Der Vorteil dieser praktischen Methode besteht darin, dass sie zum Studium der Torsion der Stäbe von verschiedenen Querschnitten angewendet werden kann.

Buletinul Inst. Polit. Buc. fasc. 1/964.

D.K. 547.298.1 : 621—233

Gh. Manea, M. R. Mustafa, D. Tudor, Gh. Vasilca

Uber das Verhalten der Polyamide als Lagerschale für die Gleitlager

Auf Grund experimenteller Untersuchungen mit Polyamid-Lagerschalen, wird der Einfluss der geometrischen Parameter, des Relativ-Spiels φ, des Schmierung-Materials und, inssbesondere, der Herstellungsmethode — für die Struktur des Halbzeugs von Wichtigkeit — über das Verhalten im Betrieb, hervorgehoben.

Es wird festgestellt, dass die während des Laufens zugelassene Temperatur in entscheidender Weise von den physikalisch-mechanischen Eigenschaften der Polyamide — mit der Struktur in Beziehung — abhängig ist; infolgedessen, die für metallische Lagerschalen geltenden Schlussvolgerungen, das Wärmeverhalten und besonders der Optimalwert $\frac{l}{d}$ betreffend, entsprechende Anpassungen bedürfen.

Buletinul Inst. Polit. Buc. fasc. 1/964.

C.D. 621.313

I. S. Gheorghiu

Théorie unitaire des machines électriques

L'auteur reprend un théorème concernant les relations entre les trois pulsations des machines électriques asynchrones et synchrones triphasées, et les deux pulsations des machines synchrones réactives, établi jadis par *Paul Boucherot* et *Jean Fallou*. Il montre que ce théorème généralisé constitue une théorie unitaire de *toutes* les machines électriques, et démontre successivement que ce théorème s'applique à toutes les catégories de machines électriques, à savoir : aux machines asynchrones et synchrones tri-et monophasées, aux transformateurs, aux machines à courant continu hétéro et monopolaires, aux amplidynes et métadynes, à toutes les machines électriques à caractéristique série et à toutes les machines alternatives à collecteur.

Pour plusieurs de ces machines, cette théorie donne en même temps une nouvelle et suggestive explication phénoménologique du processus de fonctionnement de la machine.

Buletinul Inst. Polit. Buc. fasc. 1/964.

C.D. 621.318.3 : 621.311.1(R)

C. Penescu, S. Călin, I. Chenzbraun

L'étude des possibilités d'utilisation du relais RD-11 dans les réseaux électriques de la R.P.R.

On analyse les particularités et les caractéristiques de fonctionnement du relais RD-11 dans divers régimes de défaut et surcharge surtout dans le cas des courts-circuits monophasés sur lignes parallèles.

On étudie les possibilités d'adoption de ces caractéristiques pour l'utilisation du relais dans la protection des systèmes électriques de la R.P.R.

Buletinul Inst. Polit. Buc. fasc. 1/964.

CD. 621.396.64

R. Piringer

Considérations sur la réaction négative de tension, appluquée à un étage d'amplification

On établit l'équivalence entre la réaction négative de tension parallèle et une réaction série de la même nature. D'autre part, on démontre que le montage à réaction parallèle peut être envisagé, au point de vue signal d'entrée, comme dépourvu de réaction, mais ayant une impédance d'entrée modifiée ; les deux modes d'analyse mènent au même résultat.

Buletinul Inst. Polit. Buc. fasc. 1/964.

D.K. 621.313

I. S. Gheorghiu

Einheitliche Theorie der Elektrischen Maschinen

In der vorliegenden Arbeit, behandelt der Verfasser ein von *Paul Boucherot* und *Jean Fallou* schon festgestelltes Theorem, die Beziehungen zwischen den 3 Kreisfrequenzen der dreiphasigen Induktions- und Synchronmaschinen, und gleichzeitig zwischen den 2 Kreisfrequenzen der reaktiven Synchronmaschinen betreffend.

Er zeigt, dass dieses verallgemeinerte Theorem eine einheitliche Theorie *aller* elektrischer Maschinen bildet, und beweist, nach und nach, dass es für alle Kategorien der klassischen elektrischen Maschinen anwendbar ist, und zwar: den Induktions- und synchronen Maschinen für drei-und einphasigen Wechselstrom, den Transformatoren, den Wechsel- und Gleichpolgleichstrommaschinen, den Ampli- und Metadynen, allen Reihenschlussmaschinen und allen Stromwendermaschinen für Wechselstrom.

Gleichzeitig, dient diese Theorie als eine neue, eingehende, phänomenologische Erklärung des Betriebs einiger solcher elektrischer Maschinen.

Buletinul Inst. Polit. Buc. fasc. 1/964.

D.K. 621.318.2 : 621.311.1(R)

C. Penescu, S. Călin, I. Chenzbraun

Das Studium der Anwendungsmöglichkeiten des RD-11 Relees im elektrischen Energienetz der R.V.R.

Es werden die Eigenschaften und Arbeitscharakteristiken in verschiedenen Fehler-und Ueberbelastungsregimen, besonders im Falle der einphasigen Kurzschlüsse in parallelen Linien, untersucht.

Es werden die Möglichkeiten der Anpassung dieser Charakteristiken für die Anwendung des Relees zum Schutz der elektrischen Systeme der R.V.R., studiert.

Buletinul Inst. Polit. Buc. fasc. 1/964.

DK. 621.396.64

R. Piringer

Uber die einer Verstärkerstufe angelegten Spannungsgegenkopplung

Es wird die Gleichwertigkeit zwischen Parallel- und Reihen-Spannungsgegenkopplung festgelegt. Anderseits wird bewiesen, dass — für das Eingangssignal — die Parallelgegenkopplungsschaltung auch als Schaltung ohne Gegenkopplung aber mit verändertem Eingangswiderstand angesehen werden kann. Die beiden Betrachtungsarten führen zu den gleichen Ergebnissen.

Buletinul Inst. Polit. Buc. fasc. 1/964.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC BUCUREȘTI
Tomul XXVI — 1964, Fascicola 1

MATEMATICĂ

CZ. 517.9

PROBLEME MIXTE PENTRU O CLASĂ DE ECUAȚII INTEGRO-DIFERENȚIALE DE TIP PARABOLIC

D. MANGERON
Institutul politehnic Iași

L. E. KRIVOȘEIN
Universitatea de Stat Kirghiză, U.R.S.S.

Recentele reuniuni ale specialiștilor consacrate aplicării ecuațiilor neliniare în fizică teoretică [1], precum și studiilor mai adîncite ale ecuațiilor cu derivate parțiale [2] — [4], au scos în evidență rolul de seamă al ecuațiilor de tip parabolic în alte numeroase domenii decît cele clasice, ca de ex., în domeniul care îmbrățișează din punct de vedere fizic *unde de șoc*, adică zone de mică adîncime în care gradientul de presiune este foarte ridicat, atare zone devenind sedii de un anume echilibru între efectele contradictorii de convecție și de vîscozitate.

Subliniind faptul că revistele internaționale de bibliografie matematică, precum și unele articole și cărți de specialitate au marcat pozitiv și uneori și cu elogii deosebite unele lucrări romînești în domeniul ecuațiilor de tip parabolic, ca de ex., lucrările acad. M. Nicolescu consacrate ecuațiilor policalorice sau lucrările lui D. Mangeron relative la ecuații hiperparabolice și la studiul lor printr-o nouă metodă a transformatei lui Laplace cu intervalul de integrație finit [5] — [7] *) și marcînd o anume legătură între lucrarea ce se expune mai jos și lucrarea tov. prof. M. Roșculeț, prezentată în sesiunea științifică a Institutului politehnic din București [8], ne vom ocupa în cele ce urmează de studiul problemelor de existență și de unicitate, precum și de o serie de evaluări calitative ale soluțiilor problemelor mixte neomogene relative la o nouă clasă de ecuații liniare și neliniare integro-diferențiale de tip parabolic.

Ideea generală a metodei elaborate are puncte comune cu metoda folosită de D. Mangeron, singur sau în colaborare cu L. E. Krivošein, într-o serie de lucrări cu totul recente, publicate la „Accademia Nazionale dei Lincei" [9] — [10] și consacrate unor noi clase de probleme de con-

*) A se vedea textul din [7, p. 49—50], prin care autorii volumului atribuie metodei elaborate în [19] realizarea unui progres în două direcții în domeniul teoriei ecuațiilor cu derivate parțiale.

tur relative la ecuații integro-diferențiale cu derivate parțiale, cu derivata de ordin superior a lui Picone, care își găsesc aplicații din ce în ce mai întinse în diferite domenii actuale de fizică și tehnică înaltă [11] — [13].

§ 1. Probleme de existență, unicitate și stabilitate a soluțiilor

Se consideră problema de contur mixtă.

$$u(x,0)=\varphi_1(x)\,, \tag{1}$$

$$u(0,t)=\varphi_2(t)\,,\quad u(a,t)=\varphi_3(t)\,, \tag{2}$$

relativă la ecuația integro-diferențială liniară cu derivate parțiale de tip parabolic

$$P[u(x,t)]-\sum_{1=0}^{1}A_i(x,t)\frac{\partial^i u(x,t)}{\partial x^i}=f(x,t)+\int_0^t\sum_{i=0}^{1}K_i(x,t,\tau)\frac{\partial^i u(x,\tau)}{\partial x^i}d\tau\,, \tag{3}$$

în care $\varphi_1(x)$, $A_i(x,t)$, $K_i(x,t,\tau)$ $(i=1,2)$, $f(x,t)$ sînt funcții continue date, $\varphi_i(t)(i=2,3)$ sînt funcții date regulate pentru toți (x,t), $(x,\tau)\in D=$ $=[0,a]\times[0,T]$, iar operatorul $P[u(x,t)]\equiv\dfrac{\partial u(x,t)}{\partial t}-\dfrac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}$ este clasicul operator parabolic.

Să folosim la analiza problemei considerate metoda reducției. Simplificăm mai întîi condițiile de contur (2), utilizînd în acest scop transformarea de funcții

$$u(x,t)=v(x,t)+\frac{x}{a}\varphi_3(t)+\frac{a-x}{a}\varphi_2(t)\,, \tag{4}$$

în care $v(x,t)$ este noua funcție necunoscută. Înlocuind în (1), (2) și (3) funcția $v(x,t)$ prin noua funcție $v(x,t)$ pe baza substituției (4), se obține

$$v(x,0)=\varphi_0(x)\,, \tag{5}$$

$$v(0,t)=0\,,\quad v(a,t)=0\,, \tag{6}$$

$$P[v(x,t)]-\sum_{i=0}^{1}A_i(x,t)\frac{\partial^i v(x,t)}{\partial x^i}=F(x,t)+$$
$$+\int_0^t\sum_{i=0}^{1}K_i(x,t,\tau)\frac{\partial^i v(x,\tau)}{\partial x^i}d\tau\,, \tag{7}$$

în care $F(x,t)$ este o funcție continuă cunoscută. O dată determinată din sistemul integro-diferențial (5) — (7) funcția $v(x,t)$, se obține gra-

ție relației (4) soluția problemei inițiale (1) — (3). În consecință, ne vom ocupa în cele ce urmează de studiul problemei (5) — (7) echivalentă cu (1) — (3).

Pentru determinarea soluției problemei (5) — (7) să folosim transformarea

$$v(x,t)=\int_0^x w(x,t)\,dx, \tag{8}$$

în care $w(x,t)\equiv\dfrac{\partial v(x,t)}{\partial x}$. Din (7) se obține

$$\begin{aligned}&P[v(x,t)]-A_0(x,t)\int_0^x w(x,t)\,dx-A_1(x,t)\,w(x,t)=\\&=F(x,t)+\int_0^t\left[K_0(x,t,\tau)\int_0^x w(x,\tau)\,dx+K_1(x,t,\tau)\,w(x,\tau)\right]d\tau.\end{aligned} \tag{9}$$

Dacă se ține seama de proprietățile funcției [14, p. 202]

$$G(x,\xi,t,\alpha)\equiv\frac{2}{a}\sum_{i=1}^{\infty}\exp\left[\left(\frac{i\pi}{a}\right)^2(\alpha-t)\right]\sin\frac{\pi i x}{a}\sin\frac{\pi i\xi}{a}, \tag{10}$$

se obține din (5) — (7)

$$\begin{aligned}v(x,t)&=\psi(x,t)+\int_0^t\int_0^a G(x,\xi,t-\alpha)\left\{F(\xi,\alpha)+A_0(\xi,\alpha)\int_0^\xi w(x,\alpha)\,dx-\right.\\&\left.-A_1(\xi,\alpha)\,w(\xi,\alpha)+\int_0^\alpha\left[K_0(\xi,\alpha,\tau)\int_0^\xi w(\xi,\tau)\,d\xi+K_1(\xi,\alpha,\tau)\,w(\xi,\tau)\right]d\tau\right\}d\xi\,d\alpha=\\&=\Psi(x,t)+\int_0^t\int_0^a M(x,\xi,t,\alpha)\,w(\xi,\alpha)\,d\xi\,d\alpha,\end{aligned} \tag{11}$$

în care $\Psi(x,t)$, $\psi(x,t)$, $M(x,\xi,t,\alpha)$ sînt funcții cunoscute, de două ori continuu derivabile în raport cu x și o dată în raport cu t pentru toți $(x,t),(\xi,\alpha)\in D$. Înlocuind în relația $w(x,t)\equiv\dfrac{\partial v(x,t)}{\partial x}$ funcția $v(x,t)$ dată prin (11), se obține următoarea ecuație integrală

$$w(x,t)=\Phi(x,t)+\int_0^t\int_0^a N(x,\xi,t,\alpha)\,w(\xi,\alpha)\,d\xi\,d\alpha, \tag{12}$$

în care $\Phi(x,t)$ și $N(x,\xi,t,\alpha)$ sînt funcții cunoscute și $w(x,t)$ este funcție necunoscută.

Folosind faptul demonstrat în [15] că nucleul $N(x,\xi,t,\alpha)$ nu posedă valori proprii pentru valori finite ale variabilei t, se conchide că ecuația

integrală (12) admite, în ipotezele formulate mai sus, o soluție unică continuă în domeniul D:

$$w(x,t) = \Phi(x,t) + \int_0^t \int_0^a R(x,\xi,t,\alpha,1)\,\Phi(\xi,\alpha)\,d\xi\,d\alpha \equiv \omega(x,t), \tag{13}$$

în care prin $R(x,\xi,t,\alpha,1)$ s-a notat nucleul rezolvent al nucleului $N(x,\xi,t,\alpha)$. În virtutea relației (13) soluția problemei (5) — (7) se prezintă sub forma

$$v(x,t) = \Psi(x,t) + \int_0^t \int_0^a M(x,\xi,t,\alpha)\,w(\xi,t)\,d\xi\,d\alpha. \tag{14}$$

Cele de mai sus permit enunțarea următoarei:

Teorema 1. *Dacă funcțiile* $A_i(x,t)$, $K_i(x,t,\tau)$, $(i=0,1)$, $F(x,t)$, $\varphi_0(x)$ *sînt continue în domeniul* (x,t), $(x,\tau)\in D$, *problema* (5) — (7) *posedă în clasa funcțiilor* C_2, *de două ori continuu derivabile în raport cu* x *și odată continuu derivabile în raport cu* t, *pentru toți* $0\leqslant x\leqslant a$, $0\leqslant t\leqslant T$, *o soluție unică.*

Să considerăm acum, în loc de problema (5) — (7), problema schematizată prin sistemul integro-diferențial parabolic liniar

$$v_1(x,0) = \varphi_{01}(x)\,, \quad v_1(0,t) = 0\,, \quad v_1(a,t) = 0\,, \tag{15}$$

$$P[v_1(x,t)] - \sum_{i=0}^{1} B_i(x,t)\frac{\partial^i v_1(x,t)}{\partial x^i} = F_1(x,t) + \int_0^t \sum_{i=0}^{1} R_i(x,t,\tau)\frac{\partial^i v_1(x,\tau)}{\partial x^i}\,d\tau. \tag{16}$$

Folosind metoda expusă mai sus, problema (15), (16) se reduce la următorul sistem de ecuații integrale

$$v_1(x,t) = \Psi_1(x,t) + \int_0^t \int_0^a M_1(x,\xi,t,\alpha)\,w_1(\xi,\alpha)\,d\xi\,d\alpha, \tag{17}$$

$$w_1(x,t) = \Phi_1(x,t) + \int_0^t \int_0^a N_1(x,\xi,t,\alpha)\,w_1(\xi,t)\,d\xi\,d\alpha, \tag{18}$$

în care $\Psi_1(x,t)$, $\Phi_1(x,t)$, $M_1(x,\xi,t,\alpha)$, $N_1(x,\xi,t,\alpha)$ sînt funcții cunoscute și $v_1(x,t)$ și $w_1(x,t)$ sînt funcții necunoscute.

Definiție. Vom spune că soluția problemei (5) — (7) este stabilă față de micile perturbări ale funcțiilor cunoscute ce figurează în sistemul integro-diferențial parabolic considerat (5) — (7), dacă pentru

orice $\varepsilon > 0$ se poate determina un $\delta > 0$ în așa fel ca inegalitatea $|v(x,t) - v_1(x,t)| < \varepsilon$ să rezulte de îndată ce sînt îndeplinite inegalitățile

$$|\Psi(x,t) - \Psi_1(x,t)| < \delta\,, \quad |\Phi(x,t) - \Phi_1(x,t)| < \delta\,,$$

$$|M(x,\xi,t,\alpha) - M_1(x,\xi,t,\alpha)| < \delta\,, \quad |N(x,\xi,t,\alpha) - N_1(x,\xi,t,\alpha)| < \delta$$

pentru toți (x,t), $(\xi,\alpha) \in D$.

Vom stabili în cele de mai jos o condiție suficientă de stabilitate a soluției problemei (5) — (7), ce corespunde la definiția de mai jos și poate fi folosită în practică. Din (11) și (17) avem

$$|v(x,t) \quad v_1(x,t)| \leqslant |\Psi(x,t) - \Psi_1(x,t)| + \int_0^t \int_0^a |[M(x,\xi,t,\alpha) -$$

$$- M_1(x,\xi,t,\alpha)]\ w_1(\xi,\alpha)\,d\xi\,d\alpha + \tag{19}$$

$$+ \int_0^t \int_0^a |\,M(x,\xi,t,\alpha)\ [w(\xi,\alpha) - w_1(\xi,\alpha)]\,|\,d\xi\,d\alpha\,.$$

Presupunem că din

$$w(x,t) - w_1(x,t) = \Phi(x,t) - \Phi_1(x,t) + \int_0^t \int_0^a \{N(x,\xi,t,\alpha)\,[w(\xi,\alpha) - \tag{20}$$

$$- w_1(\xi,\alpha)] + [N(x,\xi,t,\alpha) - N_1(x,\xi,t,\alpha)]\ w_1(\xi,t)\}\,d\xi\,d\alpha$$

s-a găsit că

$$\max_D |\,w(x,t) - w_1(x,t)\,| \leqslant \varrho\,. \tag{21}$$

Atunci din (19) rezultă că dacă

$$\max_D |\,\Psi(x,t) - \Psi_1(x,t)\,| < \varepsilon : 3\,, \tag{22}$$

$$\max_D \int_0^t \int_0^a |\,M(x,\xi,t,\alpha)\,|\,d\xi\,d\alpha \cdot \varrho < \varepsilon : 3\,, \tag{23}$$

$$\max_D \int_0^t \int_0^a |\,M(x,\xi,t,\alpha) - M_1(x,\xi,t,\alpha)\,|\,d\xi\,d\alpha < \varepsilon : [3 \max_D |\,w_1(x,t)\,|]\,, \tag{24}$$

atunci $|v(x,t) - v_1(x,t)| < \varepsilon$ pentru toți $(x,t) \in D$. Prin aceasta s-a demonstrat.

Teorema 2. *Pentru ca soluția problemei* (5) — (7) *să fie stabilă în raport cu micile perturbații ale funcțiilor cunoscute ce intră în sistemul integro-diferențial* (5) — (7) *este suficient ca în domeniul* D *să fie satisfăcute inegalitățile* (22) — (24).

Considerăm acum problema de contur mixtă (5), (6) relativă la ecuația integro-diferențială parabolică neliniară

$$P[v(x,t)] - A_1(x,t)\,\frac{\partial v(x,t)}{\partial x} = F[x,t,v(x,t)] +$$

$$+ \int_0^t \{K_2(x,t,\tau)\,\frac{\partial v(x,\tau)}{\partial x} + K_3[x,\tau,v(x,\tau)]\ b(t,\tau)\}\,d\tau\,. \tag{25}$$

Procedînd ca și în cazul rezolvării problemei (5) — (7), se obține

$$v(x,t) = \Psi(x,t) + \int_0^t \int_0^a M_2(x,\xi,t,\alpha)\, w(\xi,\alpha)\, d\xi\, d\alpha + \int_0^t \int_0^a G(x,\xi,t-\alpha) \times$$

$$\times \{F[\xi,\alpha,v(\xi,\alpha)] + \int_0^\alpha K_3[\xi,\tau,v(\xi,\tau)]\, b(\alpha,\tau)\, d\tau\}\, d\xi\, d\alpha \equiv \tag{26}$$

$$\equiv \sigma(x,t,v) + \Psi_2(x,t) + \int_0^t \int_0^a M_2(x,\xi,t,\alpha)\, w(\xi,\alpha)\, d\xi\, d\alpha,$$

în care $\Psi_2(x,t)$ și $M_2(x,\xi,t,\alpha)$ sînt funcții cunoscute pentru toți (x,t), $(\xi,\alpha) \in D$, $w(x,t) \equiv \dfrac{\partial v(x,t)}{\partial x}$ și $\sigma(x,t,v)$ este o anume funcțională.

Avem în consecință

$$w(x,t) = \frac{\partial \Psi_2(x,t)}{\partial x} + \int_0^t \int_0^a \frac{\partial}{\partial x} M_2(x,\xi,t,\alpha)\, w(\xi,\alpha)\, d\xi\, d\alpha + \frac{\partial \sigma(x,t,v)}{\partial x} \equiv \tag{27}$$

$$\equiv \Phi_2(x,t) + \sigma_1(x,t,v) + \int_0^t \int_0^a N_2(x,\xi,t,\alpha)\, w(\xi,\alpha)\, d\xi\, d\alpha.$$

Din (27) se găsește

$$w(x,t) = \Phi_2(x,t) + \sigma_1(x,t,v) + \int_0^t \int_0^a \Gamma(x,\xi,t,\alpha,1)\, [\Phi_2(\xi,\alpha) +$$

$$+ \sigma_1(\xi,\alpha,v)]\, d\xi\, d\alpha \equiv \Phi_3(x,t) + \sigma_1(x,t,v) + \tag{28}$$

$$+ \int_0^t \int_0^a \Gamma(x,\xi,t,\alpha,1)\, \sigma_1(\xi,\alpha,v)\, d\xi\, d\alpha,$$

în care $\Gamma(x,\xi,t,\alpha,1)$ este nucleul rezolvant al nucleului $N_2(x,\xi,t,\alpha)$.

Înlocuind în (26) funcția $w(x,t)$ prin membrul al doilea din relația (28), se ajunge la ecuația integrală

$$v(x,t) = \Psi_4(x,t) + \int_0^t \int_0^a K_4[x,\xi,t,\alpha,v(\xi,\alpha)]\, d\xi\, d\alpha. \tag{29}$$

Are loc următoarea

Teorema 3. *Dacă funcția* $K_4[x,\xi,t,\alpha,v(\xi,\alpha)]$ *este continuă în domeniul* $D_1 = \{D, m_1 \leqslant |v| \leqslant m_2\}$ *în raport cu toate argumentele sale, și satisface în raport cu argumentul* v *condiția lui Lipschitz, cu coeficientul* $\gamma(x,\xi,t,\alpha)$, *atunci, o dată ce sînt îndeplinite inegalitățile* (31), *problema* (5), (6), (25) *posedă o soluție unică, aparținînd clasei de funcții* C_{21}.

În adevăr, ajunge să stabilim în acest scop valabilitatea relațiilor care asigură conservarea principiului reprezentărilor concentrate. Avem

$$|v_2(x,t) - v_1(x,t)| \leqslant \int_0^t \int_0^a \gamma(x,\xi,t,\alpha)\, |v_2(\xi,\alpha) - v_1(\xi,\alpha)|\, d\xi\, d\alpha. \tag{30}$$

Prin urmare, dacă intervalul $[0, T]$ este ales în așa fel ca să fie îndeplinită inegalitatea

$$l = 1 - \max_D \int_0^t \int_0^a \gamma(x, \xi, t, \alpha)\, d\xi\, d\alpha > 0, \tag{31}$$

principiul de mai sus al lui S. Banach, astăzi clasic, este îndeplinit.

Să considerăm acum problema stabilității soluției problemei (5), (6), (25) în raport cu micile perturbații ale funcțiilor cunoscute ce figurează în (5) și (25), păstrînd conținutul definiției de stabilitate introdus mai sus. Să stabilim în acest scop condițiile de vecinătate între soluția problemei (5), (6), (25) și soluția problemei (15) relativă la ecuația integro-diferențială

$$P[v_1(x,t)] - B_1(x,t)\frac{\partial v_1(x,t)}{\partial x} = F_1[x, t, v_1(x,t)] + \tag{32}$$
$$+ \int_0^t \left\{ R_2(x,t,\tau)\frac{\partial v_1(x,\tau)}{\partial x} + R_3[x,\tau,v_1(x,\tau)]\, b_1(t,\tau) \right\} d\tau.$$

Folosind procedeul de construcție a ecuației (29), se obține

$$v_1(x,t) = \Psi_5(x,t) + \int_0^t \int_0^a R_4[x,\xi,t,\alpha,v_1(\xi,\alpha)]\, d\xi\, d\alpha, \tag{29 a}$$

în care $\Psi_5(x,t)$, $R_4[x,\xi,t,\alpha,v_1(\xi,\alpha)]$ sînt funcții continue cunoscute definite în domeniul D_1. Presupunem că funcția $K_4[x,\varepsilon,t,\alpha,v(\varepsilon,\alpha)]$ satisface în domeniul D_1 condițiile teoremei 3. Atunci, dacă au loc inegalitățile

$$\max_D |\Psi_4(x,t) - \Psi_5(x,t)| < \varepsilon l : 2, \tag{33}$$

$$\max_D \int_0^t \int_0^a |K_4[x,\xi,t,\alpha,v_1(\xi,\alpha)] - R_4[x,\xi,t,\alpha,v_1(\xi,\alpha)]|\, d\xi\, d\alpha < \varepsilon l : 2, \tag{34}$$

avem

$$|v(x,t) - v_1(x,t)| \leqslant |\Psi_4(x,t) - \Psi_5(x,t)| + \int_0^t \int_0^a |K_4[x,\xi,t,\alpha,v(\xi,\alpha)] -$$
$$- R_4[x,\xi,t,\alpha,v_1(\xi,\alpha)]|\, d\xi\, d\alpha \leqslant |\Psi_4(x,t) - \Psi_5(x,t)| + \tag{35}$$
$$+ \int_0^t \int_0^a |K_4[x,\xi,t,\alpha,v_1(\xi,\alpha)] - R_4[x,\xi,t,\alpha,v_1(\xi,\alpha)]|\, d\xi\, d\alpha +$$
$$+ \int_0^t \int_0^a \gamma(x,\xi,t,\alpha)\, |v(\xi,\alpha) - v_1(\xi,\alpha)|\, d\xi\, d\alpha;$$

$$\max_D |v(x,t) - v_1(x,t)| \leqslant \max_D \{ |\Psi_4(x,t) - \Psi_5(x,t)| + \tag{35 a}$$
$$+ \int_0^t \int_0^a |K_4[x,\xi,t,\alpha,v_1(\xi,\alpha)] - R_4[x,\xi,t,\alpha,v_1(\xi,\alpha)]|\, d\xi\, d\alpha \} : l < \varepsilon.$$

Se poate prin urmare enunța următoarea:

Teorema 4. *Dacă în domeniul* D_1 *sînt îndeplinite condițiile teoremei* 3 *și au loc inegalitățile* (33), (34), *soluția problemei* (5), (6) *relativă la ecuația integro-diferențială neliniară* (25) *este stabilă în raport cu micile perturbații ale funcțiilor* $\varphi_0(x)$, $A_1(x, t)$, $F(x, t, v)$, $K_2(x, t, \tau)$, $K_3(x, \tau, v)$, $b(t, \tau)$ *ce figurează în sistemul integro-diferențial parabolic* (5) *și* (25).

§ 2. Evaluări apriorice și aposteriorice calitative.

Să stabilim în cele de mai jos unele evaluări calitative ale soluțiilor problemelor considerate în paragraful precedent. Să integrăm în acest scop ecuația (12) în raport cu x de la 0 la a și să introducem notațiile

$$w(t) = \int_0^a |w(x,t)|\,dx\ ;\quad \varphi(x) \geqslant \left|\int_0^a \Phi(x,t)\,dx\right|;\ \varphi(t) > 0,\ \varphi'(t) \geqslant 0;$$
$$p(x,\alpha) \geqslant |N(x,\xi,t,\alpha)| \quad (x,t),(\xi,\alpha) \in D,\quad 0 \leqslant t \leqslant T, \tag{36}$$

subliniind totodată că funcția $\varphi(t)$ se presupune a fi diferențiabilă pentru toți $t \in [0, a]$.

Avem în consecință,

$$[\varphi'(t) + p(x,t)\,w(t)] : \left[\varphi(t) + \int_0^t p(x,\alpha)\,w(\alpha)\,d\alpha\right] \leqslant p(x,t) + \varphi'(t) : \varphi(t);$$

$$\ln\left[\varphi(t) + \int_0^t p(x,\alpha)\,w(\alpha)\,d\alpha\right] \leqslant \int_0^t p(x,\alpha)\,d\alpha + \ln[\varphi^2(t) : \varphi(0)]; \tag{37}$$

$$\varphi(t) + \int_0^t p(x,\alpha)\,w(\alpha)\,d\alpha \leqslant [\varphi^2(t) : \varphi(0)]\ \exp\ \zeta(x,t),$$

în care $\zeta(x,t) = \int_0^t p(x,\alpha)\,d\alpha$. Prin urmare

$$w(t) \leqslant [\varphi^2(t) : \varphi(0)]\ \exp\ \zeta(x,t); \tag{38}$$

$$|w(x,t)| \leqslant \left|\Psi(x,t) + \int_0^t \sigma(x,t,\alpha)\,[\varphi^2(\alpha) : \varphi(0)]\ \exp\ \pi(\alpha)\,d\alpha\right|, \tag{39}$$

în care

$$\sigma(x,t,\alpha) \geqslant |M(x,\xi,t,\alpha)|,\ \pi(\alpha) \geqslant \zeta(\xi,\alpha),\ (x,t),\ (\xi,\alpha) \in D.$$

Are loc următoarea

Teorema 5. *Dacă funcțiile cunoscute, ce figurează în* (5), (7) *sînt definite și continue pentru toți* $x \in [0, a]$, $t, \tau \in [0, T]$, *iar funcția* $\varphi(t)$ *regulată și non negativă descrește monoton pentru toți* $t \in [0, T]$, *atunci în domeniul D are loc evaluarea* (39).

Observație. Se pot construi într-un mod analog evaluări pentru $|w(x,t)|$. Ajunge să se evalueze în prealabil mărimea integralei

$$\int_0^t |w(x,\tau)|\,d\tau .$$

Să mai menționăm unele considerații, ce se referă la evaluarea modulului soluției problemei sistemului integro-diferențial parabolic (5)—(7).

a) Presupunem că are loc inegalitatea

$$l_1 = 1 - \max_D \int_0^t\int_0^a |N(x,\xi,t,\alpha)|\,d\xi\,d\alpha > 0 . \tag{40}$$

Atunci

$$\max_D |w(x,t)| \leqslant \max_D |\Phi(x,t)| : l_1 = \mu . \tag{41}$$

Prin urmare

$$|w(x,t)| \leqslant |\Phi(x,t)| + \mu \int_0^t\int_0^a |N(x,\xi,t,\alpha)|\,d\xi\,d\alpha \equiv g(x,t,\mu) ,$$

$$|v(x,t)| \leqslant |\Psi(x,t)| + \int_0^t\int_0^a |M(x,\xi,t,\alpha)|\,g(\xi,\alpha,\mu)\,d\xi\,d\alpha \tag{42}$$

$$(x,t) \in D .$$

O evaluare mai simplă, însă mai puțin precisă, a modulului soluției problemei considerate se obține dacă se folosește inegalitatea (40) :

$$|v(x,t)| \leqslant |\Psi(x,t)| + \mu \int_0^t\int_0^a |M(x,\xi,t,\alpha)|\,d\xi\,d\alpha \tag{43}$$

$$(x,t) \in D .$$

Dacă inegalitatea (40) nu are loc, atunci în ecuația (12) trebuie să se facă k substituții iterate în așa fel ca

$$l_2 = 1 - \max_D \int_0^t\int_0^a |N_k(x,\xi,t,\alpha)|\,d\xi\,d\alpha > 0 , \tag{44}$$

în care prin $N_k(x,\xi,t,\alpha)$ s-a notat nucleul iterat de ordinul k provenit din nucleul $N(x,\xi,t,\alpha)$. Atunci, evaluarea mărimii $|w(x,t)|$ poate fi găsită din ecuația

$$w(x,t) = \Phi(x,t) + \int_0^t\int_0^a \sum_{i=0}^{k-1} N_i(x,\xi,t,\alpha)\,\Phi(\xi,t)\,d\xi\,d\alpha + \tag{45}$$

$$+ \int_0^t\int_0^a N_k(x,\xi,t,\alpha)\,w(\xi,\alpha)\,d\xi\,d\alpha ,$$

în care prin $N_i(x,\xi,t,\alpha)$ s-a notat nucleul iterat de ordin i al nucleului $N(x,\xi,t,\alpha)$. În rest, toate deducțiile de mai sus rămîn valabile.

b) În articolul [15] este expusă evaluarea nucleului rezolvant $\Gamma(x, \xi, t, \alpha, 1)$ relativ la ecuație integrală de forma (12):

$$|\Gamma(x, \xi, t, \alpha, 1)| \leqslant N \exp(atN) \; ; \quad N \geqslant |N(x, \xi, t, \alpha)| \qquad (x, t), \; (\xi, \alpha) \in D . \tag{46}$$

Avem, prin urmare, dacă se ține seama de (46),

$$|w(x, t)| \leqslant |\Phi(x, t)| + N \int_0^t \int_0^a |N(x, \xi, t, \alpha)| \exp(a\alpha N) \, d\xi \, d\alpha \equiv \omega_1(x, tN, \tag{47}$$

$$|v(x, t)| \leqslant |\Psi(x, t)| + \int_0^t \int_0^a |M(x, \xi, t, \alpha)| \, \omega_1(\xi, \alpha, N) \, d\xi \, d\alpha, \; (x, t) \in D. \tag{48}$$

Să evaluăm acum soluția problemei (5), (6), (25) corespunzătoare cazului în care funcția $K_4[x, \xi, t, \alpha, v(\xi, \alpha)]$ posedă în domeniul D proprietatea că

$$|K_4[x, \xi, t, \alpha, v(\xi, \alpha)]| \leqslant K(\xi, \alpha) \, \theta(z), \tag{49}$$

în care $z(x, y) \equiv |v(x, y)|$, $K(\xi, \alpha)$ și $\theta(z)$ sînt funcții cunoscute monoton nedescrescătoare pentru toți (x, t), (x, α), $v \in D_1$ și $0 < \theta(\;) < p$

Din (29) avem

$$z(x, t) \leqslant g(x) + \int_0^t \int_0^a K(\xi, \alpha) \, \theta[z(\xi, \alpha)] \, d\xi \, d\alpha , \tag{50}$$

în care $g(x) \geqslant |\Psi_4(x, t)|$, $(x, t) \in D$; $g(x)$ este o funcție monotonă nedescrescătoare. Să introducem funcția

$$\lambda(x, t) \equiv g(x) + \int_0^t \int_0^x K(\xi, \alpha) \, \theta[z(\xi, \alpha)] \, d\xi \, d\alpha . \tag{51}$$

Atunci

$$z(x, t) \leqslant \lambda(a, t) + g(x) - g(a) \; ; \tag{52}$$

$$\lambda'_t(a, t) = \int_0^a K(\xi, t) \, \theta[z(\xi, t)] \, d\xi \leqslant \int_0^a K(\xi, t) \, \theta[\lambda(a, t) + g(\xi) - g(a)] \, d\xi \leqslant \int_0^a K(\xi, t) \, d\xi \cdot \theta[\lambda(a, t)] \equiv r(t) \, \theta[\lambda(a, t)] . \tag{53}$$

Din (53) se obține

$$\int_{b(a)}^{c(t)} \frac{d\tau}{\theta(\tau)} \leqslant \int_0^t r(\tau) \, d\tau , \tag{54}$$

în care s-a notat

$$b(a) = \lambda(a, 0) , \quad c(t) = \lambda(a, t) .$$

Folosind inegalitatea (52), precum și faptul că din (53) a fost găsită o valoare a funcției $\lambda(r,t)$, să găsim acum o evaluare pentru funcția $z(x,t)$, $(x,t)\in D$. Este evident că cea mai simplă și totodată cea mai puțin perfectă evaluarea pentru funcția $|v(x,t)|$ se obține nemijlocit din (50). Ea este dată prin (55)

$$|v(x,t)| \leqslant |\Psi_4(x,t)| + p\int_0^t\int_0^a K(\xi,\alpha)\,d\xi\,d\alpha \quad (x,t)\in D. \tag{55}$$

Să indicăm în cele ce urmează cîteva din evaluări aposteriorice ale soluțiilor problemelor considerate, menționînd că evaluările calitative stabilite mai sus au avut un caracter aprioric.

a) Fie $\Phi(x,t)\geqslant 0$, $N(x,\xi,t,\alpha)\geqslant 0$ pentru toți (x,t), $(\xi,\alpha)\in D$ și fie $\alpha_0(x,t)$, $\beta_0(x,t)$ — funcții cunoscute continue. Presupunem că au loc inegalitățile

$$\alpha_0(x,t) \leqslant w(x,t) \leqslant \beta_0(x,t), \quad (x,t)\in D. \tag{56}$$

Atunci funcțiile $\alpha_n(x,t)$, $\beta_n(x,t)$, determinate prin formulele

$$\alpha_n(x,t) = \Phi(x,t) + \int_0^t\int_0^a N(x,\xi,t,\alpha)\,\alpha_{n-1}(\xi,\alpha)\,d\xi\,d\alpha, \tag{57}$$

$$\beta_n(x,t) = \Phi(x,t) + \int_0^t\int_0^a N(x,\xi,t,\alpha)\,\beta_{n-1}(\xi,\alpha)\,d\xi\,d\alpha, \tag{58}$$

$$(n=1,2,\ldots),$$

posedă următoarele proprietăți:

$$\alpha_n(x,t) \leqslant w(x,t) \leqslant \beta_n(x,t), \tag{59}$$

$$\lim_{n\to\infty}\alpha_n(x,t) = \lim_{n\to\infty}\beta_n(x,t) \equiv w(x,t), \quad (x,t)\in D. \tag{60}$$

Se pot lua, în consecință, drept funcții apropiate de soluția problemei (5)—(7),

$$v_{n1}(x,t) = \Psi(x,t) + \int_0^t\int_0^a M(x,\xi,t,\alpha)\,\alpha_n(\xi,\alpha)\,d\xi\,d\alpha,$$

$$v_{n2}(x,t) = \Psi(x,t) + \int_0^t\int_0^a M(x,\xi,t,\alpha)\,\beta_n(\xi,\alpha)\,d\xi\,d\alpha$$

$$(n=0,1,\ldots).$$

În corespondență cu cele de mai sus au loc evaluările

$$|v(x,t)| \leqslant |v_{ni}(x,t)| + \int_0^t\int_0^a |M(x,\xi,t,\alpha)\,[\beta_n(\xi,\alpha)-\alpha_n(\xi,\alpha)]|\,d\xi\,d\alpha \tag{61}$$

$$(i=1,2;\ n=0,1,\ldots;\ (x,t)\in D).$$

În corespondența cu cazul în care se consideră problema (5), (6), (25), presupunem că funcțiile $\Psi_4(x,t)$, $K_4[x,\xi,t,\alpha,v(\xi,\alpha)]$ ce figurează în ecuația (29) posedă următoarea proprietate:

$$\Psi_4(x,t)\geqslant 0,\ K_4[x,\xi,t,\alpha,v(\xi,\alpha)]\geqslant 0,\ \frac{\partial K_4}{\partial v}\geqslant 0;\ (x,t),(\xi,\alpha),v\in D_1.$$

Fie $m_0(x,t)$, $n_0(x,t)$ o pereche de funcții astfel încît să aibă loc șirul de inegalități

$$m_0(x,t)\leqslant v(x,t)\leqslant n_0(x,t).$$

Atunci succesiunea de funcții $\{m_i(x,t)\}$, $\{n_i(x,t)\}$, definită prin formulele

$$m_i(x,t)=\Psi_4(x,t)+\int_0^t\int_0^a K_4[x,\xi,t,\alpha,m_{i-1}(\xi,\alpha)]\,d\xi\,d\alpha, \tag{62}$$

$$n_i(x,t)=\Psi_4(x,t)+\int_0^t\int_0^a K_4[x,\xi,t,\alpha,n_{i-1}(\xi,\alpha)]\,d\xi\,d\alpha, \tag{63}$$

$$(i=1,2,\ldots),$$

satisfac inegalitățile

$$m_i(x,t)\leqslant v(x,t)\leqslant n_i(x,t), \tag{64}$$

precum și relațiile la limită

$$\lim_{i\to\infty} m_i(x,t)=\lim_{i\to\infty} n_i(x,t)=v(x,t)\qquad (x,t)\in D. \tag{65}$$

Valabilitatea inegalității (64) se demonstrează prin metoda inducției matematice, iar egalitățile (65) rezultă din analiza relațiilor (64).

Observație. Și relațiile (19), (33) pot fi folosite pentru a se obține evaluări de soluții atît relative la problema (5)—(7), cît și la problema (5), (6), (25).

3. Concluzii

Rezultatele obținute, constituind un pas nou în studiul variatelor sisteme integro-diferențiale care răspund nemijlocit la nevoile actuale ale fizicii și tehnicii, prezintă un interes deosebit dacă se ține seama de faptul că reflectă unele schematizări ale problemelor de transport de particule, teoria undelor de șoc, ș.a.ș.a. [16], [17], [23], [24].

Într-o serie de lucrări ce urmează să apară în curînd se abordează alte probleme interesante, dintre care menționăm aici problema polilocală

$$\sum_{i=0}^{n-1}[\alpha_{ij}\,y^{(i)}(a)-\sum_{k=1}^{s}{}'\,c_{ijk}\,y^{(i-1)}(x_s)+\beta_{ij}\,y^{(i)}(b)]=0\ \ (j=1,2,\ldots,n)$$

relativă la ecuația integro-diferențială

$$y^{(n)}(x) + \lambda \left[\sum_{i=1}^{n} a_i(x)\, y^{(i)}(x) + \int_a^x \sum_{i=0}^{m} K_i(x,t)\, y^i(t)\, dt \right] = f(x),$$

ce include într-însa o aplicare a polinoamelor lui Kantorovič, precum și problema de abordare a rezolvării unor noi sisteme integro-diferențiale prin aplicarea metodei operaționale a tov. prof. S. Vasilach [18], sau a metodei, ce se leagă de [19], a tov. M. V. Popov [20], [21], primită cu atîta interes la recentul congres unional de Mecanică teoretică și aplicată (Moscova, 29.I.—5.II.1964 [22].

BIBLIOGRAFIE

1. * * * *Colocviul de aproximarea funcțiilor cu aplicații la Calculul numeric.* Cluj, 15—19.XI.1963.
2. * * * *Applications des équations non linéaires à la Physique théorique.* Réunions d'études et de mises au point tenues sous la présidence de Louis de Broglie. Éditions de la Revue d'Optique, Paris, 1962.
3. * * * *Les équations aux dérivées partielles.* Colloques Internationaux du Centre National de la Recherche Scientifique. Paris, 1963.
4. * * * L. V. OVSIANNIKOV, T. I. ZELENIAK, *Sovetsko-amerikanskii Simpozium matematikov v Novosibirske.* Izv. Akad. Nauk SSSR, *11*, 1963, 93—97.
5. M. NICOLESCU, *Ecuația iterată a căldurii.* Studii și cercetări matematice, V, 3—4, 1954, 243—332.
6. D. MANGERON, *Noi metode de cercetări pentru determinarea integralelor ecuațiilor cu derivate parțiale prin aplicarea transformatei multiple a lui Laplace cu domeniul de integrație finit.* Revista științifică, Iași, XXXII, *1*, 1946, 4 p.
7. L. POLI, P. DELERUE, *Le calcul symbolique à deux variables et ses applications.* Mémorial des Sciences Mathématiques, CXXVII, 1954, Gauthier-Villars, Paris, p. 49—50.
8. M. ROȘCULEȚ, *Contribuții la studiul ecuațiilor cu derivate parțiale de tip parabolic. Problema lui Cauchy pentru ecuații cu derivate parțiale, liniare, de ordinul doi, cu coeficienți variabili, într-un număr oarecare de variabile.* Institutul politehnic București. Sesiunea științifică a cadrelor didactice, 22—23.II,1964. Rezumatele lucrărilor, p. 51.

9. D. MANGERON, *Risolubilità e struttura delle soluzioni dei problemi al contorno non omogeni di Goursat e di Dirichlet per le equazioni integro-differenziali lineari a derivate totali d'ordine superiore.* Accademia Nazionale dei Lincei, Rend. Cl. Sci. fis., mat. e nat., s. VIII, XXXIV, 2, 1963, 118—122.

10. D. MANGERON, L. E. KRIVOSEIN, *Sopra i problemi al contorno per le equazioni integro-differenziali lineari a derivate parziali con derivata d'ordine superiore di Picone.* Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, XXXIII, 1963, 226—266.

11. E. B. KARPILOVSKA, *O shodimosti metoda kollokatzii.* Doklady Akad. Nauk SSSR, 151, 4, 1963, 766—768.

12. G. N. SAVIN ș.a., *Matematiceskie problemy dinamiki niti.* Akad. Nauk Ukrain. SSR, Kiev, 1963.

13. R. E. BELLMAN, S. E. DREYFUS, *Applied Dynamic Programming.* A RAND Corporation Research Study. Princeton University Press, N. J., 1962.

14. A. N. TIHONOV, A. A. SAMARSKII, *Uravnenia matematiceskoi fiziki,* GITTL, Moskva, 1953.

15. E. A. BARBAȘIN, L. P. BISIARINA, *Ob ustoicivosti reșenii integro-differentzial'nyh uravnenii.* Izv. vyssih učebnyh zavedenii, Matematica, 1963, *3*, 3—14.

16. R. SAUER, *La convergence stable du calcul numérique pour la résolution de problèmes à conditions initiales.* Colloque sur l'Analyse numérique. Centre Belge de Recherches Mathématiques. Louvain, 1961, 25—36.

17. P. GERMAIN, *L'équation de Bürgers et ses applications à la théorie des ondes de choc.* In volumul „Application des équations non linéaires à la physique théorique", Éditions de la Revue d'Optique, Paris, 1962, 101—116.

18. S. VASILACH, *O novyh kraevyh zadačah dlia nekotoryh integro-differential'nyh uravnenii ili uravnenii o častnyh proizvodnyh* Revue math. pures et appl., Bucarest, (5) 2, 251—274, 1960.

19. D. MANGERON, *L'applicazione del metodo di Picone, della trasformata di Laplace ad intervallo d'integrazione finito, alla teoria delle equazioni a derivate parizali d'ordine qualunque.* Rend. Accad. d'Italia, s. 7, I, *1*, 1939, 1—9.

20. M. V. POPOV, *Ob absoliutnoi ustoicivosti nelineinyh sistem avtomaticeskogo regulirovania.* Avtomatika i telemehanika, XXII, 1961, 961—979.

21. C. CORDUNEANU, *Sur une équation intégrale non-linéaire.* Analele științ. ale Univ. „Al. I. Cuza", Iași, serie nouă, I (Mat., Fiz., Chimie), IX, 1963, 2, 369—375.

22. * * * Trudy Vtorogo Vsesoiuznogo Soezda po teoreticeskoi i prokladnoi mehanike. Annotații dokladov, 29.I.—5.II.1964, Moskva.

23. J. DOUGLAS, B. F. JONES, *Numerical methods for integro-differential equations of parabolic and hyperbolic types.* Numer. Math., 1962, *4*, 96—102.

24. B. M. BUDAK, A. B. USPENSKI, *Raznostnyi metod reșenia kraevyh zadač dlia integro-differentzial'nyh uravnenii paraboliceskogo tipa s razryvnymi koeffitzientami.* Vestnik MGU, ser. matem. i meh., 1963, *4*, 15—26.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC BUCUREȘTI
Tomul XXVI — 1964, Fascicola 1

C.Z. 513.1

SUR UNE GÉNÉRALISATION DE L'ÉPURE DE MONGE *

PAR MIHAIL ȘT. BOTEZ

On obtient une généralisation de l'épure de Monge, en considérant comme repère un dièdre quelconque. De cette manière l'épure de Monge est un cas particulier. Par un choix convenable de l'angle dièdre du repère, comme on va voir, on obtient pour les problèmes métriques des simplifications remarquables.

1. Considérons les deux plans de projection H et V, ayant l'angle $\hat{\alpha} = \widehat{HV} \neq 90°$. L'épure ainsi obtenue sera notée par E_θ, tandis que par E sera notée l'épure de Monge. L'angle θ, le complément de l'angle α sera nommé *module, et* l'épure correspondante, *épure modulaire.*

Les projetantes sont parallèles ou perpendiculaires aux plans de projection, à condition qu'elles soient contenues dans un même plan perpendiculaire à la droite d'intersection XX des plans H et V.

Si $\hat{\theta} = 0$, l'angle du dièdre est nul et l'on obtient un repère dont les plans sont parallèles. En ce cas le module est la distance des deux plans [1]. Pour $\theta \neq 0$, on obtient l'épure en utilisant soit le principe des deux traces (Das Zweispurenprinzip), soit le principe des deux images (Das Zweibilderprinzip) [2].

Pour l'épure à dièdre nul on est conduit à utiliser une trace et une image. Dans tous les cas, les images obtenues sont des images complètes au sens de N. F. Cetverouchin [3], ce qui rend possibles toutes les constructions graphiques rencontrées dans la géométrie descriptive.

a) *Le point.* Soit M un point quelconque. Les projetantes $Mm^* \parallel V$; $Mm_1^* \parallel H$, l'éloignement $m^* m_x^*$ et la cote obligue $m_1^* m_x^*$ déterminent un parallélogramme dont l'angle $\sphericalangle m_1^* m_x^* m^* = \hat{\alpha}$.

Quand on rabat ce parallélogramme sur le plan H, on obtient le parallélogramme $m_x m\, m_1 m^*$ (fig. 1a), dont la hauteur $m_1 m$ est la cote orthogonale du point considéré, tandis-que m est sa projection sur le plan H.

* Communication présentée à la session scientifiques des cadres didactiques de L'Institut Polytechnique de Bucarest le 7—8 Avril 1962.

Pour distinguer l'épure ainsi obtenue de celle de Monge on va indiquer sur le dessin le module θ. Nous allons noter cette épure par E_θ^1 et le plan qui correspond au plan vrtical par V^*.

Si l'angle $\hat{\alpha} \neq 90°$ et les projectantes sont perpendiculaires sur les plans du repère, alors le patrulatère $Mm^* m_x m_1^*$ dont le rabattement sur plan H est $m_x \overline{mm_1} m^*$, a les angles $\hat{m} = \hat{m}^* = 90°$ et le segment $m_1 m^*$ est justement la cote orthogonale du point M. Nous allons designer cette épure par E_θ^2 (fig. 1b).

On remarque qu'entre les épures E, E_θ^1 et E_θ^2, il y a une étroite relation qui nous permet de passer de l'une à l'autre.

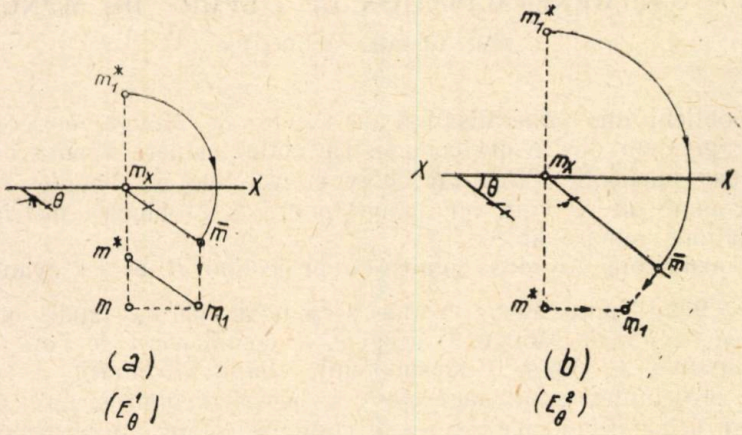


Fig. 1

Evidemment pas tous les points situés dans le deuxième dièdre d'un repère E_θ, auront leurs projections horizontales placées au desus de l'axe XX, comme pour le repère E. C'est ainsi que pour le repère E, les points du dièdre (VV^*) qui est contenu par le second dièdre de E, ont leurs projections sur le plan H placées au desous de XX. Mais si les mêmes points on les rapporte au repère E_θ^1, on obtient la même image que pour E.

On obtient d'une manière assez simple les transformations : $E \leftrightarrow E_\theta^1$, $E \leftrightarrow E_\theta^2$ et $E_\theta^1 \leftrightarrow E_\theta^2$.

b) *La droite.* — Soit la droite $(hv, h'v')$, donnée par une epure E. (fig. 2a) ; l'épure E_θ^1 de cette droite est obtenue en transformant le point $(vv') \in V$ en $(v^* v_1^*)$.

Si l'on veut avoir l'épure E_θ^2, de la droite donnée (fig. 2b) on va transformer $(hh') \rightarrow (hh_1^*)$ et $(vv') \rightarrow (v^* v_1^*)$.

La transformation $E \rightarrow E_\theta^1$ rappelle de près le changement de plans effectué dans une épure E. Le nouveau plan de projection $V^* \equiv QQ'$,

dont l'angle avec H est α, donne l'épure E_0^1, à l'aide du point (vv') qui est la trace verticale de la droite d'intersection des plans (PP') et (QQ'); la ligne de terre correspondante est $X^*X^* \equiv QQ_x$ (fig. 3).

2. La transformation $E \to E_0$ est particulièrement avantageuse pour les problèmes métriques dont la solution este obtenue par changements de plans.

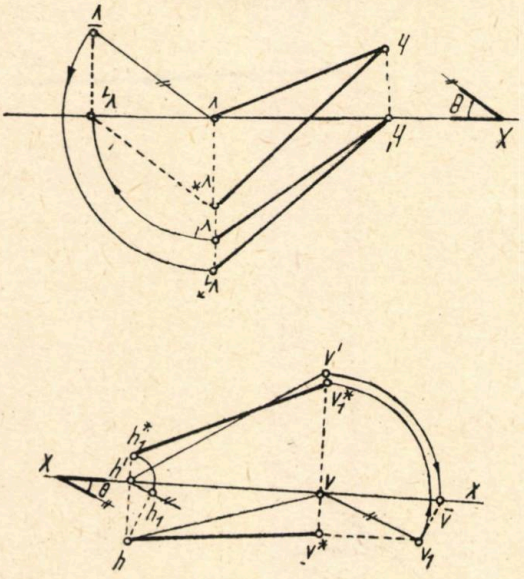


Fig. 2

a) *Distance minime des deux droites gauches* (fig. 4). On résout ce problème en transformant $E \to E_0^2$, qui donne immédiatement la distance cherchée, tandis-que pour avoir la solution du problème avec le système E, il faut deux changements de plan.

Pour obtenir la transformation $E \to E_0^2$, on determine le module de E_0^2 à l'aide du plan $PP_x\lambda') \perp D\,(dd')$. De cette manière d^* sera la projection sur le plan V^* de la droite D et $k^*\,a^*$ la projection de la droite D_1. La distance cherchée est donnée par $d^*\,c^* \perp a^*\,k^*$.

Remarque. Il est à remarquer que la vraie distance $d^*d_1^*$ entre deux droites parallèles dans une épure E, est obtenue d'une manière très simple comme l'on peut voir sur l'épure cijointe (fig. 5), par la transformation $E \to E_0^2$.

b) *Angle de deux plans (fig. 6).* Soit (PP') et (QQ') deux plans donnés par l'épure E. Pour trouver la vraie valeur de leur angle, on va transformer $E \to E_0^2$ en prenant comme plan V^*, le plan (RR') avec ses traces $R \equiv X^* \perp hv$ et $R' \perp v'h'$.

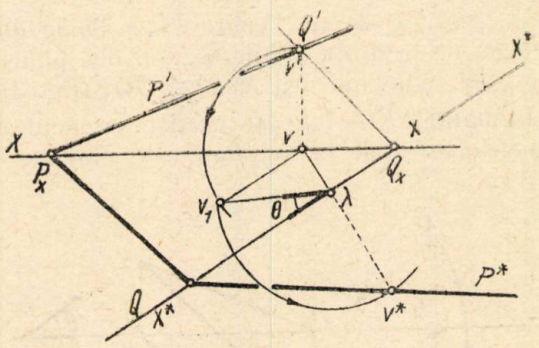

Q'
X*
P'
X
v
X
P_x
Q_x
v_1
θ
λ
P*
Q
X*
v*

Fig. 3

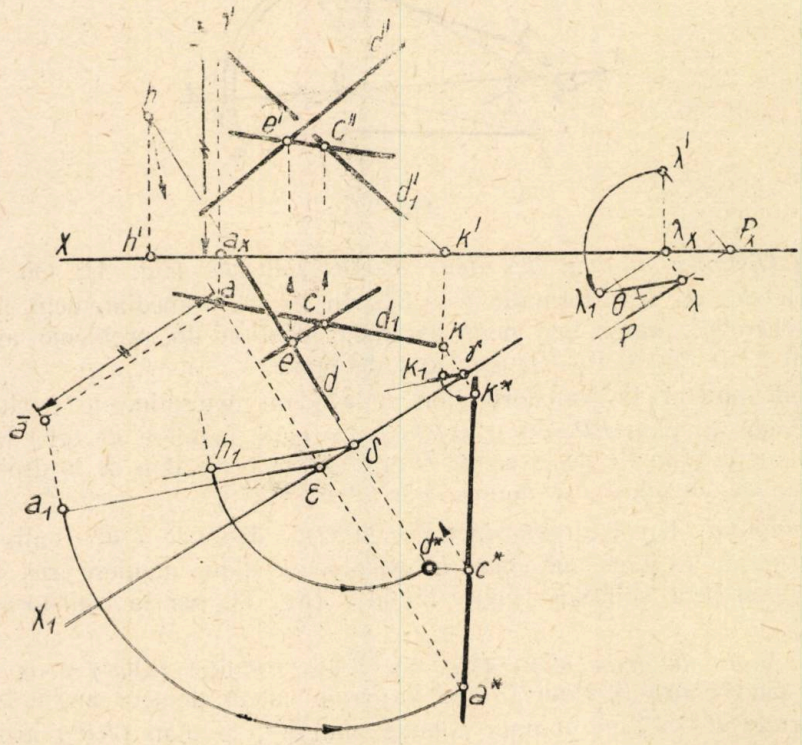
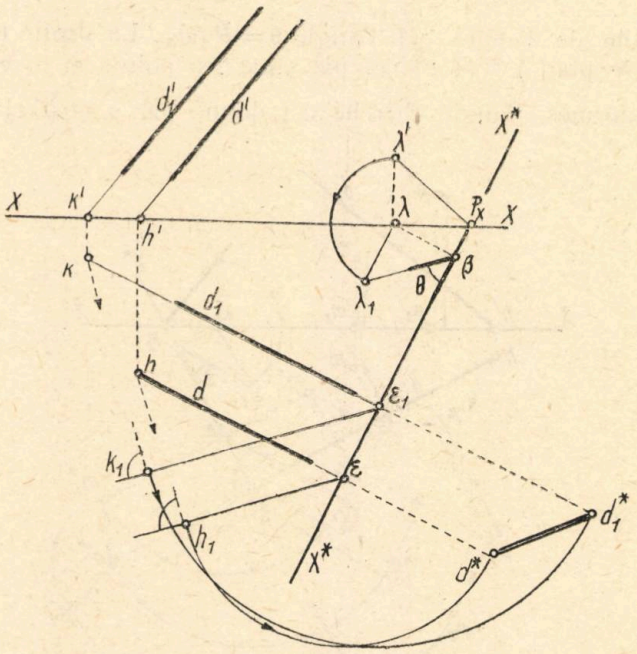
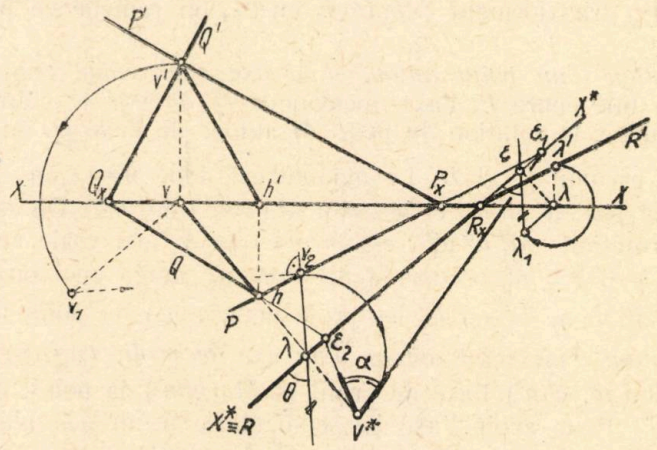

γ'
d'
h
e'
c''
d_1'
λ'
X
h'
a_x
k'
λ_x
P_x
a
c
d_1
k
λ_1
θ
λ
P
e
d
k_1
γ
k*
ā
h_1
δ
ε
a_1
d*
c*
X_1
a*

Fig. 4



X
K'
h'
K
d'1
d'
λ'
λ
Px
X*
X
β
θ
λ1
d1
h
d
ε1
K1
ε
h1
X*
d*
d1*

Fig. 5



P'
Q'
V'
X
Qx
V
h'
Px
ε
ε1
λ'
X*
R'
λ
X
Rx
λ1
Q
V2
V1
P
h
λ
ε2
α
θ
X*≡R
V*

Fig. 6

Le module de l'épure est l'angle $\hat{\theta} = \widehat{R_x \varepsilon \lambda_1}$. La droite $(hv, h'v')$ est projetée sur le plan V^* et v^*, et parceque les points ε_1 et ε_2 sont leurs propres transformés, l'angle cherché est donné par $\hat{\alpha} = \measuredangle \varepsilon_2 v^* \varepsilon_1$.

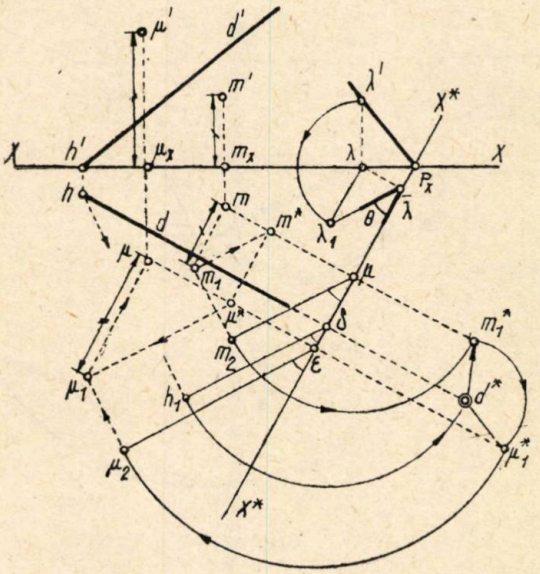


Fig. 7

3. La methode de *rotation* autour d'axes quelconques présente des difficultés qui sont enlevées en général par deux changements de plan préalables. En transformant l'épure E en E_0^2, on ramène ce problème au cas ordinaire.

a) *Rotation d'un point autour d'un axe quelconque* (fig. 7). Soient donnés dans une épure E, l'axe quelconque $D\,(dd')$ et le point $M\,(mm')$.

Pour obtenir la rotation du point M autour de l'axe D, on transforme $E \to E_0^2$, en prenant $V^* \perp D$. Le module est donc $\hat{\theta} = \widehat{\lambda_1 \bar{\lambda} \mu}$.

L'axe est projeté en d^* et le point $M\,(mm')$ en m_1^*. De cette manière l'angle de rotation $m_1^* d^* \mu_1^*$, est projeté sur V^* en vraie valeur. Après la rotation, le point m_1^* occupe la position μ_1^* après quoi on obtient par la transformation de E_0^2 en E, les projections $(\mu\mu')$ du point tourné.

b) *Rotation d'un point autour d'un axe de profil* (fig. 8).

Soit AB $(ab,\ a'b')$ l'axe de profil et M (mm') le point, donnés dans une épure E. Pour avoir l'axe perpendiculaire à un des plans de référence, on fait la transformation $E \to E_0^2$ de manière que l'axe AB soit perpendiculaire sur le plan V^*. La projection sur le plan V^* de l'axe AB

est le point α^*, obtenu au moyen du point $\alpha_1 (a_x \alpha_1 = a_x \alpha^*)$, et la projection du point M est m_1'; $(m_x m_1^* = m_x m_1')$. De cette manière l'angle de rotation $\widehat{\omega} = \widehat{m_1' \alpha^* \mu_1'}$ est projeté en vraie valeur sur le plan V^*, et on obtient

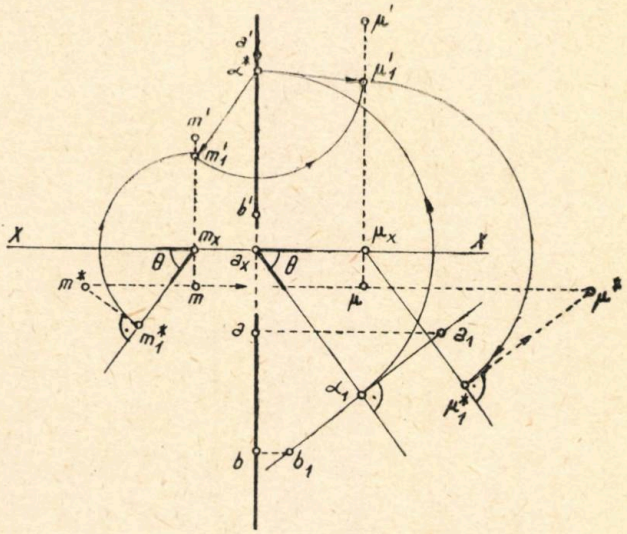


Fig. 8

comme transformé du point donné, le point $(\mu\mu_1')$. Pour avoir l'épure E du point dans sa nouvelle position, on construit le point μ^*, $(\mu_x \mu_1^* \parallel a_x \alpha_1)$ à l'aide duquel on obtient la cote $\mu\mu^* = \mu_x \mu'$.

Le nombre des problèmes métriques qu'on peut résoudre à l'aide de l'épure généralisée est assez grand, et on peut en faire beaucoup d'autres applications.

La chaire de géométrie discriptive et appliquée
Inst. Polyt. Bucarest

BIBLIOGRAPHIE

1. MIHAIL ŞT. BOTEZ. Sur une nouvelle manière des représenter l'espace linéaire. — Bul. Inst. Polyt. Bucarest. XXIII (3). 1961.

2. LUDWIG ECKHART. Konstruktive Abbildungsverfahren- Wien 1926.

3. N. F. CETVEROUCHIN, O polnote izobrajenii. Moscova 1943.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC BUCUREȘTI
Tomul XXVI — 1964, Fascicola 1

CHIMIE TEHNOLOGICĂ

CZ. 669.292.3 : 661.25

RECUPERAREA VANADIULUI DIN CATALIZATORUL DE LA INDUSTRIA ACIDULUI SULFURIC DE CONTACT *

F. M. ALBERT, V. T. MĂRCULEȚIU, V. BRĂTEANU, N. CAPLESCU, M. STOIA
M. POPESCU-VĂLEANU

În literatura de specialitate se găsesc puține indicații asupra recuperării vanadiului din masele de contact. Într-o lucrare recentă (1) se utilizează o coloană de anioniți pentru separarea vanadiului. Un patent (2) indică posibilitatea recuperării vanadiului din leșiile carbonatice prin precipitare-reducere, iar altul (3) se ocupă de regenerarea vanadiului existent în catalizatorul oxidat. J. Benes și J. Sticha (4) descriu o metodă pentru izolarea pentoxidului de vanadiu din leșiile alcaline. O lucrare cu caracter bibliografic (5) se ocupă printre altele și de această problemă. În general însă, cu foarte puține excepții, nici publicațiile de specialitate și nici patentele accesibile nouă, nu și-au pus problema recuperării vanadiului din masele de contact. Ele se ocupă în deosebi cu prepararea catalizatorului (6—10) sau cu separarea vanadiului din diferite materii prime (11—15).

În limba romînă există cîteva articole în care se examinează unele aspecte legate de chimia și fizico-chimia vanadiului, dar niciuna nu se ocupă de recuperarea acestui element. Astfel, colectivul condus de V. Diaconescu (16) studiază fabricarea catalizatorului din metavanadat de amoniu pe un suport de silice. Alte publicații, majoritatea fiind referate întocmite pe baza unor indicații bibliografice, se ocupă cu metodele pentru dozarea vanadiului (17), influența impurităților asupra catalizatorului (18), prepararea compușilor de vanadiu din ferovanadiu (19), studii fizico-chimice asupra coloidului de V_2O_5 (20), sau de extracția vanadiului cu apă (21).

În prima etapă a lucrării noastre era necesar să se facă o analiză cît mai completă a catalizatorului. Rezultatele analizelor sînt redate în tabelele 1 și 2.

Pentru a ușura analiza și apoi extracția vanadiului, masa de contact a fost măcinată în moara cu bile și apoi trecută prin sita de 3600 ochiuri/cm^2.

---

* Lucrarea comunicată la sesiunea științifică a cadrelor didactice din Inst. polit. Buc. 7—8 aprilie 1962.

Tabela 1

Rezultatele obținute la analiza chimică a catalizatorului

Nr. det.	Umiditate %	SiO_2 %	S liber %	$Fe_2O_3 + Al_2O_3$ %	Fe_2O_3	$Na_2O + K_2O$ %	V_2O_5 %	V %
1	1,6	53,4	12,6	12,2	11,0	13,6	6,6	3,6
2	1,5	55,0	11,0	15,9	14,5	10,4	6,4	3,4
3	1,4	56,6	8,7	15'5	14,3	11,8	6,2	3,25
4	1,5	54,8	11,2	15,5	14,0	12,0	6,2	3,24
5	1,4	55,2	11,5	14,5	13,1	12,0	6,5	3,4
6	1,5	54,5	11,0	16,0	14,6	11,5	6,5	3,4
7	1,5	55,0	10,5	15,2	14,0	12,2	6,6	3,6
8	1,3	57,3	9,4	12,1	11,0	14,3	6,2	3,25
9	1,6	55,5	10,8	16,0	14,5	9,7	6,4	3,4
10	1,7	52,7	13,3	13,6	12,0	12,5	6,4	3,4
Media	1,5	55,0	11,0	14,6	13,3	12,1	6,4	3,4

Tabela 2

Cantitatea de vanadiu obținută prin diverse metode de dezagregare în procente

Nr. det.	V_2O_5 %			V %		
	Dezagregarea H_2SO_4 1 : 1	Dezagregarea $H_3PO_4 + H_2SO_4$ 1 : 3	Dezagregarea prin topitură alcalină	Dezagregarea cu H_2SO_4 1 : 1	Dezagregarea cu $H_3PO_4 + H_2SO_4$ 1 : 3	Dezagregarea prin topitură alcalină
1	6,40	6,35	6,40	3,39	3,36	3,39
2	6,25	6,25	6,30	3,36	3,31	3,33
3	6,55	6,48	6,60	3,47	3,43	3,49
4	6,45	6,50	6,50	3,41	3,44	3,44
5	6,48	6,44	6,44	3,43	3,41	3,41
Medie	6,45	6,40	6,45	3,41	3,39	3,41

Dezagregarea catalizatorului în vederea analizei s-a realizat pe cale uscată prin topire cu un amestec de $Na_2CO_3 — KNO_3 — K_2CO_3$ 3 : 1 : 3 și pe cale umedă cu HCl concentrat, H_2SO_4 1 : 1 și amestec de $H_3PO_4 — H_2SO_4$ 1 : 3. În toate probele, vanadiul s-a dozat prin titrare cu sulfat feros în prezența acidului N-fenilantranilic (22—24).

Extracția vanadiului din catalizator s-a efectuat cu

a) Apă ;

b) Hidroxid de sodiu (soluții 0,1—0,5—0,04—0,1—0,2—0,5—1 și 2 n);

c) Carbonat de sodiu (soluții 0,1—0,5—1 și 2 n).

Tabela 3

Rezultatele obținute la extracția vanadiului prin diferite metode

Nr.	Felul extracției	Concentrația	V_2O_5 %	V %
1	Extracția cu apă		3,6	1,90
2	Extracție cu NaON	0,1 n	6,4	3,40
		0,5 n	6,2	3,28
		1 n	6,4	3,40
		2 n	6,3	3,30
3	Extracție cu Na_2CO_3	0,1 n	0,5	0,26
		0,5 n	4,75	2,50
		1 n	6,2	3,28
		2 n	6,1	3,23

Procedeul cu apă a condus la o extracție parțială, 1,9% V față de 3,4% găsit în probă. La repetarea extracției, în soluția apoasă care rezultă, nu se mai găsește vanadiu (tabela 3).

Prin metoda de extracție cu NaOH, în soluție se regăsește practic întreaga cantitate de vanadiu (3,4%) existentă inițial în catalizator. Concentrația optimă de NaOH este 0,1 n (tabela 3).

Extracția cu Na_2CO_3 conduce la același rezultat ca extracția cu NaOH, dar concentrația optimă de Na_2CO_3 este 1 n (tabela 3).

Precipitarea vanadiului din extractele obținute s-a efectuat sub formă de metavanadat de amoniu, prin adăugarea unui exces de NH_4Cl și NH_3, la un pH=11. Recuperarea vanadiului prin precipitare este practic cantitativă față de cantitatea de vanadiu din extract (tabela 4).

Menționăm că la precipitarea din extractele cu NaOH, metavanadatul de amoniu obținut mai conține aproximativ 1% Al_2O_3, ceea ce însă

nu jenează la o eventuală regenerare a catalizatorului. Precipitatul de metavanadat de amoniu obţinut din extractele cu carbonat nu conţine decît urme de aluminiu.

Tabela 4

Cantitatea de vanadiu extrasă şi recuperată după precipitare cu NH_4Cl

Nr.	Cantitatea de vanadiu ce rezultă din analiză		Cantitatea de vanadiu extrasă cu NaON 0,1 n		Cantitatea de vanadiu recuperată prin precipitare	
	V_2O_5 %	V %	V_2O_5 %	V %	V_5O_2 %	V %
1	6,60	3,60	6,40	3,40	6,20	3,28
2	6,40	3,40	6,30	3,30	6,00	3,18
3	6,20	3,28	6,20	3,28	6,00	3,18
4	6,20	3,28	6,10	3,23	6,00	3,18
5	6,50	3,40	6,4	3,40	6,10	3,23
Medie	6 38	3,39	6,28	3,32	6,06	3,21

PARTEA EXPERIMENTALĂ

1. Analiza catalizatorului.

a) *Dezagregarea prin topire alcalină.* Într-un creuzet de porţelan se topeşte 1 g catalizator cu un amestec de $Na_2CO_3 - K_2CO_3 - KNO_3$ 3 : 3 : 1. SiO_2 se insolubilizează cu HCl concentrat, sulful se determină gravimetric ca $BaSO_4$, R_2O_3 ($Al_2O_3 + Fe_2O_3$) gravimetric prin precipitare cu amoniac, iar fierul se determină separat, manganometric. Vanadiul se determină ca V_2O_5 prin metoda volumetrică cu sare Mohr în prezenţă de acid N-fenilantranilic, iar umiditatea prin încălzire în etuvă la 105°C. Materiile volatile, sulful şi umiditatea, s-au verificat prin calcinare la 800°C în cuptorul electric.

b) *Dezagregare pe cale umedă.* Probe de cîte 1 g catalizator se încălzesc cu 50 ml H_2SO_4 1 : 1 sau 50 ml $H_3PO_4 - H_2SO_4$ 1 : 3 pe o baie de nisip la 180°C timp de 1 oră. După filtrare, vanadiul tetravalent din sulfatul de vanadil care se formează se oxidează la acid vanadic prin adăugarea unui exces de $KMnO_4$, iar excesul de $KMnO_4$ se distruge cu acid oxalic. Dozarea vanadiului şi a celorlalte elemente se face prin metodele curente (22—24). Ca o verificare a determinării conţinutului de vanadiu s-a efectuat topirea catalizatorului cu peroxid de sodiu (23), urmată de acidulare cu H_2SO_4 1 : 1. În toate cazurile, determinările vanadiului au condus la rezultate concordante (tabela 2).

2. **Extracția vanadiului.**

a) *Extracția cu apă.* Într-un balon cu fund rotund de 500 ml, prevăzut cu refrigerent ascendent, se transferă 10 g catalizator și 350 ml apă. Se refluxează 4 ore, după răcire se filtrează, filtratul se aduce într-un balon cotat de 500 ml, se acidulează puternic cu H_2SO_4 1 : 1, se aduce la semn și se determină vanadiul pe probe de cîte 100 ml (V_2O_5 : 3,6% ; V : 1,9%). La repetarea extracției, din nămolul rămas de la filtrare nu se pun în evidență nici urme de vanadiu.

b) *Extracția cu NaOH.* Într-un pahar de 800 ml se introduce 10 g catalizator și 500 ml NaOH 0,1 n. Se agită mecanic la temperatura camerei timp de 3 ore. Se lasă în repaus 24 ore pînă la depunerea precipitatului, se filtrează, filtratul se acidulează puternic cu H_2SO_4 1 : 1, se aduce la 1000 ml și se dozează vanadiul în porțiuni de cîte 100 ml (V_2O_5 : 6,4% ; V : 3,4%).

c) *Extracția cu Na_2CO_3.* Modul de lucru este același ca la extracția cu NaOH. Se utilizează o soluție de Na_2CO_3 1 n (V_2O_5 : 6,2% ; V : 3,3%).

3. **Precipitarea vanadiului sub formă de metavanadat de amoniu.**

a) *Precipitarea din soluțiile de NaOH.* Se concentrează 500 ml extract la 1/3, la soluția caldă (30—40°C) se adaugă NH_4OH concentrat pînă la miros slab amoniacal și se saturează soluția cu NH_4Cl aproximativ 15 g NH_4Cl solidă la 1 g catalizator). Se formează un precipitat alb voluminos. După o ședere de 24 ore precipitatul se filtrează prin hîrtie de filtru cu bandă albastră și se usucă.

b) *Precipitare din soluțiile de Na_2Co_3.* Se concentrează 500 ml extract la 1/3, se adaugă NaOH solid pînă la pH = 11 și se adaugă NH_4OH și NH_4Cl ca în metoda precedentă. Se depune un precipitat alb pulverulent care se filtrează după un repaus de 24 ore.

În acest caz precipitarea este incompletă și se repetă încă de 2 ori. În acest scop filtratul se concentrează de fiecare dată la 1/2 și se repetă operația de precipitare și filtrare.

4. **Dozarea vanadiului din precipitatul de NH_4VO_3.**

Precipitatul se dizolvă direct pe hîrtia de filtru cu NaOH 30% fierbinte, se spală hîrtia de filtru de 6—7 ori cu apă fierbinte, soluția obținută se concentrează la 200—300 ml, se acidulează puternic cu H_2SO_4 1 : 1 și se determină vanadiul folosind metoda obișnuită.

Concluzii.

Vanadiul se poate extrage aproape cantitativ din masele de contact sub formă de metavanadat de amoniu, cu soluții de NaOH 0,1 n sau Na_2CO_3 1 n. Metoda cu NaOH 0,1 n este mai simplă și mai expeditivă.

Pentru un eventual calcul economic se ține seama că din 100 g catalizator se extrage 3,4 g vanadiu care corespunde la 7,8 g NH_4VO_3 și în operațiile de extracție și precipitare se consumă (pentru 100 g catalizator) 20 g NaOH (sau 262 g Na_2CO_3), aproximativ 1500 g NH_4Cl și 10 ml NH_4OH concentrat.

Laboratorul de chimie generală
Institutul politehnic București

BIBLIOGRAFIE

1. *Seigo Kamiya:* Kógyó Kagaku Zasski. *59.* 1121. (1956); Chem. Abstr. *52.* 12704 f (1958).
2. Patent U.S. 2,807,518. sept. 1957; Chem. Abstr. *52.* 1034i (1958); *52.* 1001 f (1958).
3. Patent U.S. 2,824,2881. febr. 1958; Chem Abstr. *52.* 7576 g (1958).
4. *J. Benes, J. Sticha:* Chem Prumysl. *8.* 350 (1958).
5. *C. M. Cosman:* Vancoram Rev. *12.* 16 (1957). Chem. Zbl. 1958.II.7059.
6. Patent R.F.G. 1091547; O.S.I. vol. 9 e-i. 1961.
7. Brevet francez 1252965; O.S.I. vol. 30 j-k. 1961.
8. Patent francez 1250704; O.S.I. vol. 29 h-j. 1961.
9. Patent francez 12266281; O.S.I. vol. 44 f-j. 1961.
10. Patent R.F.G. 1086218; O.S.I. vol. 9 e-i. 1961.
11. Patent R.F.G. 1064929; O.S.I. vol. 13 g-h. 1961.
12. Patent R.F.G. 1071062; O.S.I. vol. 12 i. 1961.
13. Patent R.F.G. 952627; O.S.I. vol. 11 h-n. 1956/1957.
14. Patent R.F.G. 1064930; O.S.I. vol. 13 g-h. 1961.
15. Patent R.F.G. 1076648; O.S.I. vol. 13 g-h. 1961.
16. *V. Diaconescu, Colab.:* Bul. Inst. Polit. Iași 1. 53 (1955); Chem. Zbl. 9928 (1961).
17. *A. Kizky:* Rev. Chimie *5.* 345. (1954).
18. *I. G. Leschin, I. P. Muhelnov:* Rev. Chimie. *3.* 16 (1952).

19. *Z. Gropșianu, P. Tribunescu;* Rev. Chimie *4*. 3. (1953).

20. *V. Petrescu, S. Dumitrescu :* Bul. Inst. Polit. Iași *6*. 85. (1960).

21. *V. Olenici :* Proiect de diplomă, Fac. Chimie Ind., Inst. Polit. Buc. 1958.

22. *A. P. Groșev :* Analiza tehnică, pag. 305, Ed. Tehnică, 1955.

23. *A. M. Dimov :* Analiza tehnică a minereurilor și metalelor, pag. 147, 229, Ed. Tehnică, 1952.

24. *N. I. Block :* Analiza chimică calitativă, pag. 253, Ed. Tehnică, 1955.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC BUCUREȘTI
Tomul XXVI — 1964, Fascicola 1

C.Z. 536.62 : 547.398.6

METODĂ COLORIMETRICĂ PENTRU DOZAREA HIDRAZIDEI ACIDULUI IZONICOTINIC

GR. TEODORESCU și A. DINESCU

Nota 1.

Intr-o lucrare anterioară publicată în numărul 1 al Buletinului Institutului Politehnic București din 1956, am indicat că pentru dozarea cantitativă a hidrazidei acidului izonicotinic se cunosc mai multe metode bazate pe determinări volumetrice, gravimetrice și fizico-chimice (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27).

În lucrarea de față ne-am propus să determinăm această substanță colorimetric, bazați pe lucrarea publicată în revista de chimie nr. 1 din 1957 (28) cînd am folosit pentru dozarea aceleiași substanțe, ca reactiv sarea lui Reinecke $[Cr(SCN)_4(NH_3)_2]\ NH_4$.

Hidrazida acidului izonicotinic formează cu sarea Reinecke în mediu acid o combinație cristalină insolubilă, de culoare liliachie, insolubilă în exces de reactiv, combinarea avînd loc mol la mol:

$$[C_5H_4NCO\ NH\ NH_3]\ [Cr(SCN)_4(NH_3)_2]$$

După cum s-a arătat în lucrarea citată combinația formată este puțin solubilă în apă, relativ solubilă în alcool și în eter și foarte solubilă în acetonă, ceea ce ne-a permis să instituim, în lucrarea de față, o metodă colorimetrică de dozarea ei.

Modul de lucru. S-au luat cu o semi-microbiuretă probe dintr-o soluție 5‰ de substanță pură de hidrazidă a acidului izonicotinic, conținînd 0,000093—0,000139 g, s-au acidulat cu 2—3 picături de acid sulfuric 2 n, s-au diluat cu 20 ml apă distilată și s-a adăugat sub continuă agitare picătură cu picătură dintr-o soluție de reactiv 2% proaspăt preparat, astfel ca după terminarea precipitării, soluția să rămînă intens colorată în roșu. Pentru completa precipitare sînt suficienți 10 ml soluție reactiv, cînd se obține un precipitat de culoare liliachie după ecuația:

$$[C_5H_4N\ CO\ NH\ NH_3] + H_2SO_4 + [Cr(SCN)_4(NH_3)_2]\ NH_4 =$$
$$[C_5H_4NCO\ NH\ NH_3]\ [Cr(SCN)_4(NH_3)_2] + NH_4HSO_4$$

75 Q

După completa precipitare, se lasă să se depună, după care se filtrează imediat pe creuzet G_3. Se antrenează cantitativ precipitatul în creuzet, folosindu-se o soluție apoasă 0,1% reactiv de precipitare, proaspăt preparată. Sînt suficiente 3—4 spălări cu 2—4 ml soluție. În urmă, se spală precipitatul odată cu 0,5 ml apă distilată, după care se trage bine la trompă ștergîndu-se bine fundul creuzetului cu hîrtie de filtru.

Precipitatul se dizolvă direct pe creuzet cu acetonă prinzîndu-se cantitativ în balon cotat de 100 ml; se spală și se completează pînă la semn balonul cu apă distilată, după care se face colorimetrarea soluției astfel obținute la un fotocolorimetru tip. *B.* Lange.

În prealabil s-a trasat curba de etalonare a fotocolorimetrului.

Pentru aceasta s-a preparat o soluție din sarea Reinecke care să aibă concentrația $T = 0{,}0116$ g/ml solventul folosit fiind acetona.

Din această soluție s-au luat cantități corespunzătoare, cu o semimicrobiuretă și s-au diluat cu acetonă în baloane cotate, așa fel ca să se obțină soluții de concentrații $T = 0{,}00004$; 0,00006; 0,00008; 0,00016 g/ml sare Reinecke. După omogenizare s-a trecut la colorimetrarea acestor soluții și s-a trasat curba.

O dată curba de etalonare a aparatului stabilită, s-a făcut în aceeași zi și colorimetrarea soluțiilor de analizat și s-au obținut rezultatele următoare:

Substanță luată g/ml	Substanță găsită g/ml	Eroare %
0,000093	0,000092	— 2,15
0,000116	0,000112	— 3,44
0,000120	0,000117	— 2,50
0,000139	0,000115	— 2,96

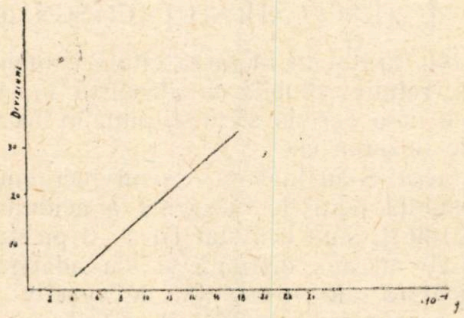


Fig. 1

Laboratorul de chimie anorganică și analitică

Institutul politehnic București

BIBLIOGRAFIE

[1] *Merz K. W.* și *Schirm M.:* Naturwissenschaften 39, 570—1, 1952.

[2] *Aloisio Margues Leal* și *Almanda Maria:* Alves Rev. port. farm. 2, 175—9, 1952.

[3] *Canbäck Theodor:* J. Pharmacool. 4, 407, 1952.

[4] *Castel P., Orzalesi H.* și *Dubois A.:* Trav. soc. Pharm. Montpellier, 12, 73—4, 1952.

[5] *Alicino F. J:* Pharm. Polsca 116—19, 1953.

[6] *Noronha da Costa Alv:* Rev. Brasil. farm. 33, 345—50, 1952.

[7] *Businelli M.* și *Rochi B.:* Farm. sci. e tec, 7, 153—60, 1952.

[8] *Narohna da Costa Al.:* Rew. Brasil. farm. 33, 343—50, 1952.

[9] *Alcino F. J.:* J. Am. Farm. Asoc. 41, 401—402, 1952.

[10] *Wojahn Hans:* Arzneimittel-Forsch., 2, 324—6, 1952.

[11] *Coppini Dino, Cameroni Ricardo* și *Monzani Agar:* Bicerca sci., 22, 1783—4, 1952.

[12] *Montesqui Fernando:* Farm. nueva — Madrid 18, 10—14, 1953.

[13] *Merz K. W* și *Schirm M.:* Naturwissenschaften, 39, 570, 1952.

[14] *Sanchez Juan:* Rev. Assoc, bioquim. Argentina (17) 324—6, 1952.

[15] *Dombo A. P.:* J. Pharm. and Pharmacolog. 5, 117—118. 1953.

[16] *Kattionis Al.:* Chim. Chronika Athens, Grece, 17, 78—80, 1952.

[17] *Struszyski M.* și *Bellen U.:* Prezemisl. Chem. 9, 1953.

[17] *Struszyski M.* și *Bellen U.:* Prezemisl. Chem. 9, 1953. I. Ch. O. Zahl. Analit.

[18] *Spacu P.* și *Teodorescu Gr.:* Bul. Institut Politehnic nr. 1, 1956.

[19] *Spacu P.* și *Teodorescu Gr.;* Bul. Inst. Polit. nr. 1, 1956.

[20] *Margues Aloisio Leal* și *Almanda Maria:* Alves Rev. port. Farm. 2, 175—9, 1952.

[21] *Ozawa Hikaru* și *Kijomoto Akiko:* J. Pharm. Soc. Japan, 72, 1059—60. 1952.

[22] *Coppini Dino, Cameroni Ric.* si *Monzani Aga:* Ricerca Sci. 22, 1783—4, 1952.

[23] *Harting Hans :* J. A. Pharm. Asoc. 42, 323—4, 1953.

[24] *Strikland R. D. și Hentel Wm. :* Am. J. Chim. Patol. 24, 988—92, 1954.

[25] *Tachi Isamu* și *Yoshinosuke :* Japan., Chem. 6, 490—1, 1952.

[26] *Varela Gregorio :* Anales real. Soc. espan. fiz. y quim. 48 B, 713—15, 1952.

[27] *Jacobs B. Morris :* J. Am. Pharm. Assoc. 42, 346—8, 1953.

[28] *Spacu P.* și *Teodorescu Gr. :* Rev. Chimie nr. 1, 1957.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC BUCUREȘTI
Tomul XXVI — 1964, Fascicola 1

CHIMIE FIZICĂ

CZ. 620.196.2 : 622

CONTRIBUȚII LA STUDIUL COROZIUNII UTILAJULUI MINIER ÎN EXPLOATĂRILE DE CĂRBUNI CARE CONȚIN SULF

I. RĂDUCANU ȘI T. FĂȘIE

Lucrarea de față și-a propus studiul unor aspecte ale coroziunii utilajului minier în exploatarea de cărbuni Cozla. Specific pentru această exploatare este conținutul ridicat de sulf (3—7%) în cărbunii extrași.

În subteran, la 100—120 m adîncime, cît și la suprafață se crează condiții favorabile de temperatură, presiune și umiditate pentru oxidarea sulfului și a compușilor săi (pirita în special) la oxizi, care în prezența umidității din abataj sau datorită apei care se scurge tot timpul din boltă, pot forma acid sulfuros, acid sulfuric și combinațiile acestora.

Circulația aerului în mină în spațiul exploatat, autoîncălzirea, pătrunderea curenților de apă cu viteză mare și capabili să spele produsele de oxidare, precum și peliculele de protecție care se pot forma în cazul prezenței șisturilor argiloase — toate acestea intensifică și accelerează descompunerea chimică a combinațiilor de sulf cu metalele. Cu cît cantitatea de minerale sulfuroase rămase în spațiul exploatat este mai mare și cu cît ele sînt spălate mai intens de apele subterane în prezența aerului, cu atît procesul formării acidului sulfuric liber și legat, decurge mai activ. De aceea la exploatarea straturilor de cărbune cu înclinare mare, apele de mină devin foarte agresive chiar la un conținut de sulf de circa 2,5%, în timp ce la exploatarea straturilor de cărbune subțiri și cu înclinare mică apele devin foarte agresive numai la un conținut de sulf mai mare de 3,5% [1].

Exploatarea minieră Cozla prezintă toate condițiile capabile să ducă la formarea apelor puternic agresive: conținut ridicat de sulf în cărbune, straturi cu înclinare mare și fragmentate, cantitate mare de apă al cărei debit crește mai ales toamna și primăvara.

Apele agresive de mină, cu aciditate ridicată și o cantitate mare de suspensii mecanice antrenate, acționează distrugător asupra instalațiilor metalice și de beton de mină. Distrugerea utilajelor, conducte de aer, conducte pentru evacuarea apei, pompe, șine de cale ferată pentru vagoneți etc., este atît de natură electrochimică cît și mecanică (eroziune, cavitație).

Eroziunea se constată în deosebi la conductele de refulare și la detaliile pompelor, care vin în contact cu apa în camera de înaltă presiune (în ultimele trepte de lucru ale pompei).

O acţiune de distrugere importantă o are fenomenul de cavitaţie, care are loc la o înălţime mare de aspiraţie a pompelor centrifuge. La apariţia fenomenelor de cavitaţie presiunea instantanee, în punctele loviturilor hidraulice, poate atinge cîteva sute de atmosfere, ceea ce duce la formarea de adînciturі microscopice în locurile de cea mai mică rezistenţă. Acţiunea cavitaţiei este şi mai intensă la evacuarea apelor puternic acide. De aceea este necesar ca pompele să fie confecţionate din materiale antiacide. (La exploatare o pompă din oţel carbon a fost scoasă din funcţionare după 30 de ore de lucru; atît rotorul cît şi paletele erau puternic distruse).

Examinarea vizuală a stării aparaturii arată că toate instalaţiile au un strat gros de produşi de coroziune (rugină), care se desprinde uşor, fiind mai tot timpul îmbibat cu apă din cauza umezelii din galerie (80—90%).

De-a lungul galeriilor s-a constatat distrugerea şinelor de vagoneţi, care aveau profil „I", pînă la perforarea mijlocului profilului. De regulă lîngă aceste şine se află şanţul de drenare a apelor agresive spre puţul de colectare. În anumite condiţii debitul acestor ape poate să crească şi să acopere şinele, favorizînd procesul de distrugere corosivă a acestora.

În scopul cercetării coroziunii oţelului ordinar în condiţiile exploatării miniere Cozla, s-au luat probe de ape corosive din patru puncte mai importante, ţinînd seama de agresivitatea lor, de debitul lor şi de faptul dacă aceste ape vin în contact cu un număr mare de utilaje metalice. (Punctele din care au fost luate apele, în februarie 1962, au fost: Mina Dej-jomp şi 166 S şi Mina Ida-jomp şi 408 înaintare). Proba metalică s-a luat deasemenea de la exploatare.

II. Partea experimentală.

Prin analiza chimică a acestor ape s-a pus în evidenţă prezenţa în ele a sărurilor de fier cît şi a acidului sulfuric liber; s-a măsurat conductivitatea şi *pH*-ul la trei temperaturi care caracterizează condiţiile din exploatare.

În tabela (1) sînt prezentate rezultatele acestor măsurători.

Tabela 1

Nr. crt.	Apa studiată	Conductivitatea electrolitică, $\Omega^{-1}\,cm^{-1}$			pH-ul			Concentraţia g/l
		temperatura °C			temperatura °C			
		15	20	25	15	20	25	
I	Dej — jomp	5,42	5,90	6,41	2,53	2,75	2,83	In medie:
II	Ida — jomp	4,60	5,15	5,75	3,32	3,33	3,35	Fe^{2+}: 0,14—0,18
III	Dej — 166 S	4,42	5,15	5,69	2,41	2,56	2,71	Fe^{3+}: 0,75 - 0,95
IV	Ida — 408	5,80	6,50	7,48	3,44	3,45	3,46	H_2SO_4 liber: 1,6 — 2,25

Aciditatea apelor de mină este influențată nu numai de concentrația acidului sulfuric liber, dar și de ionii de hidrogen care se obțin ca rezultat al hidrolizei sărurilor de fier.

Creșterea concentrației sulfatului feric $Fe_2(SO_4)_3$ în apele acide de mină provoacă o creștere considerabilă a coroziunii oțelului ordinar. La o concentrație de circa 0,5% acid sulfuric, oțelurile carbon obișnuite se distrug sub influența coroziunii cu pierderea de aproximativ 2,25 g/m²h. La un conținut de circa 1,3% $Fe_2(SO_4)_3$ în soluție (ceea ce are loc în apele agresive de mină), viteza coroziunii crește aproape de 5 ori [2].

Determinarea vitezei de coroziune a oțelului s-a făcut prin două metode: metoda electrochimică — trasarea simultană a curbelor de polarizație catodică și anodică — și metoda gravimetrică — prin pierderea de greutate a probei metalice supusă într-un agent corosiv într-un timp determinat [3] [4].

1. Determinarea vitezei de coroziune prin metoda electrochimică.

Se știe că trasarea curbelor de polarizație este o metodă des folosită în cercetarea proceselor de coroziune. Curbele de polarizație, care exprimă relația dintre potențialul care se stabilește la limita metal-soluție și densitatea de curent care traversează electrodul considerat, permit să se aprecieze cinetica proceselor electrodice. Comparîndu-se curbele de polarizație diferențială, la densități mari de curent, se poate aprecia calitativ rezistența la coroziune a unui metal în mediul dat. Prin extrapolarea curbelor de polarizație $\Delta E = f(i)$ pe axa absciselor, se pot determina curenții de autodizolvare a metalului [3].

Compunînd algebric curbele de polarizare catodică și anodică: $\Delta E = \Delta e_c - \Delta e_a$, V obținem curba de polarizație diferențială, care caracterizează polarizabilitatea totală a metalului.

Pentru a se determina rapid, prin măsurători electrochimice, rezistența metalelor la coroziune, s-a construit o celulă specială care permite să se măsoare direct și simultan, pe aceeași probă metalică, variația potențialului catodic și anodic funcție de densitatea de curent [3].

Proba metalică (12), care are forma unui disc, se montează cu ajutorul a două flanșe (9) între cele două celule (6). În aceste două celule se introduc electrozii de platin care sînt polarizați de la o sursă de curent continuu (1).

Pentru măsurarea potențialului de electrod la limita metal-soluție, pe ambele fețe ale probei s-au sudat în cele două celule două capilare (8) (umplute de asemenea cu soluția de studiat) care fac legătura cu doi electrozi de calomel, folosiți ca electrozi de comparație. În cele două celule se toarnă soluția de studiat. Curentul electric debitat de sursa de curent continuu (1) polarizează simultan, cu ajutorul electrozilor marginali de platină, suprafețele probei una anodic iar cealaltă catodic. Cu ajutorul celor două potențiometre (P_1 și P_2) se măsoară forțele electro-

motoare ale pilelor formate prin asocierea electrolizilor de calomel saturat cu cele două feţe ale probei polarizate.

Aparatul permite să se traseze pentru aceeaşi probă metalică, curbele de polarizaţie catodică $e_c = f(i)$ şi anodică $e_a = f(i)$.

In acest aparat spaţiul catodic este separat de cel anodic prin proba metalică evitînd astfel căderea de tensiune din electrolit. Ca urmare a

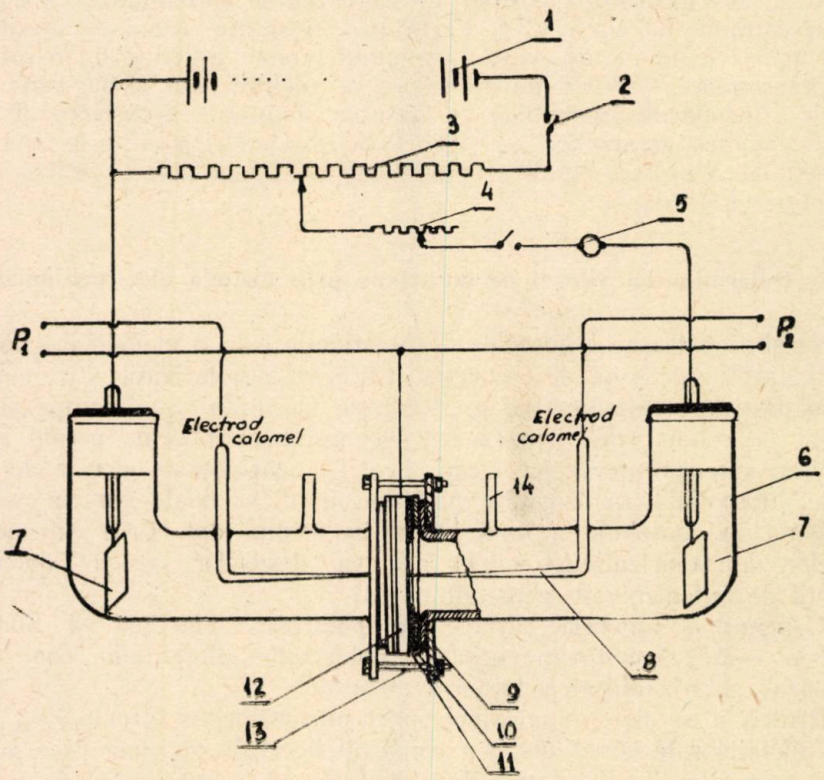
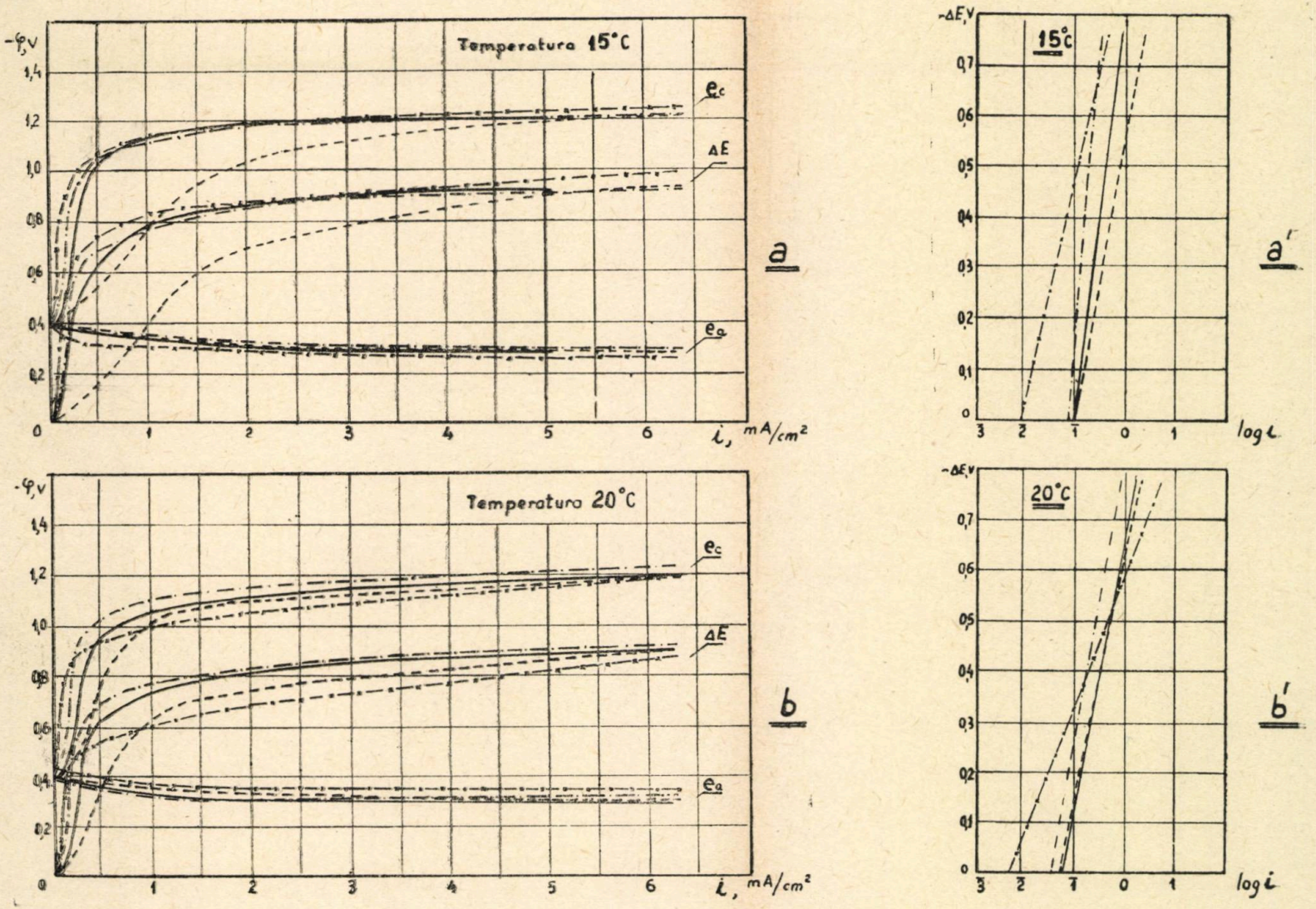


Fig. 1. Schema instalaţiei pentru trasarea simultană a curbelor de polarizaţie (catodică şi anodică) pentru aceeaşi probă metalică.

1 — baterie de acumulatoare ; 2 — întrerupător ; *3, 4* — reostate ; *5* — miliampermetru ; *6* — celulă de sticlă (d = 22 mm) ; 7 — electrozi de polarizare (platin) ; *8* — sifon electrolitic ; *9* — flanşă inelară din textolit ; *10* — garnitură de cauciuc ; *11* — inel pentru delimitarea suprafeţei probei ; *12* — proba de studiat (elecrod bipolar) ; *13* — şurub pentru etanşare (6 buc.) ; *14* — orificii pentru evacuarea gazelor ; P_1 şi P_2 — potenţiometre.

acestui fapt cîmpul electric se distribuie uniform în celulă şi deci densitatea de curent este constantă în orice punct al probei. Un avantaj al celulei este volumul mic de electrolit folosit cît şi posibilitatea studierii vitezei de coroziune pentru două metale diferite (plăci bimetalice) în acelaşi electrolit sau pentru acelaşi metal în electroliţi diferiţi.

S-au studiat patru ape acide de mină la două temperaturi (15° şi 20°C). S-a reprezentat grafic $\Delta E = f$ (log i), în coordonate semilogaritmice, pentru toate apele cercetate şi prin extrapolare pe axa absciselor pentru



Curbele de polarizație catodică și anodică ale OL-38 în ape acide de mină

Legendă:

———	Apa	Dej-jomp
—·—·—·—	„	Ida-jomp
— — — —	„	Dej-1665
—×—×—×	„	Ida-408

Fig. 2

$\Delta E = 0$ s-a determinat viteza de coroziune (autodizolvare) a metalului studiat: (fig. 2 *a*, *a'*, *b*, *b'*).

Viteza de coroziune, determinată prin această metodă rapidă se referă la perioada de început a procesului de coroziune cînd pelicula produșilor de coroziune este destul de mică.

Rezultatele experiențelor privind determinarea vitezei de coroziune prin această metodă sînt în concordanță cu cele obținute prin a doua metodă (cea gravimetrică).

Toate determinările s-au efectuat în aceleași condiții și anume:

— materialul probei OL-38 *) cu diametrul fețelor active: 20 mm.
— electrozii de polarizare Pt (30 × 14 mm).
— tensiunea sursei de polarizare = 30 V.
— celula a fost termostată $t = \pm 0{,}2°C$.
— densitatea de curent (*i*): 0,00318 ÷ 6,37 mA/cm².

Analiza chimică a oțelului studiat, ca medie a trei determinări *) indică următoarea compoziție (%):

Conținutul, %				
C	Mn	Si	P	S
0,18	0,56	0,29	0,033	0,016

Deasemenea prin analiza spectrală s-au mai pus în evidență următoarele elemente (în grame/tonă):

Cu	Cr	Sn	Mo	In
1000—3000	300—1000	100—300	1000—3000	10—30

Pe baza calculelor efectuate cu datele furnizate din reprezentările grafice ($\Delta E = f$ (log. i) s-au obținut următoarele valori ale vitezei de coroziune a OL-38 în apele de mină:

Tabela 2

	Apa studiată	Viteza de coroziune g/m²h		Viteza de coroziune mm/an	
		15°	20°	15°	20°
I	Dej — jomp	1,040	0,572	1,190	0,653
II	Ida — jomp	0,826	0,436	0,942	0,500
III	Dej — 166 S	1,160	0,655	1,320	0,749
IV	Ida — 408	0,104	0,050	0,120	0,060

Se constată că :

Viteza de coroziune are valoarea maximă (1,32 mm/an) pentru pH-ul cel mai mic ($pH = 2,41$ — apa Dej — 166 Sud).

— În apa Ida — 408 $pH = 3,44$ viteza de coroziune are valoarea cea mai mică (0,120 mm/an).

— Viteza de coroziune scade simțitor cu creșterea temperaturii.

— Se poate ușor deduce că viteza reală, cu care se distruge utilajul în mină, este mai mare cînd temperatura este mai scăzută (iarna de exemplu).

Din curbele $e_c = f(i)$ și $e_a = f(i)$ se poate ușor calcula ponderea factorului de control al coroziunii datorită polarizației, folosind expresiile [4] :

$$C_c = \frac{e_c^0 - e_e}{e_a - e_c} 100,\%$$

$$C_a = \frac{e_a - e_a^0}{e_a - e_c} 100,\%$$

în care :

C_c = controlul catodic, % e_c = potențial catodic final, V

C_a = controlul anodic, % e_a^0 = potențialul anodic inițial, V

e_c^0 = potențialul catodic inițial, V e_a = potențialul anodic final, V

Calculele efectuate au condus la următoarele valori pentru factorul de control.

Tabela 3

	Apa studiată	Controlul catodic, %		Controlul anodic, %	
		15°	20°	15°	20°
I	Dej — jomp	86	89	12	11
II	Ida — jomp	88,8	89,8	10,2	9,98
III	Dej — 166 Sud	88	89,5	12	10,5
IV	Ida — 408	84	85,2	16	14,8

— controlul catodic crește cu creșterea temperaturii

— controlul anodic scade cu creșterea temperaturii

— controlul catodic are valoarea maximă pentru pH acid

— controlul catodic este mult mai mare decît cel anodic : viteza procesului de coroziune este determinată de viteza procesului catodic (reducerea ionilor de hidrogen și a oxigenului).

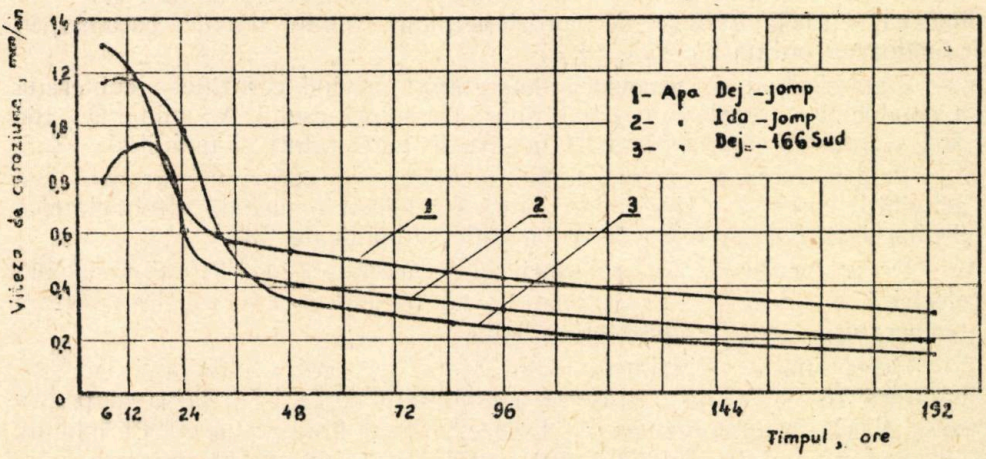
2. Determinarea vitezei de coroziune prin metoda gravimetrică cu ajutorul camerei de coroziune cu imersie alternată-circulară a probelor.

Instalațiile metalice (conducte, suporți pentru susținerea boltei, șine etc.) care de regulă sînt montate la sau în sol, pot intra parțial sau total în apele acide de mină, după care odată cu scurgerea acestora prin șanțuri, rămîn în aer. Această alternanță apă-aer depinde de debitul apelor, care firește, este variabil.

Pentru a reproduce în laborator pe cît posibil condițiile în care lucrează utilajul minier, s-a construit o cameră de coroziune care permite să se determine viteza de coroziune simultan pe un număr de 32 probe. [4].

Probele metalice pregătite special în prealabil, se montează cîte 2, pe niște tije suport care sînt înșurubate pe un disc care are un diametru de 480 mm.

După ce s-a realizat, cu ajutorul unui releu, temperatura spațiului de lucru $t \pm 0{,}2°C$, se pune în mișcare discul circular cu ajutorul unui motoraș electric, la o turație de 3 rot/oră.



Variația vitezei de coroziune în timp a oțelului (OL-38) în diverse ape acide de mină la temperatură constantă (20°C)

Fig. 3

Piesele în mișcare circulară intră în apa corosivă 5 minute, după care ies în aer 15 minute, cînd procesul de coroziune se petrece într-un film pelicular de soluție, reproducînd astfel situația reală din mină.

Deoarece apa subterană curge în lungul conductelor și șinelor reînoindu-se continuu, s-a prevăzut la această instalație posibilitatea circulației apelor corosive cu o viteză de aproximativ 2—3 m/min.

Viteza de coroziune ca valoare medie, pentru 4—6 probe metalice s-a exprimat fie prin pierderea de greutate raportate la unitatea de suprafață

și timp (g/m^2h), fie prin pierderea de grosime raportată la o durată de exploatare mai mare (mm/an).

În graficul din pagina anterioară se reprezintă variația vitezei de coroziune a OL-38 pentru trei ape corosive, în timp, la o temperatură constantă (20°C), fig. 3.

Din examinarea acestor curbe se constată că:

— după 6 ore de la începutul experienței, cea mai mare viteză de coroziune se obține în apa Dej-jomp (curba 1) și anume: 1,30 mm/an, pentru același interval de timp, pentru apa Ida-jomp (curba 2) se obține cea mai mică valoare a vitezei de coroziune (0,8 mm/an). Evident că acest lucru este strîns legat de compoziția chimică și de *pH*-ul acestei ape.

— după 48 ore, viteza de coroziune scade brusc de la valoarea 1,30 mm/an la aproximativ 0,55 mm/an ca urmare a formării unei pelicule de protecție de produși de coroziune; în continuare, procesul se desfășoară cu o viteză aproximativ constantă, determinată de viteza de difuzie a oxigenului în soluție cît și la suprafața metalului, difuzie care este frînată de pelicula de produși de coroziune formată.

— se constată că între 48 ore și 192 ore, viteza de coroziune scade foarte lent avînd tendința de a rămîne aproximativ constantă. În acest interval curbele (viteza de coroziune-timp) rămîn practic paralele în următoarea ordine $V_1 > V_2 > V_3$.

S-au efectuat de asemenea determinări privind coroziunea subterană a conductelor metalice în două tipuri de soluri (solul A: mina Dej-166 Sud și solul B: mina Ida-408) la diverse temperaturi și umidități.

Pentru compararea rezistenței metalelor la coroziune, în sol și a activității corosive a diferitelor soluri s-a folosit o metodă electrochimică pentru trasarea curbelor de polarizație simplificate [4].

De asemenea cu ajutorul unei sonde speciale ,s-a măsurat rezistența electrică a solurilor și s-a constatat că aceasta scade atît la creșterea temperaturii cît și a umidității solului.

Determinările experimentale au arătat că pentru intervalul de temperatură 15°—25°C, la o creștere a umidității de la 22% la 41%, pentru solul A, viteza de coroziune a OL-38 este de ordinul 0,134—0,067 mm/an, iar pentru solul B între 30—42% umiditate, 0,168—0,112 mm/an.

Concluzii finale.

1. Viteza de coroziune a OL-38 în apele acide de mină, depinde de o serie de factori printre care cei mai importanți citățm: conținutul de sulf în cărbune, porozitatea și poziția straturilor de cărbune, prezența Fe^{3+}, *pH* și de viteza de circulare a acestor ape care vin în contact cu instalația metalică.

2. În partea experimentală s-a efectuat analiza chimică a patru tipuri de ape, s-a măsurat conductivitatea și *pH*-ul acestor ape la diverse temperaturi.

3. Viteza de coroziune a fost determinată, pentru un număr mare de probe, prin două metode diferite (metoda electrochimică și metoda gravimetrică). Valorile obținute ne permit să tragem concluzia că utilizarea OL-38, ca material de construcție pentru conducte, șine etc. este neindicată.

Se propune folosirea în acest scop a materialelor rezistente la coroziune, ca OL inoxidabil (pentru conducte de refulare a apelor acide) și a conductelor din mase plastice acolo unde presiunea de lucru este redusă (Majoritatea conductelor lucrează la presiune redusă 2—3 atm., cu excepția celor de refulare, care ating 14—16 atm.; numărul acestora este însă mic 2 + 2 rezerve de lungime 120—130 m).

4. De asemenea s-au mai făcut determinări orientative, privind coroziunea OL-38 în două tipuri de sol la diverse umidități și s-a constatat că viteza de coroziune scade cu creșterea umidității solului.

Catedra de electrochimie
Institutul politehnic București

BIBLIOGRAFIE

[1] *A. V. Dokukin, L. S. Dokukina:* Vozniknovenie kislotnîh vod i borba s nimi. Ugletehizdat 1950 Moscva, 42, 70, 123.

[2] *A. V. Dokukin:* Combaterea coroziunii construcțiilor și utilajului în exploatările miniere. Gornîi jurnal, 1960, nr. 12, 31—35. (In „Coroziunea și protecția suprafețelor" — Caiet selectiv 1961, nr. 4, 177—182).

[3] *N. A. Bozin, M. M. Kurtepov:* Metodă electrochimică de evaluare rapidă a rezistenței la coroziune a metalelor Issledovania po korrozii metallov (1959) nr. 5, 54—59. In Coroziunea și protecția suprafețelor, IDT, 1961, nr. 6, 297—301.

[4] *N. D. Tomașov, N. I. Juk, V. A. Titov, M. A. Vedeneeva:* Laboratornîe rabotî po corrozii i zascite metallov. Metallurghizdat 1961, Moscva, 93, 109, 143.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC BUCUREȘTI
Tomul XXVI — 1964, Fascicola 1

REZISTENȚA MATERIALELOR

CZ. 620.175 : 621.311.1

STUDIUL EFORTURILOR UNITARE ÎN BARA DE SECȚIUNE DREPTUNGHIULARĂ SUPUSĂ LA TORSIUNE PRIN ANALOGIA CU REȚELELE ELECTRICE *

ȘTEFAN BRATU, NICOLAE ILIESCU

Problema răsucirii barelor de secțiune circulară și inelară este rezolvată în rezistența materialelor prin aplicarea ipotezei secțiunilor plane.

În cazul barelor cu secțiune necirculară (prismatice) experiența a arătat că ipoteza secțiunilor plane nu mai este valabilă și în acest caz problema se complică, ea fiind rezolvată cu ajutorul teoriei elasticității.

În acest caz se pornește de la o bară cu secțiunea de o formă oarecare (fig. 1) mărginită de un contur simplu conex și se determină o funcție Φ (y, z) a eforturilor unitare care satisface următoarele condiții :

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y} = \tau_{zx} \qquad \frac{\partial \Phi}{\partial z} = -\tau_{yx} . \tag{1}$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y} dy + \frac{\partial \Phi}{\partial z} dz = d\Phi = 0 . \tag{2}$$

(condiția de contur)

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = -2 G \theta . \tag{3}$$

(ecuația de deformații)

unde :

τ_{zx}, τ_{yx} — componentele efortului unitar τ pe cele două axe.
G — modulul de elasticitate transversal.
θ — răsucirea specifică.

Pentru forme de secțiuni simple stabilirea expresiei funcției eforturilor unitare Φ (y, z) cu ajutorul teoriei lui Saint-Venant se face ușor. În cazul contururilor neregulate sau multiplu conexe stabilirea expresiei analitice a funcției Φ este imposibilă. De aceea au fost imaginate o serie

* Lucrare comunicată la sesiunea științifică a cadrelor didactice din Inst. Polit. Buc., 22—23 februarie 1964.

de metode experimentale cum ar fi analogia cu membrană, analogia electrică etc.

În această lucrare, pentru determinarea funcției Φ (y, z) a eforturilor unitare, a fost folosită metoda analogiei cu rețele electrice, aplicînd calculul cu diferențe finite.

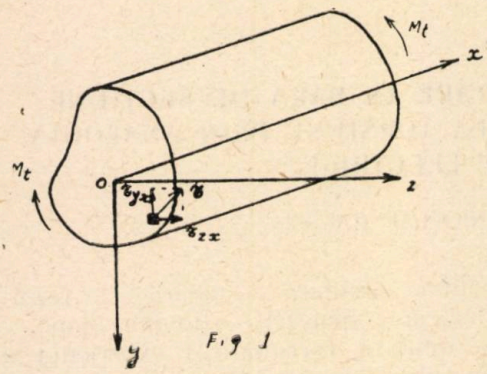


Fig 1

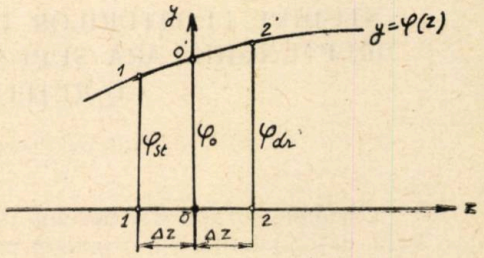


Fig 2

Noțiuni generale de calcul cu diferențe finite

Să considerăm curba $y = az^2 + bz + c = 0$ raportată la un sistem de axe yoz și două puncte 1 și 2 situate pe axa oz simetrice față de origină la distanța Δz. (fig. 2).

Ridicînd aceste puncte pe curbă se obțin punctele 1′, 0′ și 2′ de ordonate φ_{st}, φ_0 și φ_{dr}. Punînd condiția ca punctele 1′, 0′ și 2′ să fie situate pe curba $y = az^2 + bz + c = 0$ rezultă:

$$a(\Delta z)^2 + b(\Delta z) + c = \varphi_{dr}$$

$$c = \varphi_0$$

$$a(-\Delta z)^2 + b(-\Delta z) + c = \varphi_{st}$$

sau

$$a\Delta z^2 + b\Delta z + c = \varphi_{dr}$$

$$c = \varphi_0$$

$$a\Delta z^2 - b\Delta z + c = \varphi_{st}$$

de unde se rezolvă sistemul în raport cu a, b, c:

$$a = \frac{\varphi_{dr} - 2\varphi_0 + \varphi_{st}}{2\Delta z^2}$$

$$b = \frac{\varphi_{dr} - \varphi_{st}}{2\Delta z}$$

$$c = 0.$$

Derivata funcției într-un punct este:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} = 2az + b$$

pentru

$$z = 0 \quad \frac{d\varphi}{dz} = b = \frac{\varphi_{dr} - \varphi_{st}}{2\Delta z}$$

Derivata de ordinul II a funcției exprimată prin diferențe finite va fi:

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2} = 2a = \frac{\varphi_{dr} - 2\varphi_0 + \varphi_{st}}{\Delta x^2}$$

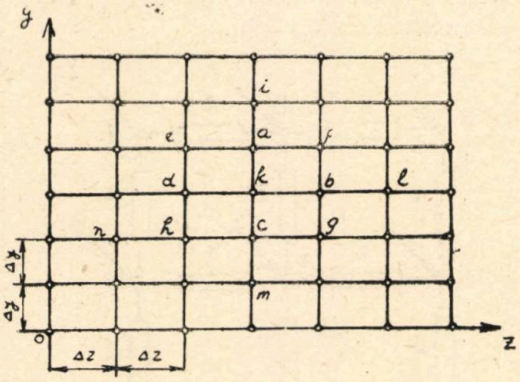


Fig 3

Să calculăm derivatele unei funcții în punctul k cu ajutorul diferențelor finite la o rețea cu parametrii Δz și Δy.

(4) $$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)_k = \frac{\varphi_b - \varphi_d}{2\Delta z}; \quad \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)_k = \frac{\varphi_a - \varphi_c}{2\Delta y} \tag{5}$$

$$\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}\right)_k = \frac{\varphi_b - 2\varphi_k + \varphi_d}{\Delta z^2} \tag{6}$$

$$\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}\right)_k = \frac{\varphi_a - 2\varphi_k + \varphi_c}{\Delta y^2} \tag{7}$$

Să scriem ecuația de deformații (3) cu ajutorul diferențelor finite:

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = -2G\theta.$$

$$\frac{\Phi_a - 2\Phi_k + \Phi_c}{\Delta y^2} + \frac{\Phi_b - 2\Phi_k + \Phi_d}{\Delta z^2} = -2G\theta.$$

Pentru cazul cînd $\Delta z = \Delta y = \Delta$. Vom avea:

$$\frac{\Phi_a + \Phi_b + \Phi_c + \Phi_d - 4\Phi_k}{\Delta^2} = -2G\theta.$$

sau:

$$\Phi_c + \Phi_b + \Phi_c + \Phi_d - 4\Phi_k = -{}_s G\theta\Delta^2. \tag{8}$$

Rețele cu rezistențe pentru rezolvarea pe cale analogică a problemei torsiunii

Rețeaua din fig 3 se poate înlocui cu o rețea formată din rezistențe. (fig. 4).

Între două noduri vecine se intercalează o rezistență R. În fiecare nod se introduce un curent de intensitate I.

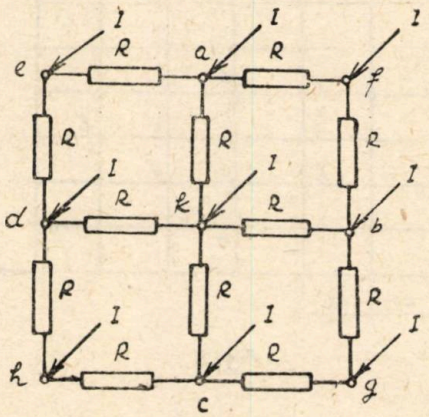


Fig. 4

Aplicînd legea I a lui Kirchhoff pentru nodul k se obține:

$$I_{ak} + I_{bk} + I_{ck} + I_{dk} = I_k.$$

sau ținînd seama de legea lui Ohm se obține

$$\frac{V_a - V_k}{R} + \frac{V_b - V_k}{R} + \frac{V_c - V_k}{R} + \frac{V_d - V_k}{R} = I_k.$$

$$V_a + V_b + V_c + V_d - 4V_k = RI_k. \tag{9}$$

Se vede că relația (9) este asemănătoare cu relația (8) și deci există o analogie între potențialele din nodurile rețelei cu rezistențe și funcția eforturilor unitare Φ.

Pentru ca ecuația (9) să reprezinte ecuația (8) se amplifică ambii membrii ai acestei ecuații cu un coeficient K.

$$K(V_a + V_b + V_c + V_d - 4V_k) = KRI_k. \tag{10}$$

Identificînd termenii celor două ecuații, rezultă

$$\Phi = KV \text{ și } RI_k K = -2G\theta\Delta^2.$$

de unde:

$$K = -\frac{2G0\Delta^2}{RI_k}$$

Condițiile de contur

Funcția de tensiune Φ pe contur are o valoare constantă. Valoarea constantei poate fi aleasă zero.

Insemnează că tensiunea în punctele de pe conturul modelului electric trebuie să fie nulă, situație care se obține scurtcircuitînd punctele și legîndu-le la masă.

Determinarea funcției de tensiune la secțiunea dreptunghiulară

Mai jos se determină funcția de tensiune Φ pentru o bară cu secțiune dreptunghiulară prin metoda analogiei cu rețelele electrice.

Pentru aceasta se alege o secțiune dreptunghiulară cu raportul laturilor 3/4, care se împarte într-o rețea cu 48 de ochiuri și 80 de noduri. Intrucît secțiunea este simetrică față de axele oy și oz este mai ușor să se studieze un sfert din ea (vezi fig. 5).

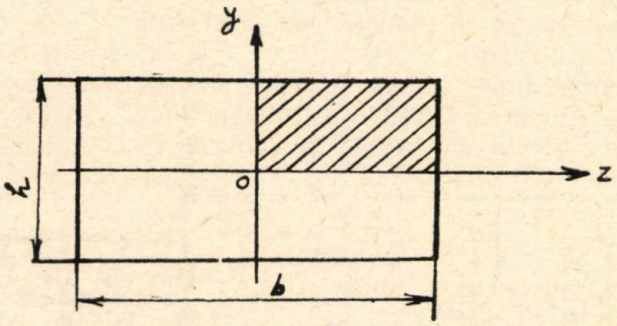


Fig. 5

In acest caz, rețeaua va avea 12 ochiuri și 20 de noduri. Intre două noduri s-au legat rezistențe $R = 100\ \Omega$. Deoarece cînd se alimentează nodurile 1, 4, 7, 11, 12, cu curentul I, fig. 6, în realitate o parte din acesta merge și în nodurile 2′, 5′, 8′, 8″ și 9′, pentru a verifica legea lui Kirchhoff în cazul sfertului de secțiune considerat, se alimentează nodurile 1, 4, 7, 11 și 12 cu curentul I/2 iar rezistențele de pe axele oy și oz se măresc de 2 ori $2R = 200\ \Omega$. Din aceleași motive, se alimentează nodul 10 cu $\frac{I}{4}$.

În funcție de valoarea rezistențelor s-a ales curentul de alimentare I=4 mA.

Pentru executarea măsurătorilor toate nodurile ar trebui alimentate simultan cu curenții respectivi și citite diferențele de potențial dintre

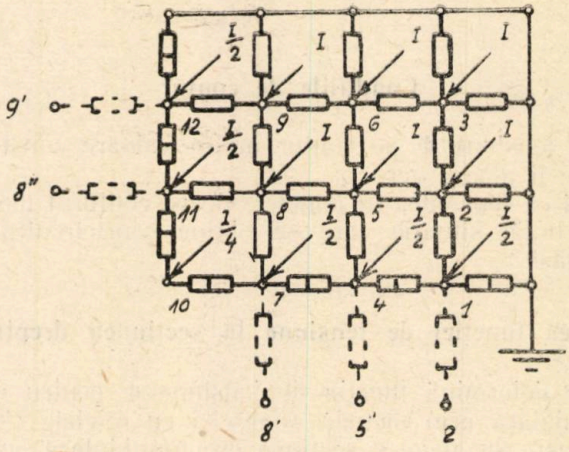


Fig 6

noduri. Aceasta ar necesita un număr însemnat de surse de alimentare, mai ales pentru rețelele cu număr mare de noduri.

De aceea s-a alimentat pe rînd fiecare nod în parte și s-au citit diferențele de potențial dintre noduri și contur, iar apoi s-au însumat, suprapunînd efectele. Montajul folosit este cel din fig. 7.

Rezultatele obținute sînt trecute în tabela nr. 1.

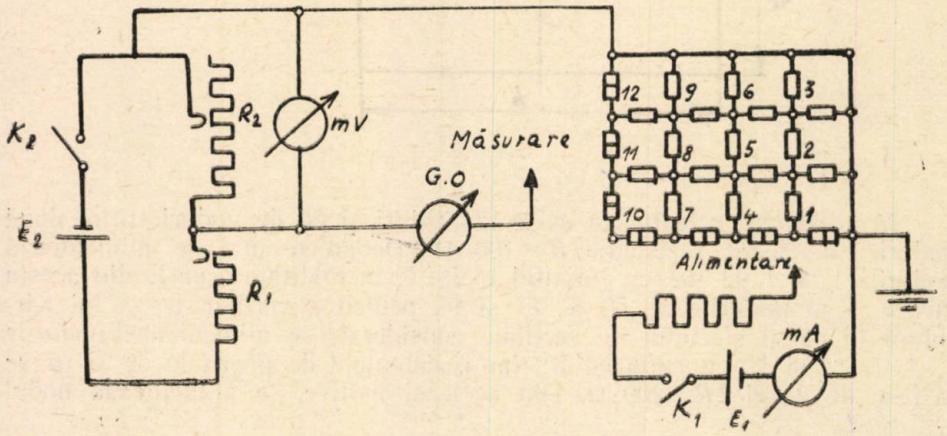


Fig. 7

Tabela 1

Nod nr.	Curent (m A)	Diferența de potențial (mv)											Observații
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	11	
1	2	141,00	48,30	16,20	66,00	40,00	17,40	39,80	30,85	15,40	32,80	26,90	13,90	
2	4	99,00	161,00	48,00	82,00	83,50	40,00	61,20	56,00	30,40	54,00	48,20	27,40	
3	4	33,00	48,00	125,0	36,20	40,2	45,2	31,00	30,20	23,80	28,20	26,30	17,50	
4	2	64,5	39,70	17,9	178,5	81,00	32,4	98,5	68,5	32,5	79,0	61,20	31,00	
5	4	80,5	82,50	39,0	159,0	208,5	79,5	136,0	130,5	67,5	124,0	111,0	59,8	
6	4	36,0	39,8	44,4	66,0	81,0	146,0	67,5	72,5	66,0	67,0	63,0	47,8	
7	2	38,2	39,9	15,8	96,0	66,5	32,0	216,0	109,5	47,2	161,0	108,5	50,5	
8	4	59,5	53,2	29,7	135,0	129,0	66,5	217,5	262,0	106,5	214,0	210,0	100,0	
9	4	31,0	29,7	22,6	66,0	69,0	66,0	97,5	110,0	170,0	102,5	108,5	112,5	
10	1	15,8	12,3	6,0	37,5	29,0	14,2	78,5	51,7	23,9	174,5	76,0	31,0	
11	2	26,1	23,2	12,8	60,0	54.5	30,2	108,5	106,0	52,3	159,5	207,0	79,0	
12	2	13,7	12,8	8,1	31,7	29,4	22,8	50,3	52,8	54,0	65,0	79,5	145,0	
Total		638,30	580,4	385,5	1013,9	911,6	592,2	1202,3	1080,55	689,5	1261,50	1126,10	721,4	

Pe baza datelor din tabelul 1 se poate face verificarea legii lui Kirchhoff în noduri. Rezultatele sînt concentrate în tabela 2.

Tabela 2

Nodul	Ecuația	Curentul calculat (mA)	Curentul introdus (mA)	Eroarea ε %
1	$2V_2 + V_4 - 4V_1 = RI$	1,9	2	5
2	$V_1 + V_3 + V_5 - 4V_2 = RI$	3,86	4	3,5
3	$V_2 + V_6 - 4V_3 = RI$	3,694	4	7,5
4	$V_1 + V_7 + 2V_5 - 4V_4 = RI$	1,95	2	2,5
5	$V_2 + V_4 + V_6 + V_8 - 4V_5 = RI$	3,8	4	5
6	$V_3 + V_5 + V_9 - 4V_6 = RI$	3,82	4	4,5
7	$V_4 + 2V_8 + V_{10} - 4V_7 = RI$	1,858	2	7,1
8	$V_5 + V_7 + V_9 + V_{11} - 4V_8 = RI$	3,927	4	1,8
9	$V_6 + V_8 + V_{12} - 4V_9 = RI$	3,638	4	9
10	$V_7 + V_{11} - 4V_{10} = RI$	0,97	1	3
11	$2V_8 + V_{10} + V_{12} - 4V_{11} = RI$	1,8	2	10
12	$2V_9 + V_{11} - 4V_{12} = RI$	1,9	2	5

$$I_{med} = 3{,}78\ mA$$

$$\varepsilon_{med} = 5{,}3\%$$

Determinarea expresiei funcției eforturilor unitare Φ și a eforturilor unitare τ_{zx} și τ_{yx}

Cu ajutorul măsurătorilor făcute în rețea, au fost determinate potențialele electrice ale tuturor nodurilor față de contur, deci valoarea funcției Φ în fiecare nod, știind că :

$$\Phi = kV$$

Pentru determinarea expresiei funcției Φ, se folosește formula lui Newton :

$$y = y_0 + x\frac{(\Delta_1)_0}{1!\,\Delta} + x(x-\Delta)\frac{(\Delta^2)_0}{2!\,\Delta^2} + x(x-\Delta)(x-2\Delta)\frac{(\Delta_3)_0}{3!\,\Delta^3} + \cdots$$

unde

$(\Delta_1)_0$, $(\Delta_2)_0$, $(\Delta_3)_0$, $(\Delta_4)_0$ . . . sînt diferențele finite de ordinul 1, 2, 3, 4, în origină.

Δ — distanța între două noduri vecine.

sau

$$\Phi = K\left[V_0 + z\frac{(\Delta_1)_0}{1!\,\Delta} + z(z-\Delta)\frac{(\Delta_2)_0}{2!\,\Delta^2} + z(z-\Delta)(z-2\Delta)\frac{(\Delta_3)_0}{3!\,\Delta^3}\cdots\right]$$

Cunoscînd expresia funcției Φ a eforturilor unitare, se pot determina eforturile unitare τ_{zx} și τ_{yx} cu ajutorul relației (1).

Variația eforturilor unitare de-a lungul axei oz

Diferențele finite de ordinul 1, 2, 3, 4 în origină sînt calculate în tabelul următor.

Tabela 3

Nodul	0	1	4	7	10
V_n	0	638,3	1013,9	1202,3	1261,50
$(\Delta_1)_n = V_{n+1} - V_n$	638,30	375,60	188,40	59,20	—
$(\Delta_2)_n = (\Delta_1)_{n+1} - (\Delta_1)_n$	−262,70	−187,2	−129,2	—	—
$(\Delta_3)_n = (\Delta_2)_{n+1} - (\Delta_2)_n$	75,5	58,0	—	—	—
$(\Delta_4)_n = (\Delta_3)_{n+1} - (\Delta_3)_n$	− 17,5	—	—	—	—

$$\Phi = k\left[z\frac{638,3}{\Delta} - z(z-\Delta)\frac{262,7}{2\Delta^2} + z(z-\Delta)(z-2\Delta)\frac{75,5}{6\Delta^3} - z(z-\Delta)(z-2\Delta)(z-3\Delta)\frac{17,5}{24\Delta^4}\right]$$

$$\tau_{yx} = -\frac{\partial\Phi}{\partial z} = -k\left[\frac{638,3}{\Delta} - (2z-\Delta)\frac{267,2}{2\Delta^2} + (3z^2 - 6z\Delta + 2\Delta^2)\frac{75,5}{6\Delta^3} - (4z^3 - 18z^2\Delta + 22z\Delta^2 - 6\Delta^3)\frac{17,5}{24\Delta^4}\right]$$

Eforturile unitare în nodurile 0, 1, 4, 7, 10 sînt calculate în tabela 4.

Tabela 4

Nodul	0	1	4	7	10
z	0	Δ	2Δ	3Δ	4Δ
τ_{xy}	$-799,18\frac{k}{\Delta}$	$-492,92\frac{k}{\Delta}$	$-270,86\frac{k}{\Delta}$	$-114,84\frac{k}{\Delta}$	$-9,56\frac{k}{\Delta}$

Variația eforturilor unitare de-a lungul axei Oy;

Tabela 5

Nodul	0	12	11	10
V_n	0	721,4	1126,1	1261,5
$(\Delta_1)_n$	721,4	404,7	135,4	—
$(\Delta_2)_n$	— 316,7	— 269,3	—	—
$(\Delta_3)_n$	47,4	—	—	—
$(\Delta_4)_n$	—	—	—	—

$$\Phi = k\left[y\frac{721,4}{\Delta} - y\,(y-\Delta)\,\frac{316,7}{2\Delta^2} + y\,(y-\Delta)(y-2\Delta)\,\frac{47,4}{6\Delta^3}\right]$$

$$\tau_{zx} = \frac{\partial\Phi}{\partial y} = k\left[\frac{721,4}{\Delta} - (2y-\Delta)\,\frac{316,7}{2\Delta^2} + (3y^2 - 6y\Delta + 2\Delta^2)\,\frac{47,4}{6\Delta^3}\right].$$

Tabela 6

Nodul	0	12	11	10
y	0	Δ	2Δ	3Δ
τ_{zy}	$895,55\,\frac{k}{\Delta}$	$555,15\,\frac{k}{\Delta}$	$262,15\,\frac{k}{\Delta}$	$16,55\,\frac{k}{\Delta}$

Variația eforturilor unitare în interiorul secțiunii

Tabela 7

Nodul	0	3	2	1
V_n	0	385,5	580,4	638,30
$(\Delta_1)_n$	385,5	194,9	57,9	—
$(\Delta_2)_n$	—190,6	—137,0	—	—
$(\Delta_3)_n$	53,6	—	—	—
$(\Delta_4)_n$	—	—	—	—

$$\Phi = k\left[y\frac{385,5}{\Delta} - y(y-\Delta)\frac{190,6}{2\Delta^2} + y(y-\Delta)(y-2\Delta)\frac{53,6}{6\Delta^3}\right].$$

$$\tau_{zx} = \frac{\partial\Phi}{\partial y} = k\left[\frac{385.5}{\Delta} - (2y-\Delta)\frac{190,6}{2\Delta^2} + (3y^2 - 6y\Delta + 2\Delta^2)\frac{53,6}{6\Delta^3}\right].$$

Tabela 8

Nodul	0	3	2	1
y	0	Δ	2Δ	3Δ
τ_{zx}	$498,66\frac{k}{\Delta}$	$281,27\frac{k}{\Delta}$	$117,46\frac{k}{\Delta}$	$7,2\frac{k}{\Delta}$

Tabela 9

Nodul	0	6	5	4
V_n	0	592,2	911,6	1013,9
$(\Delta_1)_n$	592,2	319,4	102,3	—
$(\Delta_2)_n$	−272,8	−217,1	—	—
$(\Delta_3)_n$	55,7	—	—	—

$$\Phi = k\left[y\frac{592,2}{\Delta} - y(y-\Delta)\frac{272,8}{2\Delta^2} + y(y-\Delta)(y-2\Delta)\frac{55,7}{6\Delta^3}\right].$$

$$\tau_{zx} - \frac{\partial\Phi}{\partial y} = k\left[\frac{592,2}{\Delta} - (2y-\Delta)\frac{272,8}{2\Delta^2} + (3y^2 - 6y\Delta + 2\Delta^2)\frac{55,7}{6\Delta^3}\right].$$

Tabela 10

Nodul	0	6	5	4
y	0	Δ	2Δ	3Δ
τ_{zx}	$747,15\frac{k}{\Delta}$	$446,52\frac{k}{\Delta}$	$201,56\frac{k}{\Delta}$	$12,81\frac{k}{\Delta}$

Tabela 11

Nodul	0	9	8	7
V_n	0	689,5	1080,55	1202.3
$(\Delta_1)_n$	689,5	391,05	121,75	—
$(\Delta_2)_n$	— 298,45	— 269,30	—	—
$(\Delta_3)_n$	29,15	—	—	—

$$\Phi = k\left[y\,\frac{689,5}{\Delta} - y\,(y-\Delta)\,\frac{298,45}{2\Delta^2} + y\,(y-\Delta)\,(y-2\Delta)\,\frac{29,15}{6\Delta^3}\right]$$

$$\tau_{zx} = \frac{\partial\Phi}{\partial y} = k\left[\frac{689,5}{\Delta} - (2y-\Delta)\,\frac{298,45}{2\Delta^2} + (3y^2 - 6y\Delta + 2\Delta^2)\,\frac{29,15}{6\Delta^3}\right]$$

Tabela 12

Nodul	0	9	8	7
y	0	Δ	2Δ	3Δ
τ_{zx}	$848,43\,\frac{k}{\Delta}$	$535,43\,\frac{k}{\Delta}$	$251,54\,\frac{k}{\Delta}$	$-3,18\,\frac{k}{\Delta}$

Tabela 13

Nodul	0	2	5	8	11
V_n	0	580,4	911,6	1080,55	1126,1
$(\Delta_1)_n$	580,4	331,2	168,95	45,55	—
$(\Delta_2)_n$	— 249,2	— 162,25	— 123,4	—	—
$(\Delta_3)_n$	86,95	38,85	—	—	—
$(\Delta_4)_n$	— 48,1	—	—	—	—

$$\Phi = k\left[z\,\frac{580,4}{\Delta} - z\,(z-\Delta)\,\frac{249,2}{2\Delta^2} + z\,(z-\Delta)\,(z-2\Delta)\,\frac{86,95}{6\Delta^3} - \right.$$

$$\left. - z\,(z-\Delta)\,(z-2\Delta)\,(z-3\Delta)\,\frac{48,1}{24\Delta^4}\right].$$

$$\tau_{yx} = -\frac{\partial \Phi}{\partial z} = -k\left[\frac{580,4}{\Delta} - (2z-\Delta)\frac{249,2}{2\Delta^2} + (3z^2 - 6z\Delta + 2\Delta^2)\frac{86,95}{6\Delta^3} - \right.$$
$$\left. - (4z^3 - 18z^2\Delta + 22z\Delta^2 - 6\Delta^3)\frac{48,1}{24\Delta^4}\right].$$

Tabela 14

Nodul	0	2	5	8	11
z	0	Δ	2Δ	3Δ	4Δ
τ_{yx}	$-746\frac{k}{\Delta}$	$-437,31\frac{k}{\Delta}$	$-239,56\frac{k}{\Delta}$	$-104,8\frac{k}{\Delta}$	$+15,06\frac{k}{\Delta}$

Tabela 15

Nodul	0	3	6	9	12
V_n	0	385,5	592,2	689,5	721,4
$(\Delta_1)_n$	385,5	206,7	97,3	31,9	—
$(\Delta_2)_n$	— 178,8	— 109,4	— 65,4	—	—
$(\Delta_3)_n$	69,4	44,0	—	—	—
$(\Delta_4)_n$	— 25,4	—	—	—	—

$$\Phi = k\left[z\frac{385,5}{\Delta} - z(z-\Delta)\frac{178,8}{2\Delta^2} + z(z-\Delta)(z-2\Delta)\frac{69,4}{6\Delta^3} - \right.$$
$$\left. - z(z-\Delta)(z-2\Delta)(z-3\Delta)\frac{25,4}{24\Delta^4}\right].$$

$$\tau_{yx} = -\frac{\partial \Phi}{\partial z} = -k\left[\frac{335,5}{\Delta} - (z-2\Delta)\frac{178,8}{2\Delta^2} + (3z^2 - 6z\Delta + 2\Delta^2)\frac{69,4}{6\Delta^3} - \right.$$
$$\left. - (4z^3 - 18z^2\Delta + 22z\Delta^2 - 6\Delta^3)\frac{25,4}{24\Delta^4}\right].$$

Tabela 16

Nodul	0	3	6	9	12
z	0	Δ	2Δ	3Δ	4Δ
τ_{yx}	$-504,38\frac{k}{\Delta}$	$-282,44\frac{k}{\Delta}$	$-142,54\frac{k}{\Delta}$	$-59,38\frac{k}{\Delta}$	$-7,51\frac{k}{\Delta}$

Comparație cu metoda Saint-Venart

Cunoscîndu-se eforturile unitare din fiecare nod, se poate trasa diagrama de variație a eforturilor unitare de-a lungul celor două axe și celor două laturi (fig. 8).

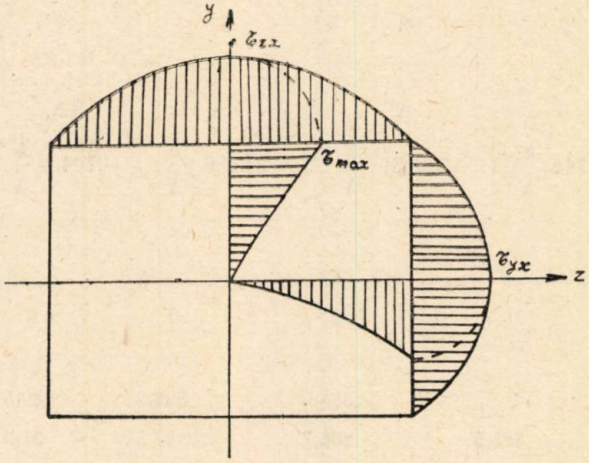


Fig 8

Se vede că într-o secțiune dreptunghiulară eforturile unitare, calculate prin metoda analogiei cu rețelele electrice, variază după aceeași lege cu cele calculate de Saint-Venant prin dezvoltare cu ajutorul seriilor trigonometrice.

Se calculează prin cele două metode efortul unitar τ_{zx} în nodurile de pe axa oy.

Se înlocuiește y și z în formula (11).

$$\tau_{zx} = \frac{\partial \Phi}{\partial y} = -\frac{8 G \theta b}{\pi^2}\left[\frac{sh\frac{\pi y}{b}}{eh\frac{\pi h}{2b}}\cos\frac{\pi z}{b} - \frac{1}{9}\frac{sh\frac{3\pi y}{b}}{ch\frac{3\pi h}{2b}}\cos\frac{3\pi z}{b} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{25}\frac{sh\frac{5\pi y}{b}}{ch\frac{5\pi h}{2b}}\cos\frac{5\pi z}{b}\right]. \qquad (11)$$

și se obțin eforturile unitare τ_{zx} în fiecare nod, prin metoda Saint Venant.

Se înlocuiește, apoi, constanta K în expresiile lui τ_{zx} din tabela 6 (introducînd în calcule valoarea medie a curenților din noduri) și se obțin eforturile în fiecare nod, prin metoda analogiei cu rețelele electrice.

Rezultatele sînt trecute în tabela 17.

Tabela 17

Nodul	0	12	11	10
τ_{zx} (metoda analogiei)	$-0{,}594\ G\theta b$	$-0{,}377\ G\theta b$	$-0{,}176\ G\theta b$	$-0{,}021\ G\theta b$
τ_{zx} (metoda Saint-Venant)	$-0{,}611\ G\theta b$	$-0{,}372\ G\theta b$	$-0{,}176\ G\theta b$	0
Eroarea ε	2,7%	0,8%	0%	—

Din tabela 17 se constată că eforturile unitare τ_{zx} și τ_{yx} (pentru τ_{yx} nu s-a mai făcut calculul), calculate prin cele două metode sînt practic egale, eroarea fiind neînsemnată pentru calculele inginerești.

Se poate spune, deci, că metoda analogiei cu rețelele electrice poate da rezultate suficient de exacte pentru necesitățile inginerești.

Catedra de rezistența materialelor
Institutul politehnic București

BIBLIOGRAFIE

[1] *И. М. Тетельбаум*, Электрическое моделирование, государственное издательство физико-математической литературы, Москва 1959.

[2] *Gh. Buzdugan*, Rezistența materialelor, vol. II, editura tehnică, București, 1957.

[3] *A. Beleș* și *R. Voinea*, Rezistența materialelor, vol. II, editura tehnică, București, 1958.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC BUCUREȘTI
Tomul XXVI — 1964, Fascicola 1

CONSTRUCȚIA DE MAȘINI

CZ. 547.298.1 : 621—233

ASPECTE ALE COMPORTĂRII POLIAMIDEI CA BUCȘE PENTRU LAGĂRE CU ALUNECARE *

GHEORGHE MANEA, MUSTAFA R. MUSTAFA, DUMITRU TUDOR, GHEORGHE VASILCA

1. Precizarea problemei

Primele încercări efectuate în laborator cu bucșe din poliamidă indigenă au dus la rezultate promițătoare, în sensul că s-au obținut unele performanțe în ceea ce privește presiunile de contact și „produsul pv" apropiate de valori citate în literatura de specialitate.

Strînsa interdependență dintre compoziția chimică, structură și proprietățile fizico-mecanice ale materialelor plastice, efectul deosebit al tehnologiei de fabricație a piesei din asemenea materiale asupra calităților ei reprezintă elemente hotărîtoare pentru calitățile funcționale ale cuzineților.

În cercetările care formează obiectul lucrării de față este scoasă în evidență influența parametrilor geometrici, a jocului relativ, a naturii lubrifiantului, precum și a tehnologiei de fabricație — de care este dependentă în mod hotărîtor structura semifabricatului — asupra comportării bucșelor din material plastic, în funcționare.

Totodată au fost analizate și puse în lumină anumite aspecte legate de regimul termic, și fixate concluzii valabile pentru materiale plastice.

Lucrările au fost efectuate cu bucșe de poliamidă de Săvinești, obținute prin două metode tehnologice :

a) prin centrifugare, metodă elaborată de Icechim (cat. A) ;

b) prin injectare în matriță, după un regim tehnologic în stadiu de încercare (cat. B).

Programul încercărilor făcute sub conducerea noastră, în paralel în laboratorul Institutului de Mecanică Aplicată al Academiei R.P.R. și în laboratorul Catedrei de Organe de Mașini I.P.B., a cuprins :

a) condițiile de rodaj ;

---

* Lucrare comunicată la sesiunea științifică a cadrelor didactice din Inst. Polit. Buc., 22—23 februarie 1964.

b) comportarea la turație constantă și încărcare variabilă;
c) comportarea la încărcare constantă și turație variabilă;
d) variația temperaturii în funcție de presiune;
e) variația debitului de lubrifiant în funcție de presiune;
f) variația presiunii în funcție de viteză,

pentru diferite rapoarte $\frac{l}{d}$ și diferite jocuri relative Ψ.

2. Condiții de încercare

Elemente geometrice: Bucșe cu diametrul interior/diametrul exterior 36/48 mm (I.M.A.), respectiv 40/50 mm (I.P.B.) și rapoarte $\frac{l}{d}=0{,}7$; 0,65; 0,5. Limita maximă a acestui raport a fost fixată de dimensiunile semifabricatului de care s-a dispus.

— Jocurile relative: $\psi=3{,}5$; 4,0; 4,75; 5,0; 5,6‰, jocurile mici nefiind indicate în cazul materialelor plastice, așa cum au arătat încercările anterioare.

— Arbore din OLC 15 cementat, călit, rectificat HB=550 (I.M.A.); OLC 45 îmbunătățit (I.P.B.).

— Microgeometria suprafeței active a bucșei, cea obținută prin strunjire fină cu avans de 0,03—0,05 mm/rotație.

— Sarcină statică acționînd vertical. Unele particularități constructive ale mașinii I.P.B. au limitat încărcarea la 50 kgf/cm^2.

— Viteza variabilă în trepte.

— Alimentarea cu ulei 305 Stas, în circuit închis, sub presiune; orificiul de alimentare circular, cu diametrul de 4,5 mm (5 mm) situat la mijlocul lățimii lagărului, în zona descărcată, opus direcției sarcinii. În laboratorul I.P.B. s-a folosit ca lubrifiant și unsoarea consistentă.

— Debitul uleiului măsurat cu un cilindru gradat, prin colectarea uleiului ieșit din lagăr.

— Temperatura măsurată în zona încărcată, într-un orificiu practicat în cuzinet, la distanță de aproximativ 2 mm de suprafața activă. În laboratorul I.P.B. a fost urmărită și temperatura uleiului direct la ieșirea din cuzinet. După cum este cunoscut, în cazul debitelor active, această temperatură este apropiată de temperatura medie a filmului de ulei din lagăr.

— Înainte de finisarea la dimensiunea definitivă, bucșele au fost menținute în ulei 305 Stas, la temperatura de 120°, timp de 10 ore.

3. Rezultatele încercărilor

3.1. *Bucșe realizate prin centrifugare.*

Rodajul bucșei s-a făcut timp de 8 ore, numai sub greutatea proprie a pieselor dispozitivului, deci practic fără sarcină importantă.

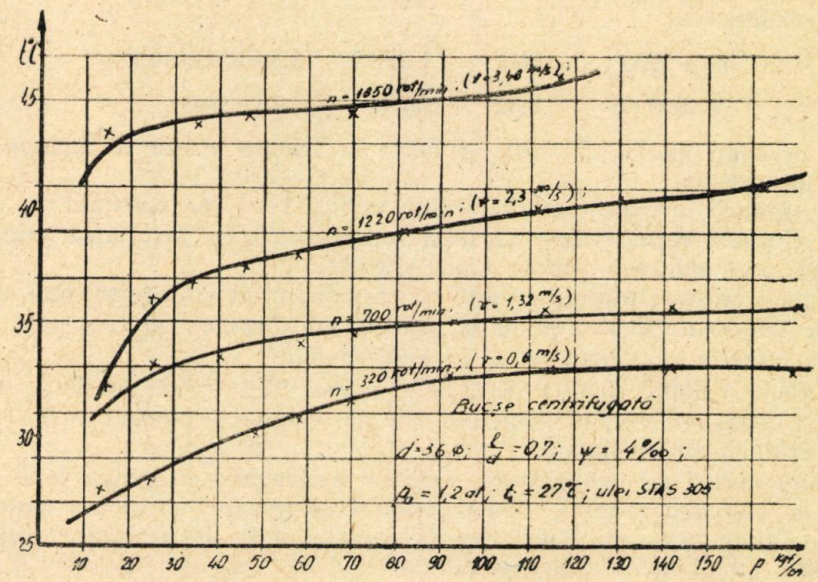

n = 1850 rot/min ; (v = 3,40 m/s) ;
n = 1220 rot/min ; (v = 2,3 m/s) ;
n = 700 rot/min ; (v = 1,32 m/s)
n = 320 rot/min ; (v = 0,6 m/s)
Bucşe centrifugată
d = 36 ϕ ; l/d = 0,7 ; ψ = 4‰ ;
p = 1,2 at ; t = 27°C ; ulei STAS 305
f °C
p kgf/cm²

Fig. 1

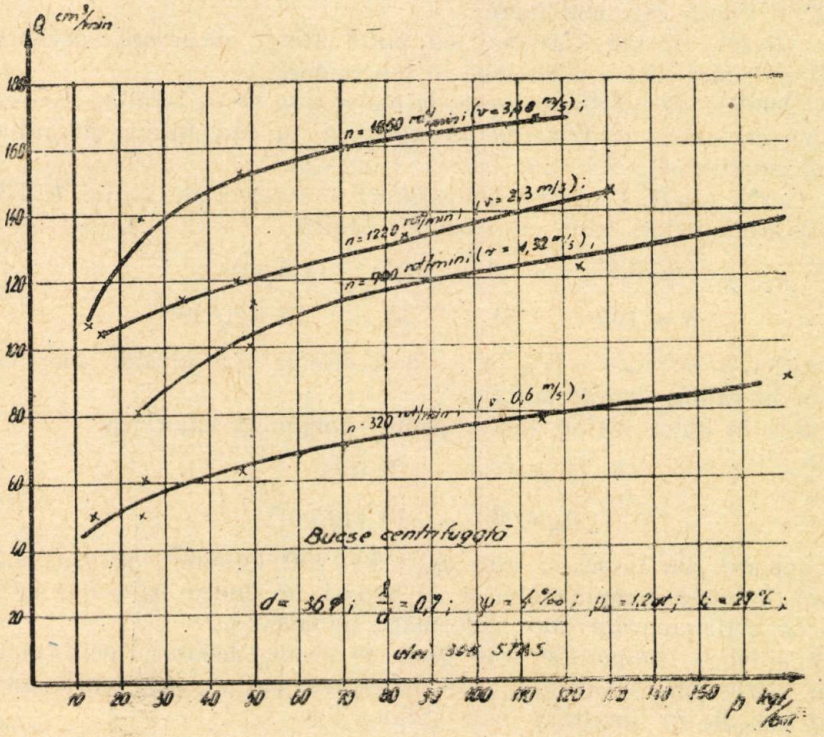

Q cm³/min
n = 1850 rot/min ; (v = 3,40 m/s) ;
n = 1220 rot/min ; (v = 2,3 m/s) ;
n = 700 rot/min ; (v = 1,32 m/s) ,
n = 320 rot/min ; (v = 0,6 m/s) ,
Bucşe centrifugată
d = 36 ϕ ; l/d = 0,7 ; ψ = 4‰ ; p = 1,2 at ; t = 27°C ;
ulei 36 S STAS
p kgf/cm²

Fig. 2

Încercările s-au efectuat la următoarele viteze de rotație, respectiv viteze periferice:

$n =$	320	700	1 220	1 850 rot/min.
$v =$	0,60	1,32	2,30	3,48 m/s

și presiuni de la 15—170 kgf/cm^2; la fiecare viteză încărcarea s-a aplicat progresiv.

Rezultatele încercărilor sînt redate în fig. 1—4. Se constată:

a) Curbele reprezentînd variația temperaturii cu presiunea (fig. 1) au alură asemănătoare pentru toate vitezele.

După o creștere inițială cu atît mai rapidă cu cît viteza este mai mare, *variația temperaturii devine lentă pentru un domeniu de presiune mai mare la vitezele mici, mai redus la vitezele mari.*

Curbele valabile pentru $n = 1220$ rot/min și $n = 1850$ rot/min. arată că, după depășirea acestui domeniu, este de așteptat o creștere mai rapidă a temperaturii cu presiunea.

Alura curbei de temperatură puternic ascendentă în prima fază este legată de valoarea ridicată a coeficientului de frecare; creșterea temperaturii în ultima fază este determinantă pentru limita de încărcare, influențată, între altele, și de dilatarea bucșei.

Cum este normal, curbele de temperatură se plasează cu atît mai sus, cu cît viteza este mai mare.

La vitezele de 0,6—2,3 m/s s-a putut atinge încărcare specifică de 170 kgf/cm^2, fără nici o defecțiune în funcționare.

b) Debitele de lubrifiant cresc cu încărcarea și cu turația, ceea ce de asemenea este normal. Este de presupus că nu sînt lipsite de influență nici deformațiile elastice ale bucșei (Fig. 2).

c) Curba $p = f(v)$ pentru temperatura constantă de regim $t = 33{,}5°C$ (Fig. 3) arată valori bune, de exemplu pentru

$v =$	0,75	1,0	1,5	2,2 m/s
$p =$	100	40	23	18 kgf/cm^2

ca și curba $pv = f(v)$ — Fig. 4 — deși situate sub nivelul unor valori citate în literatura de specialitate.

Astfel, în literatură se găsesc pentru poliamidă valori ca

$v =$	1,3	5 m/s
$p_m =$	60	40 kgf/cm^2

și, în general, un domeniu larg $p_m = 50$—200 kgf/cm^2; pentru bucșele „groase" nu este recomandabil a se depăși presiunea $p_m = 100$ kgf/cm^2 spre a se evita apariția unor deformații remanente.

De altfel o comparație este greu de făcut, deoarece performanțele variază foarte mult cu condițiile de încercare, iar acestea, foarte adesea, nu sînt indicate în literatură în totalitatea lor.

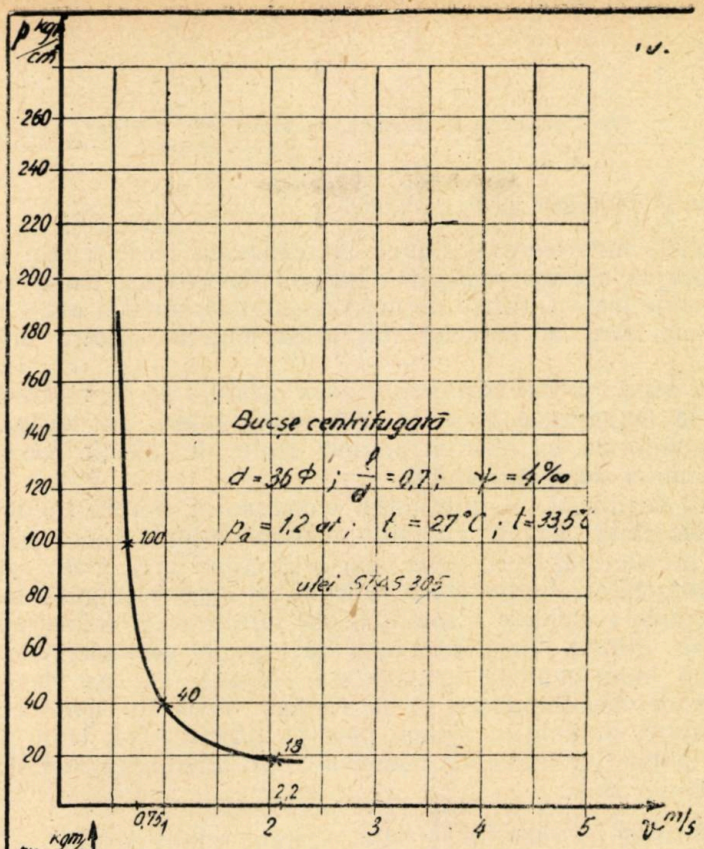

p kgf/cm²
260
240
220
200
180
160
140
120
100
80
60
40
20
100
40
13
2,2
0,75
1
2
3
4
5
v m/s
Bucşe centrifugată
d = 36 Φ ; l/d = 0,7 ; ψ = 4‰
p_a = 1,2 at ; t_1 = 27°C ; t = 33,5°C
ulei STAS 305

Fig. 3

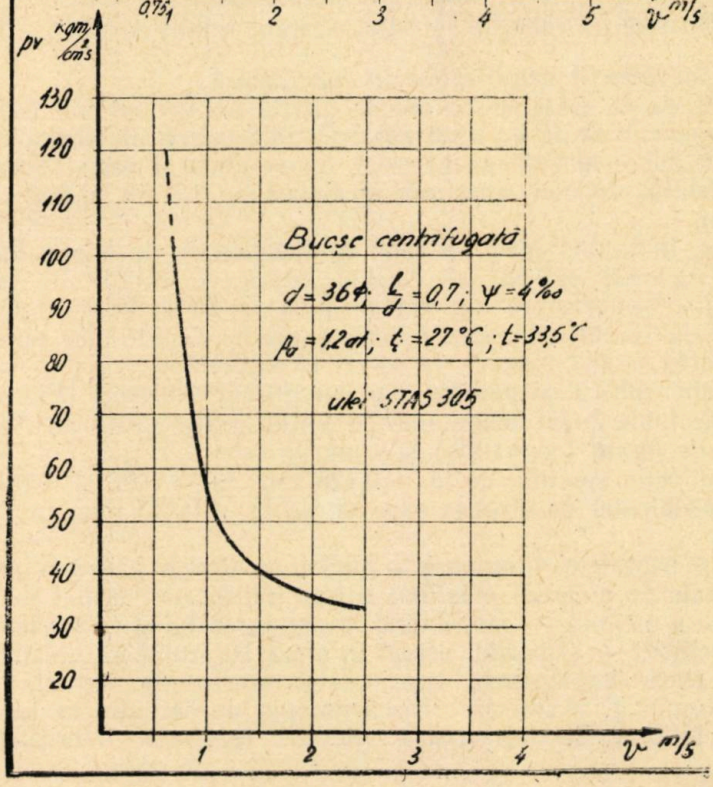

pv kgm/cm²s
130
120
110
100
90
80
70
60
50
40
30
20
1
2
3
4
v m/s
Bucşe centrifugată
d = 36 Φ ; l/d = 0,7 ; ψ = 4‰
p_a = 1,2 at ; t_1 = 27°C ; t = 33,5°C
ulei STAS 305

Fig. 4

3.2. *Bucşe realizate prin injectare*

Rezultatele anterioare şi faptul că realizarea pieselor din poliamidă prin injectare în matriţă reprezintă metoda tehnologică foarte economică pentru loturi de piese suficient de mari ne-au determinat a ataca un studiu sistematic mai larg al bucşelor din acest material pentru lagărele cu alunecare.

Deşi cu aspect iniţial fără defect, după operaţia de degroşare la strung au apărut la majoritatea bucşelor numeroase goluri, cu mărime variată şi foarte neuniforme, ca rezultat al unui regim de injecţie necorespunzător dimensiunilor semifabricatului.

Regimul de injecţie — presiunea, temperatura, durata ciclului — are influenţă deosebită asupra calităţii semifabricatului. La presiuni prea ridicate se produc crăpături, după cum la presiuni prea joase apar goluri datorite contracţiilor. *Temperatura* ridicată de injecţie asigură forma precisă prin completa umplere a matriţei, dar influenţează defavorabil calităţile mecanice. *Durata* lungă a ciclului de injecţie, deci menţinerea materialului timp îndelungat la temperatura ridicată, are ca efect apariţia fenomenelor de descompunere şi de oxidare, respectiv diminuarea calităţilor mecanice, putîndu-se ajunge pînă la alterarea lui. Dintr-un lot de 50 buc. au putut fi reţinute 12 bucşe, a căror lungime a fost limitată la maximum $l = 0{,}7\ d$.

3.2.1. Bucşele cu raportul $\frac{l}{d} = 0{,}7$ şi jocul relativ $\psi = 3{,}5‰$, din acest material s-au dovedit neutilizabile în funcţionare.

În perioada de rodaj de 3,5 ore, la turaţia $n = 430$ rot/min (0,81 m/s), sub încărcarea constantă $p_m = 1{,}8$ kgf/cm², dată numai de elementele sistemului de pîrghii a maşinii de încercat, temperatura a variat între 22,5—27°C, iar debitul de ulei adus sub presiunea de 1,5 at. a fost de 3,7—5,0 cm³/min.

Ulterior, în timpul unei perioade de funcţionare de 6 ore, menţinînd încărcarea $p_m = 1{,}8$ kgf/cm² şi variind viteza de rotaţie de la 320—1510 rot/min., temperatura s-a ridicat pînă la 50°C. Debitul de ulei a crescut pînă la 17 cm³/min, spre a scădea apoi la 11 cm³/min, spre sfîrşit, cînd încărcarea a fost ridicată la $p_m = 11$ kgf/cm².

Important este că pe parcurs s-au înregistrat 6 blocări (Fig. 5). Măsurătorile efectuate după demontarea bucşei au arătat modificări *dimensionale*, cît şi *de formă* (conicitate) şi anume:

— pe direcţia sarcinii, de la + 0,125 mm, la — 0,02 şi +0;10 mm;

— perpendicular pe direcţia sarcinii, de la + 0,125 mm, la +0,04 şi +0,10 mm.

Aspectul suprafeţei interioare a bucşei pe partea activă a arătat că un strat moale de material plastifiat a fost transportat parţial în orificiul de aducţiune a uleiului — contribuind la obturarea lui şi la scăderea debitului de lubrifiant — şi parţial presat în afara lagărului în direcţia axială.

Temperatura influenţează considerabil starea de agitaţie termică a macromoleculelor, făcînd să crească energia de oscilaţie în jurul poziţiilor de echilibru. Ea micşorează totodată legăturile intermoleculare;

odată cu creșterea temperaturii, crește flexibilitatea moleculelor, mărindu-se posibilitatea de deplasare relativă a macromoleculelor vecine, ceea ce are efect asupra fenomenelor de deformație. Pe de altă parte, procesele de umflare a bucșelor, cu tendința de micșorare a jocului în lagăr pînă la

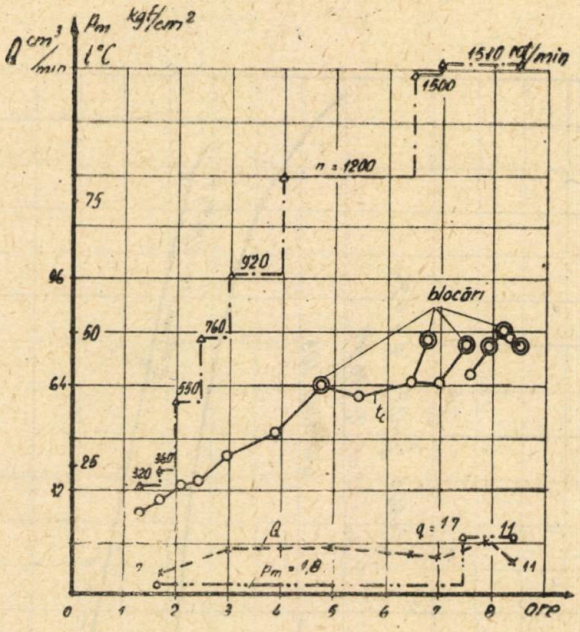


Fig. 5

dispariție, în anumite condiții de funcționare, sînt legate probabil de structura materialului și de comportarea lui în prezența uleiului, la anumite temperaturi. Este posibil ca, similar cu cazul absorbției de apă, uleiul să pătrundă între unele goluri oferite de structura macromoleculelor legîndu-se de grupele polare din catena principală prin forțe moleculare. În acest mod ia naștere o presiune internă cu tendința de îndepărtare a catenelor care are ca efect exterior o mărire a volumului.

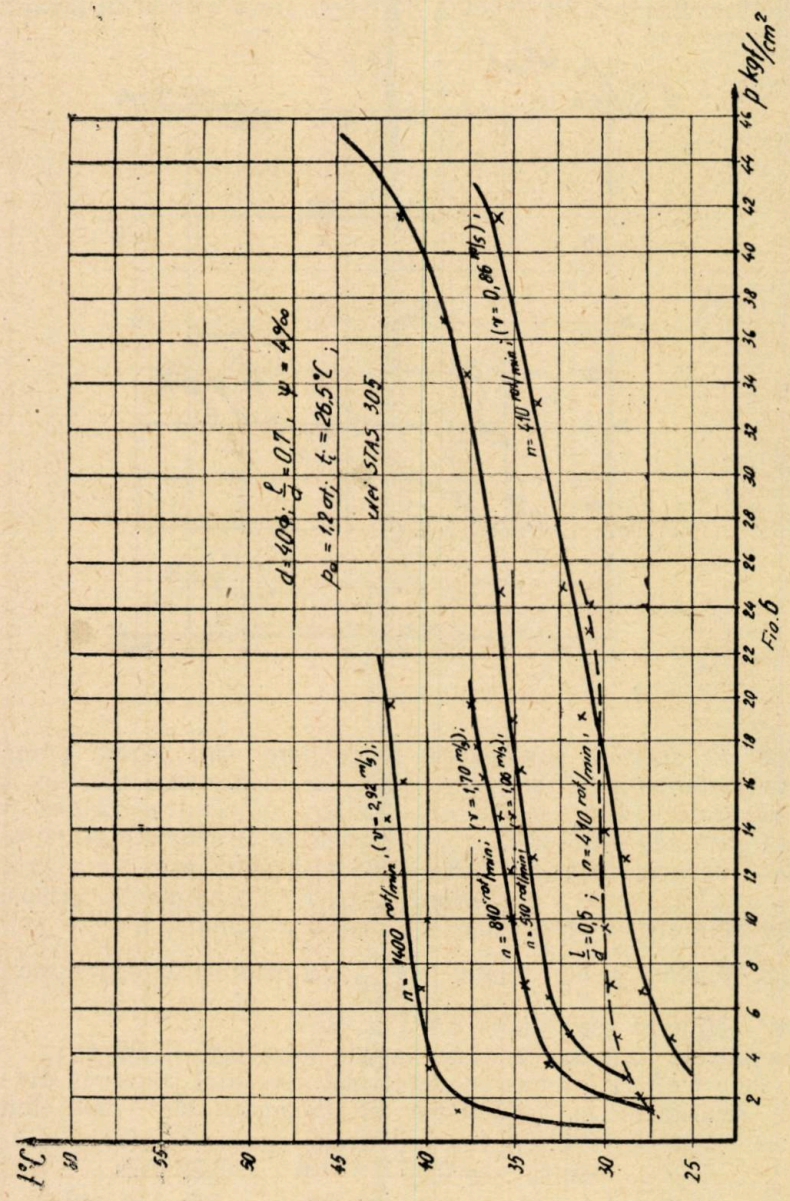
3.2.2. Mărirea jocului relativ *la* $4^0/_{00}$, cu menținerea raportului $\frac{1}{d} = 0{,}7$ a permis obținerea rezultatelor din Fig. 6—8.

Vitezele de încercare au fost variate între 0,86—2,92 m/s.

Curbele $t = f(p)$ își mențin caracterul constatat anterior, dar performanțele referitoare la capacitatea de încărcare sînt mult inferioare. Astfel:

pentru $v =$	0,75	1,0	2,20 m/s
s-a atins numai $p_m =$	40	25	7,5 kgf/cm²

adică sub 50% din încărcările realizate anterior la un regim termic foarte apropiat.


d=400 mm; δ/d=0,1; ψ=4%
p_a=1,2 at; t_i=28,5°C;
ulei STAS 30 E
n=1400 rot/min; (v=2,92 m/s);
n=810 rot/min; (v=1,70 m/s);
n=490 rot/min; (v=1,03 m/s);
n=410 rot/min; (v=0,86 m/s);
δ/d=0,5; n=410 rot/min;
t °C
p kgf/cm²
Fig. 6

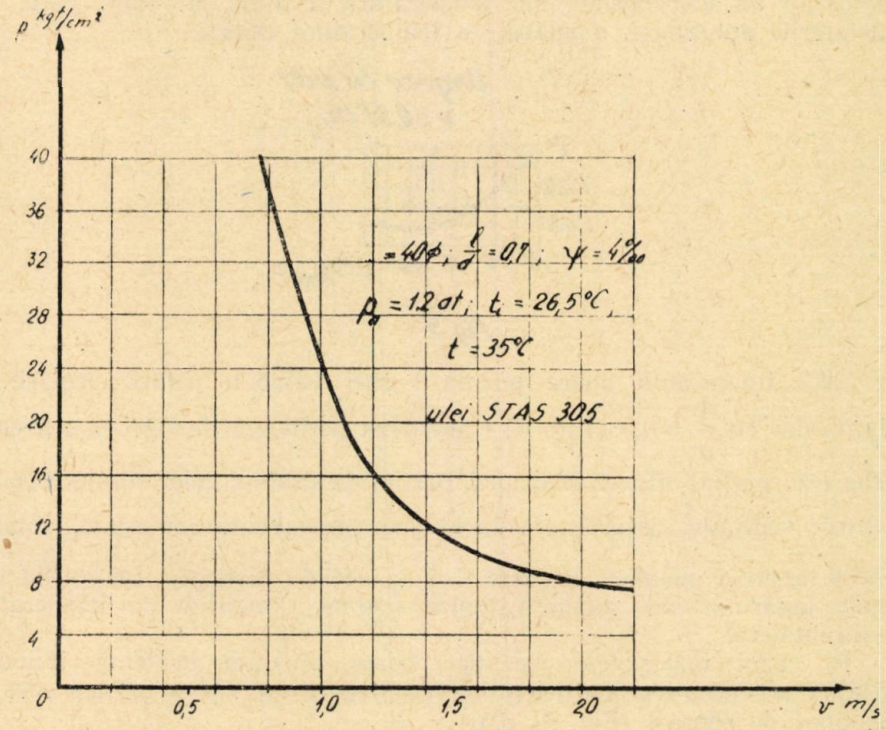

p kgf/cm²
40
36
32
28
24
20
16
12
8
4
0
0,5
1,0
1,5
2,0
v m/s
d = 40 ϕ; l/d = 0,7; ψ = 4‰
p₀ = 1,2 at; t₁ = 26,5°C,
t = 35°C
ulei STAS 305

Fig 7

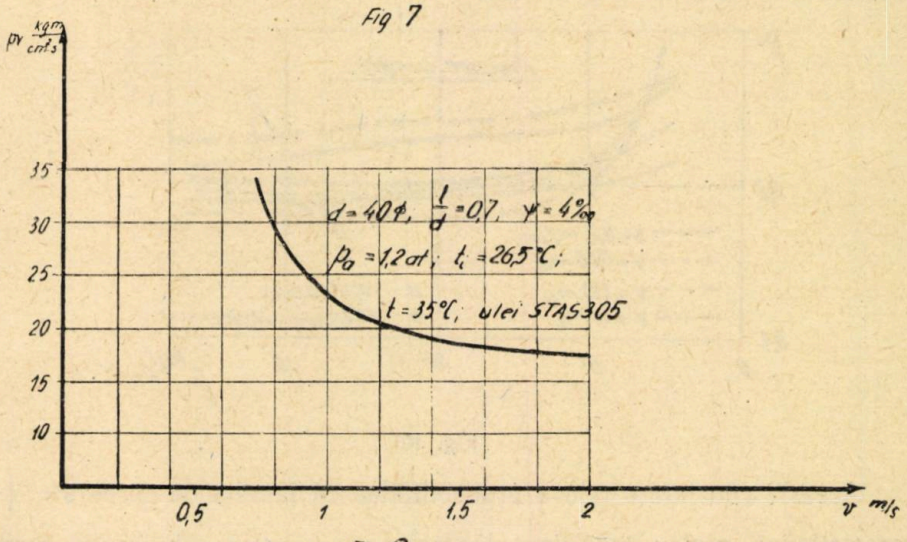

pv kgm/cm²s
35
30
25
20
15
10
0,5
1
1,5
2
v m/s
d = 40 ϕ, l/d = 0,7, ψ = 4‰
p₀ = 1,2 at; t₁ = 26,5°C;
t = 35°C, ulei STAS 305

Fig. 8

Pentru a se evita deteriorarea prematură a bucșei, la fiecare viteză încercările au fost oprite cînd temperatura a atins 40—45°C care, din constatările anterioare, a apărut ca temperatură critică.

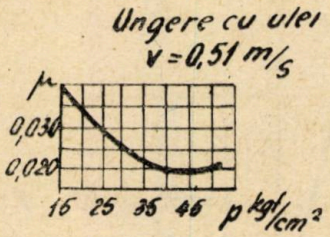


Fig. 9

3.2.3. Interesantă apare poziția curbei valabile pentru același joc relativ, dar cu $\frac{1}{d}=0{,}5$ (Fig. 6) : la viteza periferică de 0,86 m/s această curbă este parțial situată deasupra, parțial dedesubtul celei obținute pentru $\frac{1}{d}=0{,}7$. Calitativ, rezultatul coincide cu constatările cunoscute, valabile pentru lagărele metalice, în sensul că la același diametru, micșorînd lungimea lagărului sub anumită limită optimă, condițiile de temperatură se înrăutățesc.

În cazul materialelor plastice apare totodată evidentă influența variației accentuate a coeficientului de frecare cu viteza și mai ales cu presiunea de contact (Fig. 9, 10).

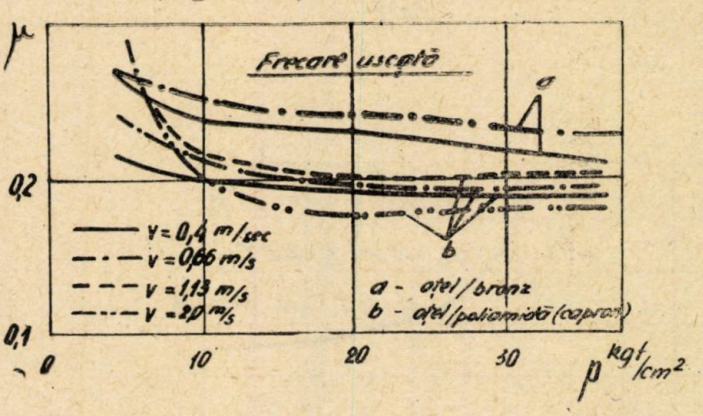


Fig. 10

Această constatare relevă probabilitatea că familia de curbe $\theta=f\left(\frac{1}{d}\right)$ caracteristică pentru încălzirea lagărelor, și ecuația echilibrului termic, valabile pentru lagărele metalice, necesită corecturi pentru adaptarea la lagărele din materiale plastice.

3.2.4. Materialul a arătat sensibilitate deosebită în special la mărirea vitezei. Bucșa cu $\frac{l}{d}=0{,}7$ și joc relativ de 4,75‰ a suportat numai 11 kgf/cm² la viteza periferică de 2,36 m/s ; sub aceeași încărcare, la viteze periferice mai mari, fusul s-a blocat.

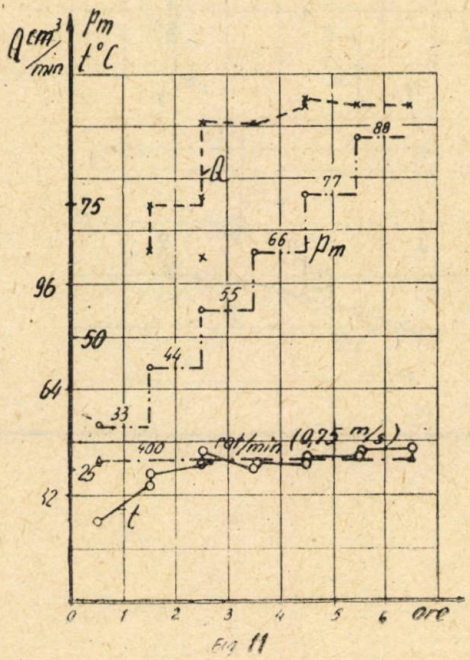


Fig. 11

3.2.5. Deosebit de atent s-a procedat cu încercarea unei bucșe avînd raportul $\frac{l}{d}=0{,}7$ și jocul relativ $=5{,}6‰$. După un rodaj de circa 10 ore, la viteza de 0,75 m/s sub încărcarea $p_m=1{,}8$ kgf/cm², prin mărirea ulterioară în trepte a sarcinii, s-a atins încărcarea $p_m=88$ kgf/cm², la aceeași viteză, fără defecțiuni (Fig. 11). Debitul de ulei a ajuns la 150 cm³/min, temperatura de regim rămînînd sub 40°C.

La viteza de 1,5 m/s, sub încărcarea de 77 kgf/cm², debitul de ulei a scăzut de la 160 la 100 cm³/min, temperatura s-a ridicat brusc de la 32° la 37°C, ceea ce a determinat întreruperea încercărilor (Fig. 12).

În fig. 13 și 14 sînt reprezentate curbele $t=f_1(p)$, $Q=f_2(p)$ și $p=f_3(v)$ care confirmă valorile citate. Trebuie observat că încărcările relativ mari au fost posibile numai la joc și debit de ulei foarte mare, cînd s-a putut asigura o evacuare eficace a căldurii prin circulația activă a lubrifiantului.

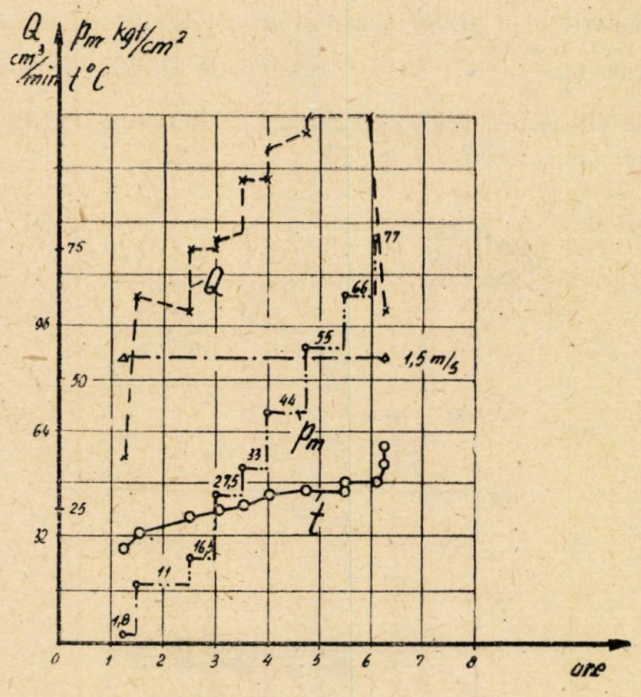

Q cm³/min
pm kgf/cm²
t °C
77
66
55
1,5 m/s
44
pm
33
27,5
t
16,5
11
1,8
Q
75
50
64
25
32
0 1 2 3 4 5 6 7 8
ore

Fig. 12

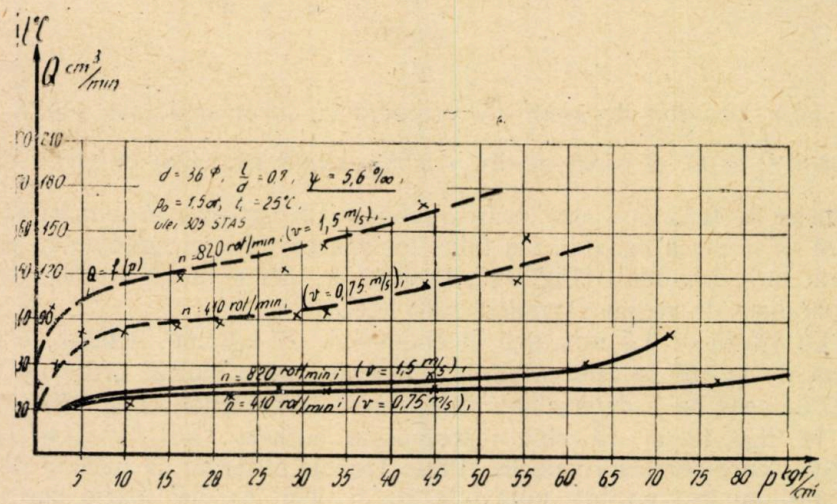

t °C
Q cm³/min
d = 36 ϕ, l/d = 0,9, ψ = 5,6 °/₀₀,
p₀ = 1,5 at, t₁ = 25°C.
ulei 30 STAS
Q = f(p)
n = 820 rot/min (v = 1,5 m/s),
n = 410 rot/min (v = 0,75 m/s),
n = 820 rot/min (v = 1,5 m/s),
n = 410 rot/min (v = 0,75 m/s),
5 10 15 20 25 30 35 40 45 50 55 60 65 70 75 80 p kgf/cm²

Fig. 13

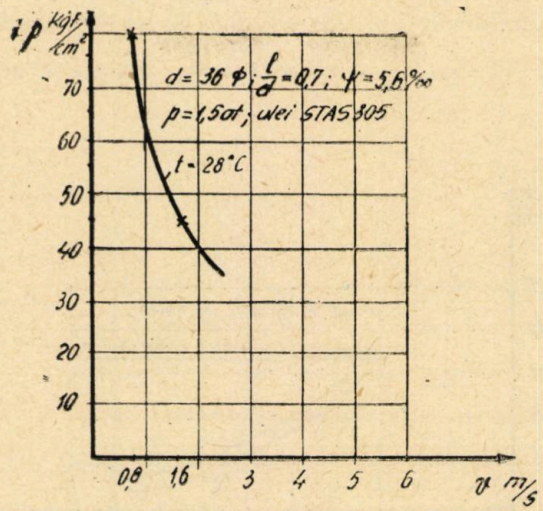

p kgf/cm²
70
60
50
40
30
20
10
0,8
1,6
3
4
5
6
v m/s
d = 36 Φ; l/j = 0,7; ψ = 5,6‰
p = 1,5 at; ulei STAS 305
t = 28°C

Fig. 14

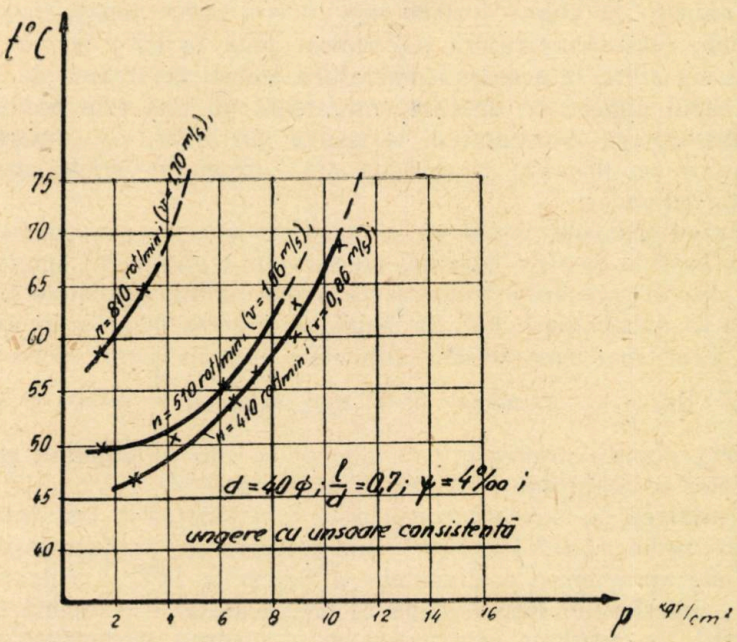

t°C
75
70
65
60
55
50
45
40
2
4
6
8
10
12
14
16
p kgf/cm²
n = 810 rot/min (v = 1,10 m/s),
n = 570 rot/min (v = 1,06 m/s),
n = 410 rot/min (v = 0,86 m/s),
d = 40 Φ; l/j = 0,7; ψ = 4‰ ;
ungere cu unsoare consistentă

Fig. 15

3.2.6. Rezultatele experiențelor în cazul *lubrificației cu unsoare consistentă* sînt oglindite de curbele din fig. 15 și 16, valabile pentru bucșa cu diametrul de 40 mm, $\frac{l}{d}=0{,}7$ și $\psi=4‰$, încercată anterior cu ungere cu ulei.

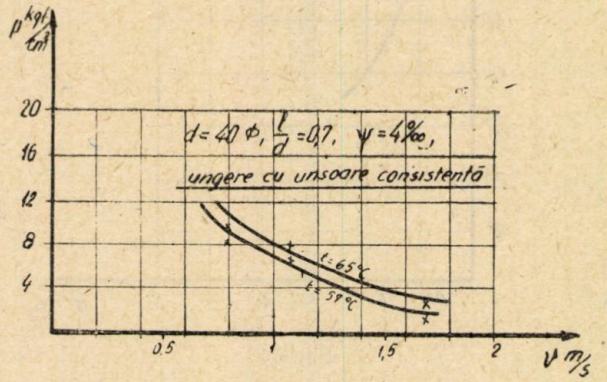


Fig. 16

Datorită lipsei mediului circulant, cu menirea de a vehicula căldura, temperatura lagărului crește rapid, astfel încît nu pot fi suportate decît sarcini reduse: la viteza de 0,86 m/s nu s-a putut depăși încărcarea de 11 kgf/cm², deși temperatura s-a ridicat pînă la 65°; iar la viteza de 1,70 m/s s-a atins, la aceeași temperatură, numai încărcarea de 3 kgf/cm².

În cazul ungerii cu unsoare consistentă nu mai este posibilă măsurarea temperaturii lubrifiantului la ieșirea din lagăr. Ca urmare, această temperatură s-a măsurat în orificiul din cuzinet, în stricta apropiere de suprafața activă.

Caracteristic este faptul că la ungerea cu unsoare consistentă, cel puțin la jocurile relative folosite, nu s-a putut atinge o „temperatură de regim" absolut constantă, temperatura avînd continuu tendințe de creștere, mai ales la turații mari. Este probabil că ungerea cu unsoare consistentă implică jocuri mai mari, practic utilizabile doar în cazuri secundare.

3.2.7. Bucșa cu diametrul de 40 mm, raportul $\frac{l}{d}=0{,}65$ și jocul relativ $\psi=5‰$, supusă încercărilor cu ungere cu ulei și, ulterior, cu unsoare consistentă, a confirmat constatările anterioare.

La ungerea cu unsoare consistentă funcționarea a fost întreruptă la presiunea medie $p_m=7{,}4$ kgf/cm², cînd temperatura pe suprafața arborelui în imediata apropiere a cuzinetului s-a ridicat la 74°C. Verificarea dimensională a interiorului bucșei, după 24 ore, a arătat o completă deformare, cu variații ale pierderii jocului atît pe diametrele perpendiculare, cît și de-a lungul piesei.

4. Constatări cu privire la regimul termic

Uzual, temperatura lagărului se determină cu ajutorul ecuației echilibrului termic și familiei de curbe $\theta = \frac{\mu v}{q_z^*} = \theta\left(\frac{l}{d}, \delta\right)$ pentru $\delta = \frac{h_{min}}{\Delta r} =$ const., reprezentînd θ în ordonată și $\frac{1}{d}$ în abcisă. Se înțelege aci prin

μ — coeficientul de frecare; v — viteza periferică a fusului; $q_z^* = \frac{Q}{d \cdot l}$ debitul specific de ulei; δ — grosimea minimă relativă a peliculei de lubrifiant; h_{min} — grosimea minimă absolută a peliculei de lubrifiant; Δr — jocul radial al fusului în cuzinet. În cazul de față s-a dovedit a fi mai potrivită reprezentarea parametrului δ în abcisă.

În fig. 17 sînt trasate curbele θ pentru $\frac{1}{d} = 0{,}7$ și anume:

a) Curba dedusă direct din familia de curbe valabilă pentru metale (fig. 18), prin schimbarea parametrului din abcisă.

b) Curbele calculate cu relația generală a echilibrului termic

$$\theta = \frac{1}{p_m}\left[\left(\frac{C_l'}{q_z^*} + \frac{C_0 \gamma_l}{A}\right)(t - t_i) + \frac{C_l'}{q_z^*}(t_i - t_0)\right]$$

introducînd valorile t, q_z^*, p_m din diagramele fig. 1 și 3, pentru $n = 1220$ rot/min ($v = 2{,}3$ m/s) și $n = 1850$ rot/min ($v = 3{,}48$ m/s), valabile pentru bucșa de poliamidă încercată. În afara notațiilor de mai sus, în această relație se înțelege prin C_0 kcal/kg, grad — căldura specifică a uleiului; γ_l kg/cm³ — greutatea specifică a uleiului; $A = \frac{1}{427 \cdot 10^2} \frac{\text{kcal}}{\text{cm kg}}$ — echivalentul caloric; $C_l' \frac{\text{kg cm}}{\text{cm}^2 \cdot \text{s} \cdot \text{grd}}$ coeficient care include capacitatea lagărului de a evacua căldura, raportată la 1 cm² din proiecția fusului; $t°C$ — temperatura medie a filmului de lubrifiant; t_i °C — temperatura de intrare a uleiului; t_0 °C — temperatura mediului ambiant. Curbele sînt afectate de aproximația rezultată din faptul că δ a fost dedus folosind curba corespunzătoare de portanță valabilă pentru metale.

c) Curbele *corectate* prin luarea în considerare a modificării jocului relativ în timpul funcționării, datorită dilatației importante a materialelor plastice;

d) Curba calculată cu valoarea aproximativă recomandată de literatura de specialitate [1] pentru coeficientul de frecare: $\mu = 3{,}6\sqrt{\frac{\eta\omega}{p_m}}$ cu valorile η, ω, p_m corespunzătoare încercărilor făcute la $n = 1220$ rot/min.

e) Curba pentru regim termic stabil $t = 33°C$, $t_i = 27°C$, luînd ca bază valorile date de fig. 3.

Se observă :

a) Curbele θ pentru poliamidă nu se suprapun cu cele pentru metal.

b) O dependență a poziției curbelor θ de turație, respectiv de viteză, datorită variației termenului $\frac{\Delta t}{p_m} = \frac{t - t_i}{p_m}$ și a debitului de lubrifiant q_z^*, deci diferenței de regim termic.

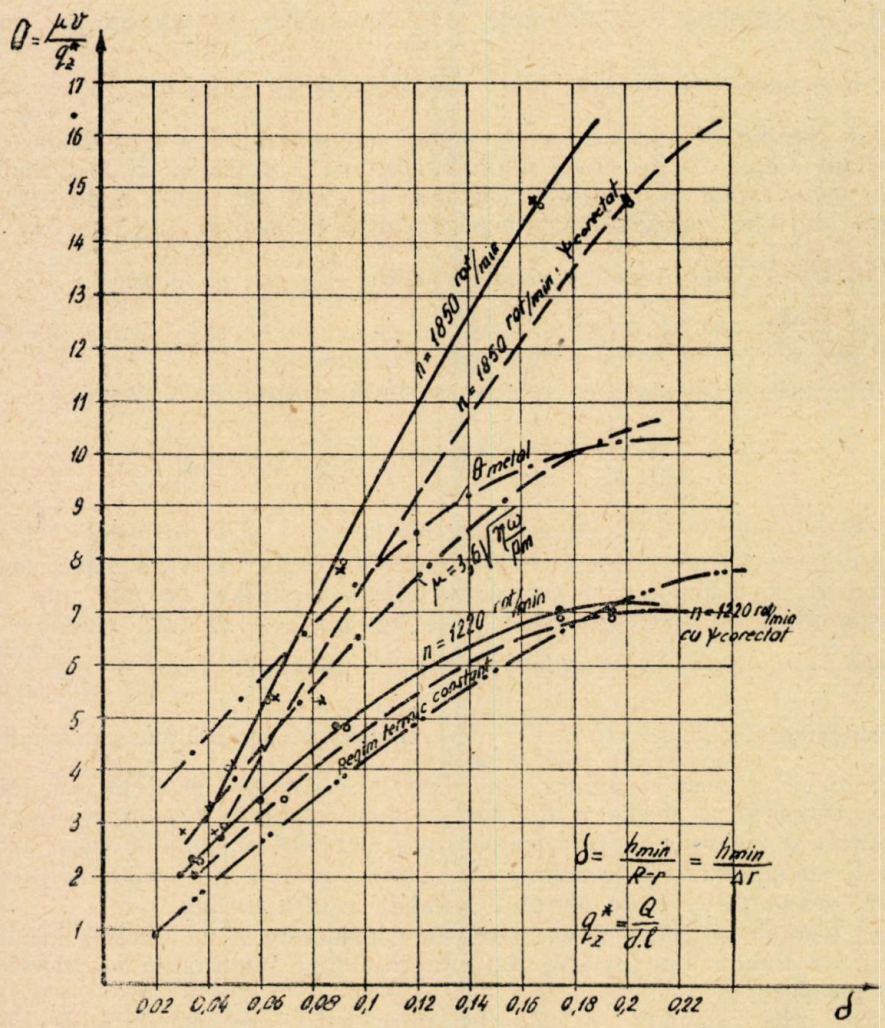


Fig. 17.

c) Variația parametrilor menționați sub pct b, influențează totodată și coeficientul de frecare μ, cum s-a arătat anterior, motiv care contribuie în plus la schimbarea poziției curbelor.

d) Modificarea jocului relativ ψ datorită dilatației bucșei are influență importantă, coeficientul de dilatație al poliamidei fiind foarte mare în raport cu cel al metalelor.

În cazul maselor plastice variația temperaturii are deci efect apreciabil nu numai asupra viscozității η, ci și asupra jocului relativ ψ, efect care nu mai poate fi neglijat.

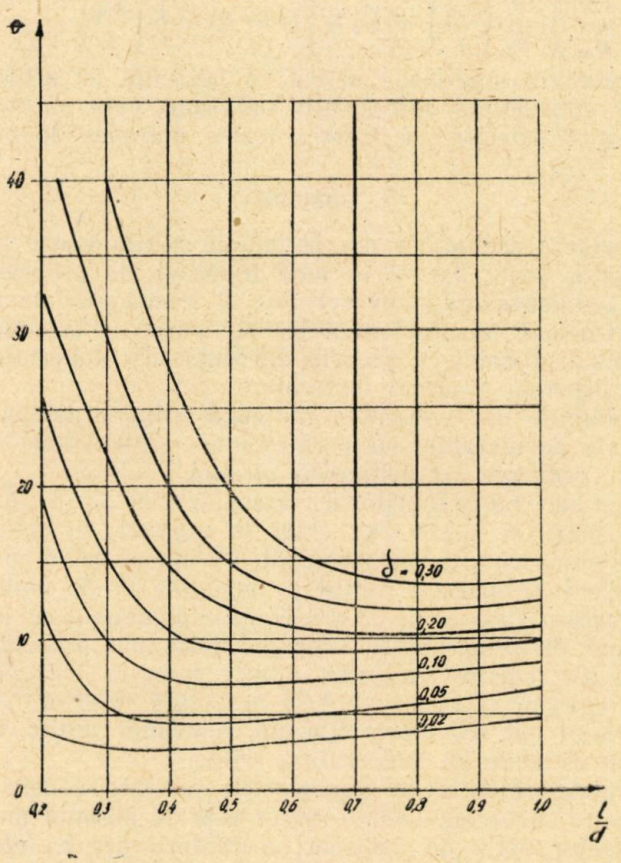


Fig. 18

Dacă se consideră și *umflarea* materialului, deplasarea curbelor va fi mai accentuată.

e) Alura curbei valabile pentru regim termic constant este asemănătoare cu cea a curbei valabile pentru metal, dar nu identică. Prima este plasată mai jos deoarece, în valorile θ pentru metal este considerată numai cantitatea de ulei teoretică, după calculul hidrodinamic, pe cînd în cazul bucșelor din poliamidă cantitatea de ulei introdusă sub acțiunea pompei a fost mult sporită, constituind calea principală de vehiculare a căldurii.

f) Curba θ calculată cu $\mu = 3{,}6\sqrt{\frac{\eta\omega}{p_m}}$, în care ω, p_m și η_l corespund valorilor experimentale (fig. 1, 2), se plasează într-o poziție medie, deci poate da o apreciere satisfăcătoare.

g) Punctele θ calculate cu relația echilibrului termic recomandată pentru cuzinești din mase plastice:

$$\theta = \frac{427}{p_m}\left\{\frac{K}{q_z^*}\left(\frac{L_a}{l}\right) + C_0\gamma_l\right](t - t_l) + K\left(\frac{L_a}{l}\right)\frac{t_i - t^0}{q_z^*}\Bigg\}$$

în care L_a reprezintă lungimea „activă" a porțiunii de arbore cu repartiție a căldurii considerată aproximativ uniformă, care participă la cedarea căldurii către exterior, se înscriu foarte apropiat de curbele experimentale.

5. Concluzii

a) Comportarea cuzineților din poliamidă atîrnă foarte mult de calitatea materialului prim, dar și în mod hotărîtor de proprietățile fizico-mecanice ale semifabricatului, ca rezultat al tehnologiei de fabricație cu efect asupra structurii lui. Performanțele pot varia de la simplu la dublu și mai mult. Este probabil că această diferență în comportare este determinată și de dispersia greutății moleculare.

Bucșele obținute din poliamidă indigenă printr-o tehnologie corectă pot da rezultate comparabile cu performanțele bune citate în literatura de specialitate, realizate cu poliamidă străină.

b) În orice caz, buna funcționare a cuzinetului „gros" din poliamidă impune jocuri mari, de peste 4‰, chiar la ungerea cu ulei. Aceasta se datorește bine cunoscutului inconvenient al materialelor plastice, de a avea un coeficient de dilatare ridicat și tendinței lor de umflare. *

c) *Temperatura* care poate fi atinsă în exploatare este în mod hotărîtor dependentă de proprietățile fizico-mecanice ale poliamidei. La primele încercări ale noastre s-a putut ajunge pînă la 116°C la presiunea medie de 106 kgf/cm² și viteza de 1,26 m/s, fără deteriorarea bucșei, pe cînd la materialul cat. B, încercat acum, domeniul dintre 40—50°C s-a dovedit a fi un domeniu de temperatură critic.

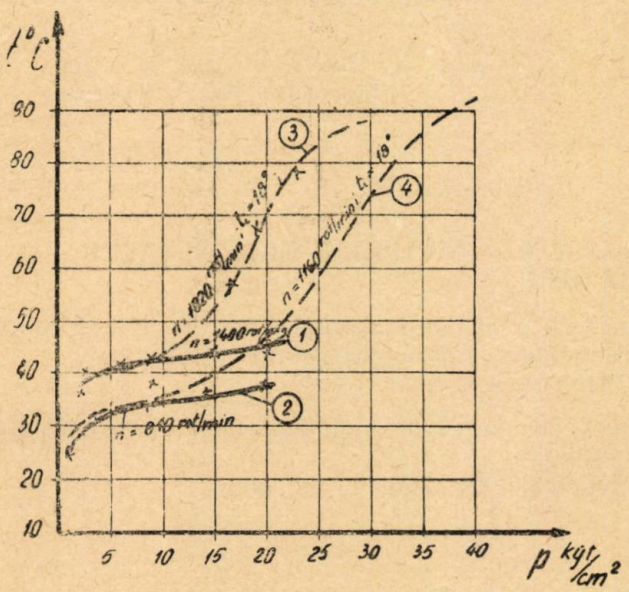
d) Rezultatele obținute la ungerea cu unsoare consistentă trebuie să fie considerate ca neconcludente. Sigur este că absența mediului lichid circulant ca factor activ de transport a căldurii are ca efect creșterea temperaturii mai rapidă decît în cazul ungerii abundente cu ulei. Este necesar să fie stabilite jocurile relative corespunzătoare, respectiv condițiile limită în care ungerea cu unsoare consistentă poate fi folosită.

e) Pentru orice apreciere se impune indicarea tuturor condițiilor de încercare întrucît, în funcție de acestea, rezultatele pot fi cu totul diferite. Fig. 19 exemplifică această situație: deși bucșele cercetate au fost confecționate tot din poliamidă, iar raportul $\frac{1}{d}$ și jocul relativ au fost identice, proprietățile diferite ale materialului, precum și diferența de

* Este necesar calculul jocului cu luarea în considerație a dilatației, în funcție de temperatura de regim.

debit de lubrifiant au ca rezultat o modificare importantă a curbelor de temperatură în funcție de presiune.

f) Cu privire la *regimul termic*, pentru bucșele „groase" sînt de relevat diferențe față de cazul cuplurilor fus oțel-cuzinet metalic, rezultate din condițiile diferite de evacuare a căldurii, din modificările importante ale jocului relativ datorite coeficienților mari de dilatație și tendinței de



Curbele 1, 2 :

$d=40\Phi; \frac{l}{d}=0{,}7; \psi=4^0/_{00}$

$p_u=1{,}2$ at; $t_i=25-27$°C;
$q_1=100$ cm³/min
$q_2=120$ „
ulei Stas 305

Curbele 3—4 :

$d=36\Phi; \frac{l}{d}=0{,}7; \psi=4^0/_0$

$p_u=0{,}6$ at; $t_i=18$ °C
$q\cong 50$ cm³/min
ulei Stas 305

Fig. 19

umflare a maselor plastice, din dependența diferită a coeficientului de frecare de viteză și de presiune, precum și însăși procesele care au loc în zonele de trecere lubrifiant — material de cuzinet. Cîmpul cercetărilor în această problemă este încă larg deschis.

Cercetările teoretice și experimentale au relevat chiar pentru cazul cuzineților metalici diferențe între rezultatele analitice obținute prin aplicarea teoriei hidrodinamice și situația reală, referitoare la presiuni — deci la coeficientul de portanță $C_p=\frac{r_m\psi^2}{\eta\omega}$ cît și la poziția fusului în cuzinet, în timpul funcționării [2, 3]. Elasticitatea arborelui, deformațiile locale ale cuzinetului, variația vîscozității în filmul de ulei, cu temperatura și cu presiunea, sînt cauze ale acestor diferențe. Dificultățile matematice și complexitatea procesului de transmisie a căldurii în cazul lagărelor au determinat o dispersie și mai mare a rezultatelor privind frecarea — coeficientul caracteristic $\frac{\mu}{\psi}$ — respectiv problema încălzirii lagărului.

Este de așteptat ca, în cazul cuzineților masivi din materiale plastice, legile de similitudine valabile pentru cuzineții metalici să necesite adaptări caracteristice. Jocurile relative mari, modulul de elasticitate foarte redus, conductivitatea termică foarte mică a materialelor plastice, împletite cu particularitățile arătate mai sus, impun o reconsiderare a tratării analitice, — legată de condițiile la limită — ca și largi studii cu caracter experimental spre a se ajunge la aceeași stăpînire a proceselor ca în cazul cuzineților metalici.

Catedra de organe de mașini
Institutul politehnic București

BIBLIOGRAFIE

1. *I. L. Zemliacov:* — CAPRON — MATERIAL DLIA DETALEI MAȘINI MASGHIZ 1961.
2. *Th. Carl:* Schmierfilmdruch und Wellenverlagerung in zylindrischen Gleitlagern unter konstanter und sinusförminger Belastung. Konstruktion 1963, Heft 6, S. 209.
3. *M. Gnilke:* Der Einfluss der Druckabhängigkeit der Viscosität auf die Gleitlagerschmierung. Maschinenbau — Technik 1963, Heft 11, S. 605.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC BUCUREȘTI
Tomul XXVI — 1964, Fascicola 1

ELECTROTEHNICĂ

CZ. 621.313

TEORIA UNITARĂ A MAȘINILOR ELECTRICE

I. S. GHEORGHIU

După ce se expune teoria tuturor categoriilor de mașini electrice, este util a se face o operație de sinteză arătînd că toate aceste categorii de mașini electrice cu proprietăți atît de variate constituie în fond o mașină electrică unică, care poate fi generator electric, motor electric sau transformator electric de tensiune.

Pentru a face această *teorie unitară a mașinilor electrice* să aplicăm mașinii electrice principiul de funcționare al oricărei mașini, definită ca un sistem care transformă în mod permanent o formă de energie în altă formă de energie. Exprimăm în limbaj matematic permanența acestei transformări, spunînd că integrala care exprimă energia transformată de sistem extinsă în timp este diferită de zero, sau mai general crește indefinit cu timpul.

Mașina electrică sub forma ei cea mai generală se poate defini ca un sistem format dintr-un număr oarecare de circuite electrice, montate pe armături din oțel magnetic, unele stator altele rotor, a căror inductanță mutuală și proprie variază ca urmare a mișcării de rotație a rotoarelor. Acest sistem îndeplinește funcția de mașină electromecanică prin schimbul de energie electrică și mecanică care are loc între diferitele circuite electrice și diferiți arbori ai rotoarelor, și îndeplinește funcția de transformator electric de tensiune prin schimbul de energie electrică care are loc între diferitele circuite electrice, în cazuri limită putînd avea numai una din aceste două funcțiuni.

Forma cea mai elementară a acestei mașini electrice generale este mașina *bicircuit și monorotor (cu rotor bobinat)*, neluînd în considerare cazul particular pe care îl constituie mașina reactivă monocircuit cu rotor cu poli aparenți nebobinat, pe care îl vom trata separat mai departe.

În sistemul complex format din n_s circute electrice statorice și n_r circuite rotorice, care constituie mașina electrică multiplă, elementul component adică mașina electrică elementară este această mașină bicircuit și monorotor. Fiecare din cele n_s circuite statoric cu fiecare din cele n_r circuite rotorice constituie o asemenea mașină elementară. Sistemul întreg este mașină electrică prin fiecare din mașinile sale componente bicircuit și monorotor.

Nu luăm în considerare în această teorie unitară a mașinilor electrice decît fenomenul principal care are la bază inducția magnetică corespunzătoare fluxurilor principale ale mașinii, nu și fenomenele secundare, accesorii, care sînt produse de fluxurile de scăpări și de inducție magnetică în fierul armăturilor (pierderi prin histeresis și curenți turbionari).

Într-un studiu, pe care l-am publicat acum 15 ani, am arătat cum se poate stabili o teorie unitară cvasi generală a mașinilor electrice bazată pe reprezentarea în cantități complexe a locului geometric al curentului electric din indusul mașinii.

În studiul de față vom arăta cum, generalizînd teorema lui *Boucherot* și *Fallou*, expusă mai departe, putem stabili o nouă teorie unitară și absolut generală a mașinilor electrice.

Să vedem cum se aplică definiția generală pe care am dat-o mașinii electrice în cazul mașinii elementare bicircuit și monorotor, considerînd cazul mașinii bipolare. Teoria se aplică și mașinii cu 2 p poli.

Să însemnăm, cu ω_1 pulsația curentului în înfășurarea statorică, cu ω_2 pulsația curentului în înfășurarea rotorică, cu ω_3 pulsația care corespunde vitezei unghiulare ω_3 a rotorului ($\omega_3 = p\,\Omega_3$) adică pulsația de variație a inductanțelor proprii a celor două circuite ω_1 și ω_2, și a inductanței mutuale între cele două circuite electromagnetice, aceste variații fiind datorite mișcării rotorului. Cel dintîi care a stabilit o relație între pulsațiile ω_1, ω_2 și ω_3 cu aplicație la mașina asincronă, în anul 1909, în cursul pe care îl făcea la Ecole Supérieure d'Electricité din Paris a fost *Paul Boucherot*. *Jean Fallou* în 1949 a reluat această teorie în cursul pe care îl făcea la aceeași școală (vezi Leçons d'électrotechnique de Jean Fallou, capitolul X) și a arătat că dacă ω_1 sau ω_2 sînt nule sîntem în cazul mașinii sincrone, dacă $\omega_3 = \omega_1 - \omega_2$ sîntem în cazul mașinii asincrone și dacă $\omega_3 = 2\omega_1$ sîntem în cazul mașinii de curent alternativ reactive sau parametrice în care numai armătura ω_1 este bobinată.

Așa cum arată și titlul pe care *Jean Fallou* îl dă acestui capitol în tratatul său (Caractères communs à toutes les machines à flux alternatif), teoria se aplică numai la mașinile cu flux alternativ, și nici la acestea la toate, ci numai la mașinile sincrone, asincrone și reactive. Demonstrația matematică a teoremei se găsește clar expusă în tratatul lui J. Fallou și nu mai revenim asupra ei.

Sub forma generalizată sub care am expus-o la începutul acestui articol, teoria unitară a mașinilor electrice se aplică însă la toate categoriile de mașini electrice rotative clasice. Vom arăta aceasta în ceea ce urmează, după ce mai întîi vom face oarecare completări la aplicarea teoriei la mașinile asincrone, sincrone și transformator.

1) Mașina asincronă trifazată cu alimentare statorică

Cele trei condiții de mașină electrică : $\omega_3 = \omega_1 - \omega_2$, $\omega_3 = \omega_1 + \omega_2$ și $_3 = \omega_2 - {}_1$ corespund tocmai la cele trei moduri de funcționare ale mașinii asincrone trifazate cu alimentare statorică : ca motor, generator și frînă.

Observînd că pulsațiile ω_1, ω_2 și ω_3 sînt mărimi pozitive, dar vitezele corespunzătoare

$$\Omega_1 = \frac{\omega_1}{p}, \quad \Omega_2 = \frac{\omega_2}{p} \quad \text{și} \quad \Omega_3 = \frac{\omega_3}{p}$$

pot fi pozitive sau negative, după cum rotirea se face într-un sens sau în celălalt,

Luînd ca pozitiv sensul rotirii cîmpului învîrtitor statoric Ω_1, funcționarea mașinii asincrone trifazate cu alimentare statorică în regim de motor, generator și frînă, poate fi reprezentată prin alăturata schemă (fig. 1):

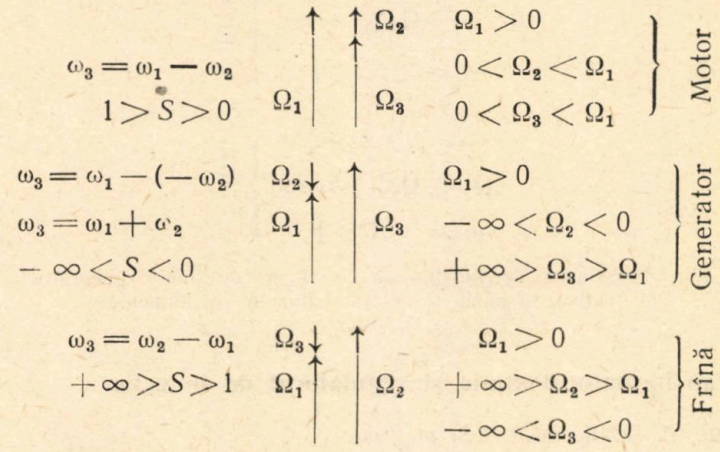


Fig. 1. Schemă de funcționare în regim de motor, generator și frînă a mașinii asincrone trifazate cu alimentare statorică.

2) Mașina asincronă trifazată cu alimentare rotorică

În această mașină rotorul este alimentat prin inelele sale la frecvența f_1 a rețelei, iar statorul joacă rolul înfășurării secundare de frecvență redusă.

Luînd iarăși ca sens pozitiv sensul vitezei Ω_1, funcționarea mașinii în regim de motor, generator și frînă poate fi reprezentată prin alăturata schemă (fig. 2).

Cazul particular $U_2=0$, respectiv $U_1=0$, corespunde mașinii asincrone trifazate cu secundar în scurtcircuit.

Cazul particular $U_2 \lesseqgtr 0$ respectiv $U_1 \lesseqgtr 0$ corespunde mașinii asincrone trifazate cu rezistențe în secundar pentru pornire, sau mașinii asincrone generale mașină și transformator la frecvențe diferite în stator și în rotor, cum este cazul unor mașini asincrone speciale sau la montajele în cascade.

Avem: Ω_1 pozitiv și constant și $\Omega_2 = \Omega_1 - (-\Omega_3)$

$$\text{și} \quad S = \frac{\omega_1 - (-\omega_3)}{\omega_1}$$

$$\left.\begin{array}{c} 0 < -\Omega_3 < \Omega_1 \\ 0 < \Omega_2 < \Omega_1 \\ 1 > S > 0 \end{array}\right\} \text{Motor}$$

$$\left.\begin{array}{c} \Omega_1 < -\Omega_3 < +\infty \\ 0 > \Omega_2 > -\infty \\ -\infty < S < 0 \end{array}\right\} \text{Generator}$$

$$\left.\begin{array}{c} -\infty < -\Omega_3 < 0 \\ \Omega_1 < \Omega_2 < +\infty \\ +\infty > S > 1 \end{array}\right\} \text{Frînă}$$

Fig. 2. Scheme de funcționare în regim de motor generator și frînă a mașinii asincrone trifazate cu alimentare rotorică.

3) Transformatorul static și regulatorul de inducție

Sîntem în cazul: $\omega_3 = 0$ și $\omega_1 = \omega_2$.

4) Mașina sincronă trifazată sau monofazată cu excitație rotorică în c.c.

Sîntem în cazul $\omega_2 = 0$ și $\omega_1 = \omega_3$ cu injecție de curent continuu în rotor. Relația $\omega_1 = \omega_3$ definește sincronismul.

O putem considera și ca o mașină asincronă cu alimentare statorică, care trece de la funcționarea în regim de motor la funcționarea în regim de generator ($s = 0$), deci $\omega_3 = \omega_1 - \omega_2$ cu $\omega_2 = 0$, sau $\omega_1 = \omega_3 + \omega_2$ cu $\omega_2 = 0$, în care în același moment injectăm curent continuu în rotor, adică $I_2 = I_c$ de pulsație zero, ceea ce face să apară cuplul.

5) Mașina sincronă trifazată sau monofazată cu excitație statorică în c.c.

În acest caz: $\omega_1 = 0$ și $\omega_3 = \omega_2$.

Sub forma generalizată pe care am expus-o la începutul acestui capitol, teoria unitară a mașinilor electrice se aplică însă și la toate celelalte categorii de mașini electrice rotative clasice: la mașina asincronă monofazată, la mașina de curent continuu, eteropolară și unipolară, la metadine

și amplidine, la toate mașinile electrice cu caracteristică serie și la toate mașinile alternative cu colector.

Toate aceste mașini se reduc la mașina sincronă sau asincronă obișnuită, sau se pot descompune în două sau mai multe mașini sincrone sau asincrone obișnuite, afară de cazul special al mașinii unipolare de curent continuu, care se înscrie în teoria unitară prin faptul că energia crește indefinit cu timpul.

Vom arăta aceasta în cele ce urmează, considerînd iarăși numai cazul mașinii bipolare. Teoria se aplică la fel și la mașina cu $2p$ poli.

6) Mașina asincronă monofazată

Conform unei teoreme cunoscute a cîmpurilor învîrtitoare, cîmpul fix al statorului monofazat se descompune în două cîmpuri de amplitudine pe jumătate care se învîrtesc în sensuri contrare cu viteze egale cu viteza de sincronism $n_1=60\ f_1$, unul cîmpul direct de alunecare s, care produce cuplul activ, celălalt cîmpul invers de alunecare $2-s$ care frînează. Este ca și cum am avea pe același arbore două motoare asincrone, unul activ, celălalt funcționînd în regim de frînă, care are o valoare a cuplului electromagnetic neglijabilă cînd mașina funcționează la o viteză apropiată de cea de sincronism. Fiecare din aceste două motoare asincrone se înscriu în teoria unitară a mașinilor electrice ca motoare asincrone trifazate, unul funcționînd în regim de motor, celălalt în regim de frînă.

7) Mașina de curent continuu eteropolară

Aplicînd principiul suprapunerii efectelor, putem descompune mașina de curent continuu într-o mașină monofazată cu inductorul stator și indusul rotor, cuplată electric în cascadă cu un convertor de frecvență, care transformă curentul alternativ de pulsație ω_2 a indusului în curent continuu la cele două perii diametrale (la mașina bipolară) montate pe colector.

Să examinăm mai deaproape acest proces de transformare a mașinii sincrone în mașină de curent continuu (fig. 3).

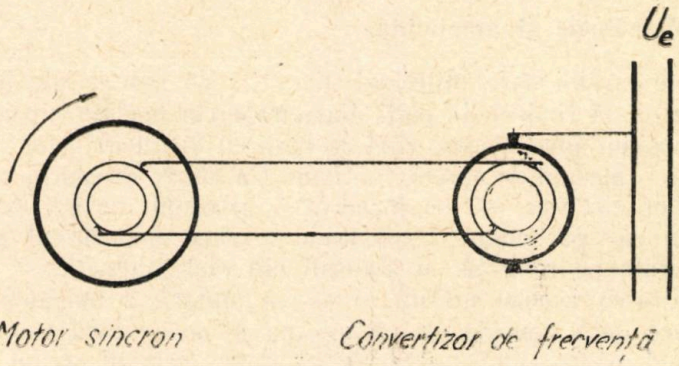


Fig. 3. Mașina sincronă monofazată cuplată în cascadă cu un convertizor de frecvență

Să considerăm o armătură rotorică monofazată parcursă de curenți alternativi de pulsație ω_2, avînd două inele pe care freacă două perii fixe și care se rotește la viteza $n_2=60\,f_2$.

Să trimitem curentul monofazat de pulsație ω_2 la cele două inele ale unui convertizor de frecvență care la celălalt capăt poartă un colector pe care freacă două perii diametrale fixe. Presupunem că rotim acest convertizor cu o viteză oarecare ω_3 (ceva mai mare ca ω_2) ($\omega_3 = \Omega_3$ la mașina bipolară). Prin înfășurarea convertizorului care se rotește la viteza Ω_3 trece un flux alternativ de pulsația ω_2. Este ca și cînd prin fața unui flux pulsatoriu de pulsație ω_2 s-ar roti o înfășurare cu viteza Ω_3. In înfășurarea convertizorului parcursă de curenți de pulsație ω_2 și care se rotește cu viteza Ω_3 se va produce o f.e.m. de pulsație $\omega_3-\omega_2$ pe care o putem culege la două perii diametrale puse oriunde la periferia înfășurării. Să presupunem acum că $\omega_3=\omega_2$, adică convertizorul se rotește exact la viteza la care s-ar roti armătura parcursă de curentul de pulsație Ω_2, dacă ea ar fi indusul unui alternator monofazat cu inductor fix și indus-rotor. Dacă $\omega_3=\omega_2$, atunci la periile convertizorului vom culege curent de pulsație zero, adică curent continuu pe care îl putem trimite într-o rețea de curent continuu.

Să presupunem acum că așezăm rotorul monofazat al convertizorului în locul armăturii monofazate, adică în locul indusului mașinii sincrone, suprimînd inelele, deoarece curentul de pulsație $\omega_2=\omega_3$ se produce chiar în înfășurarea indusului, și că menținem colectorul pe care așezăm două perii diametrale. Vom culege între aceste două perii curent continuu, și dacă vrem să culegem cel mai mare curent continuu, vom așeza cele două perii pe diametrul perpendicular pe direcția fluxului statoric fix. Am realizat în acest fel o mașină de curent continuu. Teoria unitară a mașinilor electrice se aplică numai mașinii sincrone monofazate, din care a provenit mașina de curent continuu, deoarece convertizorul de frecvență în care nu se produce nici un fenomen de inducție electromagnetică, nu este mașină electrică, ci numai un aparat de transformare a frecvenței.

8) **Metadinele și amplidina.**

Aceste mașini care utilizează fluxurile de reacție ale indusului sînt mașini cu două rînduri de perii diametrale (la mașina bipolară). Fiecare etaj al mașinii, adică fiecare rînd de perii cu fluxul inductor corespunzător constituie, o mașină de curent continuu. Ca atare, în cadrul teoriei unitare a mașinilor electrice, ele se încadrează în cazul mașinii de curent continuu. Un caz particular îl constituie mașina monocircuit și monorotor, cu înfășurare pe rotor și cu statorul din oțel magnetic și fără bobinaj.

Incadrarea acestei mașini în teoria unitară a mașinilor electrice o putem face dacă considerăm că mașina ar avea două rotoare distincte, unul avînd numai înfășurarea de excitație, celălalt avînd numai înfășurarea activă, ambele rotoare avînd același rînd de două perii diametrale și același stator care servește numai pentru închiderea fluxului magnetic.

Fiecare din cele două înfășurări rotorice cu fluxul celeilalte și cu perechea de perii care este aceeași pentru ambele rotoare, constituie o mașină de curent continuu. Ca atare această mașină se înscrie în teoria unitară a mașinilor electrice în cadrul mașinilor de curent continuu.

În cazul rototrolului și a regulexului cu un singur rînd de perii și cu mai multe excitații, periile cu fiecare înfășurare de excitație constituie o mașină de curent continuu.

9) Mașinile de curent continuu unipolare (fără colector)

Aceste mașini se construiesc după două tipuri: tipul axial și tipul radial.

În tipul radial un disc de oțel se mișcă între două coroane de poli de nume contrar, așa încît fluxul magnetic străbate discul într-un singur sens.

În tipul axial, care este cel mai întrebuințat (fig. 4), un cilindru masiv din oțel magnetic se rotește înlăuntru unui cilindru gol, care constituie inductorul mașinii, excitat în curent continuu.

Fluxul prin cilindrul masiv circulă în așa sens încît pe partea sa activă spre mijlocul său, fluxul iese din cilindru de jur împrejur pe toată periferia lui pentru a trece în sîmburele masiv al inductorului. Este ca și cînd tot miezul cilindrului ar constitui un pol Nord. Ca atare mașina este o mașină unipolară. La periferia indusului cilindric sînt așezați după generatoarele cilindrului conductori izolați.

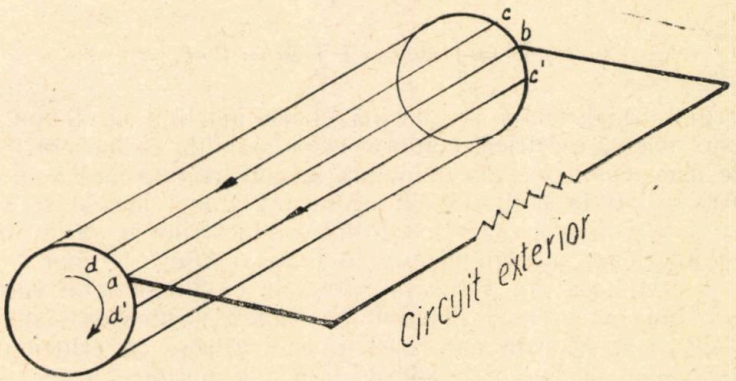


Fig. 4. Rotorul motorului unipolar axial de curent continuu.

Inelele pot fi legate în serie cu bornele circuitului de excitație și atunci avem o mașină serie, sau pot fi legate separat și inelele și bornele circuitului de excitație la rețea, și atunci avem o mașină derivație. Oricare ar fi poziția unuia din conductorii periferici, regula mîinii drepte ne spune că curentul circulă de la dreapta spre stînga, din *c* spre *d*, deci la perii vom alege curent continuu.

Să evaluăm fluxul Φ_0 care iese din cilindru într-o rotație completă a lui. Dacă B este inducția la periferia cilindrului, o constantă, fluxul care iese din cilindru la o rotație completă a lui va fi $B \cdot S$ unde S este suprafața pe care o descrie o generatoare, ca generatoarea cd, cînd pleacă din poziția ab care corespunde liniei periilor, pentru a ajunge iar în această poziție. Or această cuprafață este $\pi d.l$, unde d este diametrul cilindrului iar l lungimea de flux a conductorului.
Atunci :

$$\Phi_0 = B l \pi d.$$

După o a doua rotație fluxul, care și-a păstrat sensul, va fi $2\ B l \pi d$, după o a 3-a rotație va fi $3 B 1 \pi d$, iar după t secunde, în care cilindrul a făcut nt rotații (n fiind numărul de rotații într-o secundă), fluxul total ce a ieșit din cilindru va fi :

$$\Phi = B l \pi d\, nt = \Phi_0\, nt$$

unde Φ_0 și n sînt două constante.

Din această ecuație care exprimă faptul că fluxul magnetic util al mașinii crește *liniar* cu timpul, rezultă că f.e.m. E, care este derivata fluxului în raport cu timpul, este o constantă și deci avem de-a face cu o mașină de curent continuu.

Puterea produsă de mașină la un curent dat I constant va fi și ea o constantă : $P = E.I$.

Iar energia transformată de mașină într-un timp t la puterea constantă P, va fi :

$$W = \int_0^t P dt = P \int_0^t dt = P \cdot t.$$

Energia transformată de mașină crește indefinit cu timpul, deci sistemul este mașină electrică, conform celor stabilite la început.

Cele mai adesea mașina unipolară se construiește fără a se mai așeza conductori izolați la periferia cilindrului, și atunci inelele se suprimă și periile se așază direct pe cilindru. Rolul conductorilor îl joacă atunci generatoarele interioare ale cilindrului, în număr infinit de mare.

Să observăm că am ajuns la concluzia că fluxul total care iese din cilindru trebuie să crească indefinit cu timpul, pentru ca sistemul să fie mașină electrică. Aceasta pare a fi în contrazicere cu principiul care ne spune că mașini de curent continuu, fără colector nu se pot construi deoarece pentru aceasta ar trebui ca un flux magnetic să crească indefinit cu timpul, ceea ce nu poate avea loc. Aceasta ar fi adevărat pentru un flux care ar străbate un anumit contur al unui circuit electric. Dar în cazul de față fluxul străbate un contur care el însuși crește indefinit cu timpul.

Uneori se explică funcționarea mașinii unipolare prin aceea că dacă ele nu au colector, poartă însă în ele principiul însuși al colectorului, prin faptul că pe linia periilor se trece de la un conductor la conductorul electric vecin ca și la mașina cu colector. Această remarcă nu salvează însă principiul colectorului, care mai cere ca periile să aibă o anumită

poziție față de statorul fix, condiție care nu este îndeplinită la mașina unipolară, la care periile pot freca oriunde pe inelele mașinii, fără ca valoarea tensiunii culese să se schimbe.

Singura explicație valabilă a funcționării mașinii unipolare de curent continuu este cea dată mai sus, bazată pe teoria unitară a mașinilor electrice, așa cum am definit-o la începutul acestui capitol. În adevăr Φ_0 fiind fluxul total care iese din cilindru pe toată suprafața lui, produs de curentul de excitație, f.s.m. E între cele două inele, o mărime continuă, constantă va fi $k\Phi_0 n$ (k fiind o constantă, iar n fiind exprimat în învîrtituri pe secundă, tot o constantă).

Puterea va fi $I k \Phi_0 n$, unde I este tot o mărime continuă, constantă, proporțională cu puterea dezvoltată de mașină.

10) **Mașini alternative trifazate cu colector derivație**

Să considerăm mai întîi cazul mașinii convertizor de viteză, în care decalajul $\beta=0$.

Aplicînd principiul suprapunerii efectelor, putem descompune mașina alternativă trifazată cu colector cu alimentare statorică într-o mașină asincronă obișnuită cu inele, cuplată în cascadă cu un convertizor de frecvență, montat pe același arbore, care transformă curentul alternativ trifazat de pulsație ω_2 din înfășurarea rotorică a motorului asincron, în curent

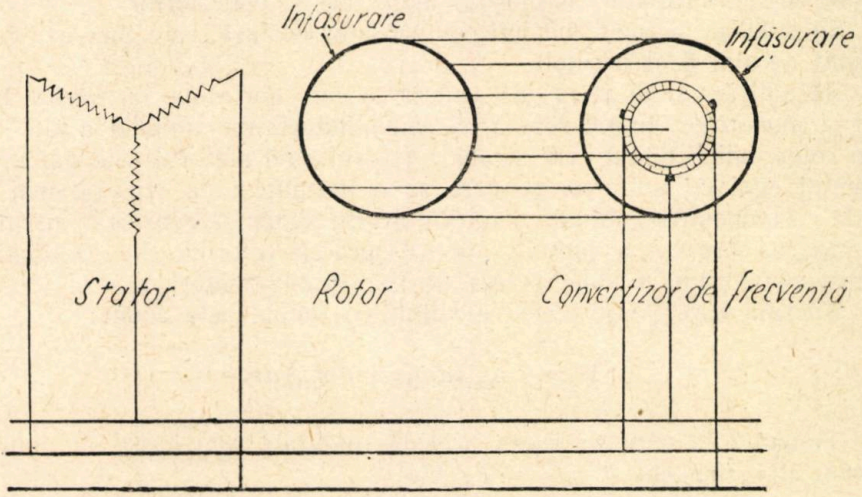


Fig. 5. Schema echivalentă a mașinii asincrone trifazate cu colector derivație cu alimentare statorică.

alternativ trifazat de pulsație ω_1 a rețelei, pe care îl culegem la periile colectivorului convertizorului de frecvență. Convertizorul de frecvență neavînd decît un singur circuit montat pe un rotor în rotație, fără cuplaj electromagnetic, nu este mașină electrică, pentru că nu poate dezvolta o energie care să crească indefinit cu timpul (fig. 5).

Cele două rotoare ale mașinii asincrone și al convertizorului de frecvență sînt riguros identice, iar cuplajul electric prin cele două inele se face de la spiră la spiră, între cîte două spire care ocupă aceeași poziție la periferia indusului. Pentru claritatea desenului am reprezentat pe figura alăturată numai șase asemenea legături. Așa fiind, mașina asincronă trifazată cu colector derivație cu alimentare statorică apare ca o mașină asincronă polifazată cu foarte multe faze în rotor, iar convertizorul de frecvență ca o înfășurare rotorică cu același număr de faze, cu inele la un capăt și cu colector și perii la celălalt capăt.

Condiția de mașină electrică, adică relațiile între pulsațiile ω_1, ω_2 și ω_3 se aplică numai mașinii asincrone necuplată la convertizor, convertizorul de frecvență fiind un simplu aparat care nu îndeplinește condiția de a fi mașină electrică.

Convertizorul de frecvență este un aparat care primește energie mecanică de la rotorul motorului asincron, dar nu transformă această energie mecanică în energie electrică pentru că nu există în aparat o înfășurare statorică, care prin inducția ei mutuală în înfășurarea statorului să producă o f.e.m în această înfășurare

Energia mecanică primită se consumă doar în micile pierderi prin frecări la paliere și la perii.

Dacă există o înfășurare statorică (înfășurarea de compensație), atunci convertizorul de frecvență devine mașină electrică, transmițînd putere activă între rotorul mașinii asincrone și convertizor.

Să studiem și cazul mașinii compensator de fază, care lucrează cu un anumit decalaj β al periilor.

Să aplicăm și în acest caz ecuația la care am ajuns la mașina bicircuit și monorotor, ținînd seama că acum inductanța mutuală a statorului prin rotor, adică fluxul care străbate rotorul cînd statorul este parcurs de curentul egal cu unitatea, pe care să o însemnăm cu m_{12}, nu mai este egală cu inductanța mutuală a rotorului prin stator pe care să o însemnăm cu m_{21}, ca urmare a faptului că înfășurarea rotorică este decalată în spațiu cu unghiul β îndărăt față de înfășurarea statorică.

Energia care poate crește indefinit cu timpul este acum:

$$W = \int_0^t i_1 i_2 (dm_{12} + dm_{21})\, dt.$$

Timpul t la care se referă această integrală este iarăși un multiplu comun al perioadelor T_1, T_2 și T_3. Fie

$$i_1 = I\sqrt{2}\cos(\omega_1 t + \varphi_1) \quad \text{și} \quad i_2 = I_2\sqrt{2}\cos(\omega_2 t + \varphi_2)$$

$$m_{12} = M\sin\left(\omega_3 t + \varphi_3 - \frac{\beta}{2}\right) \quad \text{și} \quad m_{21} = -M\sin\left(\omega_3 t + \varphi_3 + \frac{\beta}{2}\right)$$

Cele două expresii de mai sus ale inductanțelor m_{12} și m_{21} ne indică că în adevăr înfășurarea rotorică este decalată în spațiu cu unghiul β față de înfășurarea statorică.

Să efectuăm integrala de mai sus, introducînd pentru l_1, l_2, m_{12} și m_{21} aceste valori. Obținem:

$$W = 2M\omega_3 I_1 I_2 \int_0^t \cos(\omega_1 t + \varphi_1)\cos(\omega_2 t + \varphi_2)\left[\cos\left(\omega_3 t + \varphi_3 - \frac{\beta}{2}\right) - \right.$$
$$\left. - \cos\left(\omega_3 t + \varphi_3 + \frac{\beta}{2}\right)\right] dt.$$

Înlocuind cele două grupe de produse de trei cosinusuri prin sume de cosinusuri, și apoi adunînd, observăm că avem aci două grupe de produse de trei cosinusuri. Înlocuind fiecare din aceste grupe de produse de trei cosinusuri, și apoi adunînd, obținem opt integrale diferite, și anume:

$$W = 2M\omega_3 I_1 I_2 \left\{ \frac{1}{4}\int_0^t \cos\left[(\omega_1 + \omega_2 + \omega_3)t - \varphi_1 - \varphi_2 - \varphi_3 - \frac{\beta}{2}\right] dt + \right.$$
$$+ \frac{1}{4}\int_0^t \cos\left[(\omega_1 + \omega_2 - \omega_3)t - \varphi_1 - \varphi_2 + \varphi_3 - \frac{\beta}{2}\right] dt +$$
$$+ \frac{1}{4}\int_0^t \cos\left[\omega_1 - \omega_2 + \omega_3)t - \varphi_1 + \varphi_2 - \varphi_3 - \frac{\beta}{2}\right] dt +$$
$$+ \frac{1}{4}\int_0^t \cos\left[(-\omega_1 + \omega_2 + \omega_3)t + \varphi_1 - \varphi_2 - \varphi_3 - \frac{\beta}{2}\right] dt -$$
$$- \frac{1}{4}\int_0^t \cos\left[(\omega_1 + \omega_2 + \omega_3)t - \varphi_1 - \varphi_2 - \varphi_3 + \frac{\beta}{2}\right] dt -$$
$$- \frac{1}{4}\int_0^t \cos\left[(\omega_1 + \omega_2 - \omega_3)t - \varphi_1 - \varphi_2 + \varphi_3 + \frac{\beta}{2}\right] dt -$$
$$- \frac{1}{4}\int_0^t \cos\left[(\omega_1 - \omega_2 + \omega_3)t - \varphi_1 + \varphi_2 - \varphi_3 + \frac{\beta}{2}\right] dt -$$
$$\left. - \frac{1}{4}\int_0^t \cos\left[(-\omega_1 + \omega_2 + \omega_3)t + \varphi_1 - \varphi_2 + \varphi_3 + \frac{\beta}{2}\right] dt \right\}$$

Condiția ca unele din aceste integrale să crească indefinit cu timpul ne conduce la aceeași relație între ω_1, ω_2 și ω_3, ca la mașina asincronă obișnuită.

Cu aceasta se demonstrează că teoria unitară a mașinilor electrice se aplică și mașinilor asincrone trifazate cu colector derivație, indiferent dacă ele funcționează cu sau fără decalaj de perii.

11) **Motorul asincron trifazat cu colector derivație compensat**

Acest motor este format dintr-un motor asincron trifazat obișnuit cu alimentare statorică și un al doilea motor asincron trifazat cu colector derivație cu alimentare statorică, alimentat de obicei de la aceeași rețea primară prin înfășurarea statorică care joacă rol de autotransformator. Ca atare el se înscrie în teoria unitară a mașinilor electrice.

12) **Motorul asincron trifazat cu colector derivație cu alimentare rotorică** (tip Schrage)

Acest motor se descompune într-un motor asincron obișnuit cu alimentare rotorică, format din înfășurările 1 rotorică și 2 statorică și un convertizor de frecvență (înfășurarea rotorică 3), care ar putea fi montat

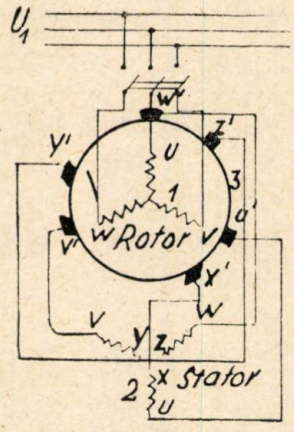


Fig. 6. Motorul asincron trifazat cu colector derivație cu alimentare rotorică

alături și antrenat de același arbore care antrenează și rotorul, ca în fig. 5, dar care în realitate este montat chiar pe arborele motorului. Poziția periilor este aleasă așa fel ca axele înfășurărilor omoloage ale statorului și rotorului să coincidă. Așa fiind, t.e.m statorică E_{2s} de frec-

venţa $f_2 = sf_1$ este în opoziţie de fază cu t.e.m rotorică E_{2r} pe care înfăşurarea rotorică o trimite prin periile fixe în stator, aşa că putem spune că acest motor cu alimentare rotorică echivalează cu motorul similar cu alimentare statorică cu perii fixe, servind numai pentru variaţia vitezei.

Înfăşurarea auxiliară 3 jucînd rolul de convertizor de frecvenţă serveşte numai pentru a putea avea în rotor un curent de frecvenţa f_2 a curentului statoric. Deosebirea faţă de motorul similar cu alimentarea statorică constă în faptul că variaţia tensiunii U_k care se aplică aci statorului, în loc să se obţină printr-un transformator cu raport de transformare K variabil, se obţine prin variaţia numărului de spire cuprinse între cele două peri mobile ale fiecărei perechi de duble perii.

Înfăşurarea rotorică 3 care constituie convertizorul de frecvenţă al înfăşurării statorice joacă în acelaşi timp şi rolul de transformator electric coborîtor de tensiune, prin faptul că ea constituie şi secundarul unui transformator al cărui primar (înfăşurarea statorică 1) este legat direct la reţeaua de frecvenţă f_1.

Aşa că, în definitiv, putem spune că motorul asincron trifazat cu colector derivaţie cu alimentare rotorică rezultă din suprapunerea a trei organe diferite: un motor asincron obişnuit cu alimentare rotorică, un convertizor de frecvenţă care este un simplu aparat de transformare, şi un transformator electric de tensiune.

Ca atare acest motor se înscrie în teoria unitară a maşinilor electrice.

13) Cazul maşinilor electrice cu caracteristică serie

Maşinile electrice cu caracteristică serie sînt maşinile în care înfăşurările celor două armături statorice şi rotorice sînt legate în serie. Pentru aceasta trebuie ca cele două înfăşurări să fie parcurse de curenţi avînd aceeaşi frecvenţă şi această frecvenţă să fie frecvenţa tensiunii U aplicată uneia din ele, aşa ca să putem scrie următoarea relaţie care defineşte funcţionarea în serie:

$$\bar{U} = \bar{Z}_1 \bar{I}_1 - \bar{E}_1 + \bar{Z}_2 \bar{I}_2 - \bar{E}_2.$$

Or şi la maşina sincronă şi la cea asincronă cele două pulsaţii ω_1 şi ω_2 sînt diferite. Trebuie atunci ca legătura între înfăşurările celor două armături să se facă printr-un convertizor de frecvenţă, adică trebuie ca una din cele două armături să aibă un colector pe care să frece perii fixe. Numai aşa sistemul bicircuit şi monorotor poate fi generator sau motor serie.

La maşina de curent continuu acest lucru se realizează prin însuşi principiul de funcţionare a maşinii de curent continuu, care oricum cere un colector şi două perii fixe. Între cele două perii fixe avem curent continuu, şi atunci conexiunea se poate face indiferent, în derivaţie sau în serie.

La maşina monofazată cu colector, cu alimentare directă sau indirectă (motorul serie simplă, motoarele de repulsie, motoarele compensate etc.), la care statorul este alimentat la tensiunea alternativă u a reţelei, de pulsaţie ω_1, numai punînd perii diametrale fixe pe colectorul

rotorului putem culege între aceste perii o f.e.m. e_2 de aceeași pulsație ω_1 ca și u, e_1, e_2, i_1 și i_2, a cărei valoare depinde de poziția celor două perii diametrale.

Să examinăm pe rînd cazul mașinilor monofazate cu colector și apoi al mașinii trifazate cu colector serie.

14) Motorul monofazat cu colector serie

Cîmpul pulsator al statorului monofazat se descompune în două cîmpuri învrtitoare constante în timp, fiecare cu $\frac{N}{2}$ spire și care se învîrtesc în sensuri contrare cu viteze $n_1 = 60\, f_1$, unde f_1 este frecvența curentului alternativ monofazat care alimentează statorul. Fiecare din aceste două cîmpuri învîrtitoare echivalează cu un inductor învîrtitor virtual parcurs de curent continuu.

Să vedem care este acțiunea fiecăruia din aceste două inductoare virtuale învîrtitoare asupra rotorului bobinat de pildă în inel, care poartă două perii diametrale fixe și care se învîrtește cu o viteză oarecare. Să vedem mai întîi care este acțiunea inductorului care se învîrtește în sensul pozitiv. Pentru aceasta să dăm întregului sistem inductor și periilor o rotație în sensul negativ cu viteza n_1. Inductorul de curent continuu și deci și fluxul pe care îl produce vor deveni fixe, iar periile se vor roti în sensul negativ cu viteza n_1. Între perii apare o f.e.m de frecvența f_1 a rețelei, adică de pulsația ω_1 a vitezei de învîrtire a periilor, independentă de viteza rotorului care intervine numai în formarea amplitudinii forței electromotoare. Dacă punem pe indusul bobinat în inel două inele care se învîrtesc cu viteza periilor, vom culege la aceste inele o f.e.m. alternativă monofazată de frecvența f_1 a rețelei. Sîntem în cazul unui motor sincron monofazat cu inductor fix și indus mobil, căruia i se aplică teoria unitară a mașinilor electrice. Fiindcă numărul de spire este $\frac{N}{2}$ cuplul produs va fi jumătate din cuplul total cerut mașinii.

La fel, dacă dăm celuilalt inductor care se învîrtește în sens negativ și acelorași perii fixe o rotație în sensul pozitiv, obținem o a doua mașină sincronă care produce același cuplu egal cu jumătate din cuplul total. Dacă readucem sistemul la situația inițială cu statoarele rotindu-se în direcții contrare și cu periile fixe, cădem în cazul real al mașinii monofazate cu colector, în care am recompus cele două statoare învîrtitoare în statorul fix care produce cîmpul monofazat pulsatoriu, și în care periile sînt fixe. La aceste perii fixe vom culege acum o f.e.m cu frecvența f_1.

Am descompus deci mașina monofazată cu colector în două mașini sincrone suprapuse de putere pe jumătate. Fiecăreia din aceste două mașini sincrone obișnuite i se aplică teoria unitară a mașinilor electrice.

Dacă legăm cele două perii la aceleași borne ale rețelei care alimentează statorul, am realizat un motor monofazat cu colector derivație ; dacă le legăm la capetele fixe ale înfășurării statorului, am realizat un motor monofazat cu colector serie.

15) Motorul monofazat cu colector de repulsie, cu perii fixe

În loc de a lega bornele înfășurării statorice direct la cele două perii diametrale ale rotorului, facem această legătură prin intermediul unui transformator de tensiune legînd bornele înfășurării statorului la bornele primarului unui transformator a cărui axă este perpendiculară pe axa înfășurării statorice de excitație, și al cărui secundar este înfășurarea rotorică după această axă a înfășurării statorice.

Aplicăm aceeași teorie a motorului monofazat serie cu colector cu deosebirea că atunci cînd dăm fluxului învîrtitor (jucînd rol de inductor de curent continuu) rotația îndărăt cu viteza n_1, spre a-l aduce în poziție fixă, odată cu rotația celor două perii ale colectorului, trebuie să dăm aceeași rotație cu aceeași viteză n_1 și primarului acestui transformator care ca poziție în spațiu este legat invariabil de poziția celor două perii diametrale. În acest fel raportul de proporționalitate între cei doi curenți statorici și rotorici și deci legătura în serie este asigurată în mod permanent.

Deci motorul de repulsie cu perii fixe se descompune în două motoare sincrone și un transformator de tensiune și ca atare se înscrie în teoria unitară a mașinilor electrice.

Motorul de repulsie cu decalaj de perii se reduce cum știm la motorul de repulsie cu perii fixe.

16) Motorul de repulsie compensat

La acest motor înfășurarea statorică joacă un dublu rol: 1. Rolul generării fluxului pulsatoriu fix de frecvență f_1 a rețelei de alimentare. 2. Rolul de a îmbunătăți factorul de putere al motorului prin periile auxiliare așezate pe axa înfășurării statorice și care sînt legate în scurtcircuit. În ce privește primul rol, ne găsim în cazul motorului serie simplu. și se aplică aceeași teorie care se înscrie în teoria unitară a mașinilor electrice. În ce privește cele de-al doilea rol, el se îndeplinește tot printr-o acțiune electromagnetică de transformator, dar nu ca un transformator care să asigure proporționalitatea curenților statorici și rotorici ca la motorul de repulsie, curentul fiind acum același în stator ca și în rotor, ci ca un transformator în care secundarul este tot înfășurarea rotorică după axa periilor auxiliare și care nu ia parte, nici el nici periile auxiliare care îi corespund, la mișcarea de rotație a celor două perii principale ale rotorului, ci rămîne fix în spațiu.

Rolul acestui transformator este de a anula căderile de tensiune din înfășurarea statorică, apropiind prin aceasta faza curentului de faza tensiunii aplicate motorului, și deci realizînd îmbunătățirea factorului de putere. Așa fiind, acest motor monofazat cu colector se înscrie pe linia teoriei unitare a mașinilor electrice tot prin descompunerea lui în două motoare sincrone și un transformator electric.

17) Mașina asincronă trifazată cu colector serie

În motorul asincron obișnuit pulsația curentului statoric ω_1 este aceiași ca și pulsația curentului rotoric.

Pentru a putea lega înfășurarea statorului în serie cu înfășurarea rotorului, aceasta nu se poate realiza decît introducînd între stator și rotor un convertizor montat pe același arbore cu rotorul, care să lege curentul alternativ de pulsație ω_1 al înfășurării rotorice de curentul alternativ de aceiaș pulsație ω_1 al statorului. Bornele statorului ar fi legate la periile care freacă pe colectorul convertizorului; cele trei inele ale convertizorului ar fi legate la rotor în trei puncte fixe decalate la 120°. Cele două înfășurări ale rotorului mașinii asincrone și ale convertizorului ar fi riguros identice, iar legătura lor s-ar face de la spiră la spiră. Dacă apoi punem rotorul convertizorului în locul rotorului mașinii asincrone împreună cu colectorul său, și pe colector așezăm cele trei perii decalate la 120°, am realizat mașina asincronă trifazată cu colector serie.

Condiția de mașină electrică, adică relațiile între ω_1, ω_2 și ω_3 se aplică numai mașinii asincrone necuplată la convertizor, convertizor fiind un simplu aparat care nu îndeplinește condițiile de a fi mașină electrică.

Catedra de mașini electrice.
Institutul politehnic București

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC BUCUREȘTI
Tomul XXVI — 1964, Fascicola 1

ENERGETICĂ

CZ. 621.318.3 : 621.311.1(R)

STUDIUL POSIBILITĂȚII DE UTILIZARE A RELEULUI RD 11 IN REȚELELE ELECTRICE DIN R.P.R.*

CORNEL PENESCU, SERGIU CĂLIN, IOSUB CHENZBRAUN

1. Tipuri de relee de distanță folosite la noi în țară.

In ultimii ani, în țara noastră au fost folosite îndeosebi releele de distanță RD7 (R.D.G.) și D110, D111 (R.S.C.). Constructiv, ele sînt realizate cu cîte un singur complet principal, cu dispozitive suplimentare.

Ambele relee au caracteristică de timp cu 4 trepte (fig. 1—1) elementul de timp fiind prevăzut cu un mic motor de curent continuu, cu regulator de turație. La valorile reglate ale timpului, elementul de timp

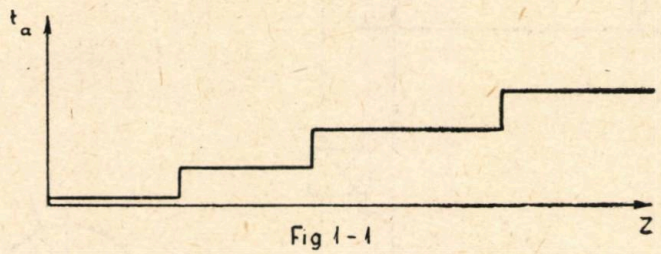


Fig 1-1

mărește raza cercului de acționare al elementului de măsură, asigurînd astfel eventualele acționări cu temporizarea treptelor II, III și IV.

Releul RD7 are pentru pornire elemente de impedanță minimă Q3, pentru rețele cu curenți mari de punere la pămînt. Schema elementelor de impedanță minimă Q3 pentru pornire (fig. 1—2) este realizată pe principiul comparării tensiunilor redresate, obținute din circuitele de tensiune și curent.

Caracteristica de demarare a elementelor Q3 (fig. 1—3) pleacă de pe axa absciselor de la $I=0{,}5\ I_{nom}$, iar la $U=U_{nom}$ rezultă $I=3\ I_{nom}$,

* Lucrare comunicată la sesiunea științifică a cadrelor didactice din Inst. Polit. Buc. 22—23 februarie 1964.

în regiunea dintre 0,5 I_r și 1,5 I_{nom} existînd un cot pronunțat. Elementele de impedanță minimă pentru pornire sînt realizate cu relee polarizate, spre deosebire de elementul de măsură, care este realizat ca releu

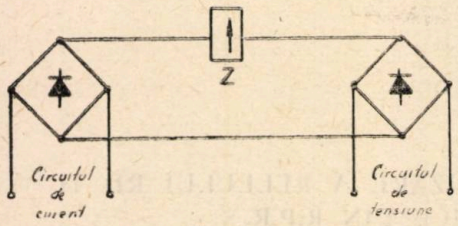


Fig. 1-2

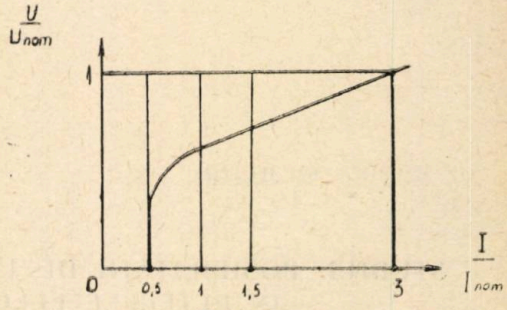


Fig. 1-3

magneto-electric cu două bobine. Caracteristica circulară a elementelor de pornire are centrul în origină.

Elementul de măsură poate funcționa fie în „schema de impedanță pură" (fig. 1—4), avînd o caracteristică circulară cu centrul în origină (fig. 1—5), fie în „schema de impedanță mixtă" (fig. 1—6), avînd caracteristica circulară deplasată (fig. 1—7) pentru considerarea influenței arcului.

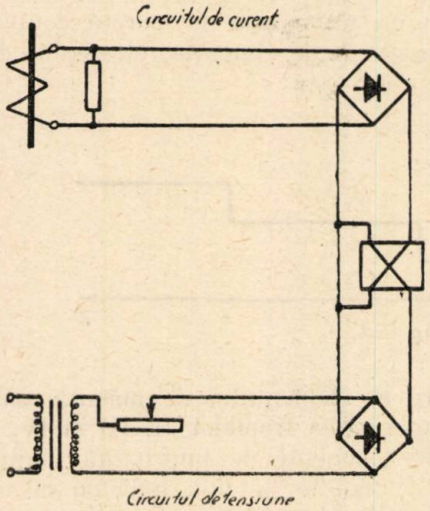


Fig. 1-4

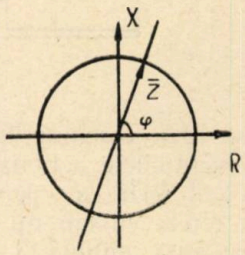


Fig. 1-5

Cu ajutorul unui dispozitiv de comutare, caracteristica elementului de măsură poate fi modificată pentru unghiuri de 60°, 70° și 80° ale liniei protejate (fig. 1—8).

Elementul direcțional este de tip ferodinamic, conectat în schemă de 90°.

Releul RD7 nu are dispozitiv de blocare la pendulări.

Releele D110, D111 au pentru pornire trei elemente de impedanță minimă cu caracteristică circulară deplasată (fig. 1—9), schema de conexiuni fiind realizată prin compararea tensiunilor (fig. 1—10), cu un releu

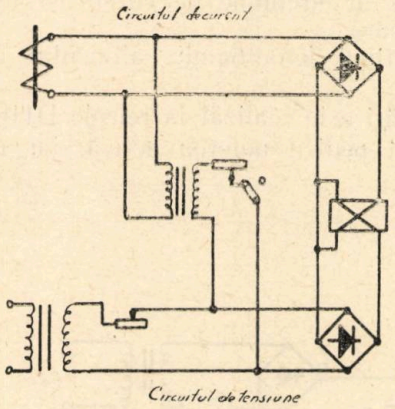


Fig. 1-6

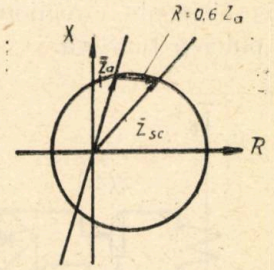


Fig. 1-7

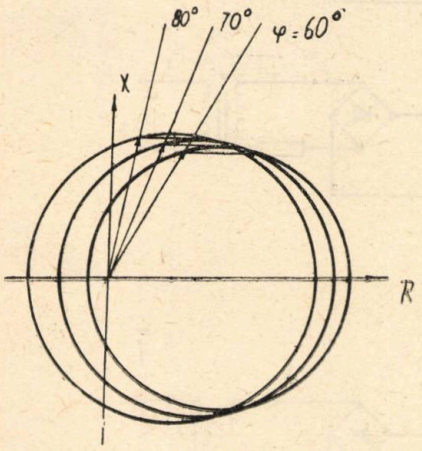


Fig. 1-8

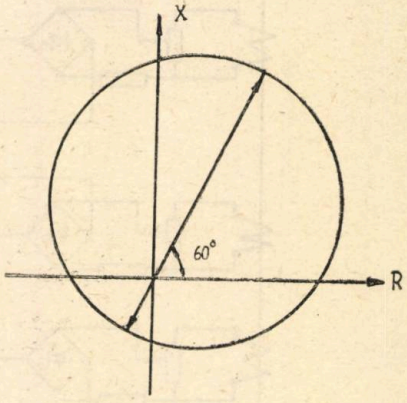


Fig. 1-9

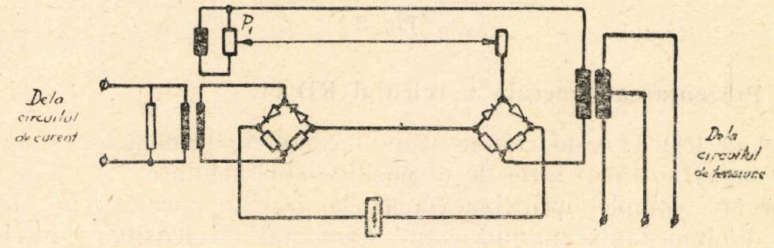


Fig. 1-10

polarizat cu o singură înfășurare. Deplasarea caracteristicii se obține aplicînd în circuitul de tensiune o parte a tensiunii obținută din circuitul de curent, prin intermediul potențiometrului P_1.

Elementul de măsură este realizat cu o schemă cu compararea tensiunilor, cu posibilități de comutare în circuitele de curent și tensiune, avînd un releu cu o singură înfășurare.

Elementul direcțional este de tipul ferodinamic, alimentat cu tensiunile între faze.

Dispozitivul de blocaj la pendulări este realizat la releele D110, D111 cu două elemente direcționale, unul pentru puterea activă, iar celălalt, pentru puterea reactivă.

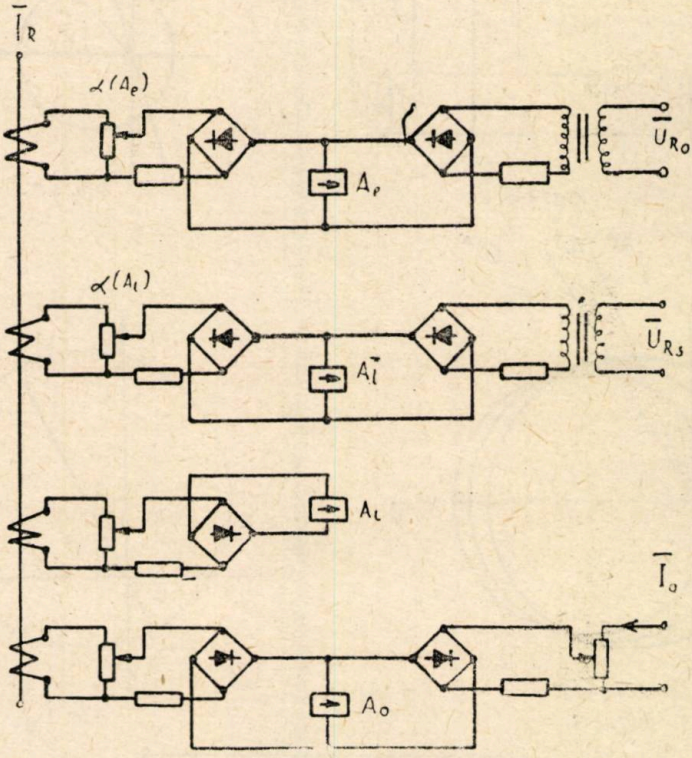


Fig. 2-1

2. Prezentarea generală a releului RD 11.

Releul RD 11 este compus din 3 complete principale (cîte unul pe fiecare fază) și din o serie de dispozitive suplimentare.

Fiecare complet principal cuprinde pentru pornire cîte două elemente de impedanță minimă, unul alimentat cu tensiunea pe fază, iar celălalt cu tensiunea între faze (fig. 2—1). O calitate a releului RD 11

constă în faptul că sînt prevăzute pentru pornire aceste două elemente de impedanță minimă în completul fiecărei faze, cu scopul de a nu mai fi necesare comutări în circuitele elementelor de pornire la diverse tipuri de defecte. Elementele de impedanță minimă sînt realizate cu relee polarizate cu o singură înfășurare, prin care circulă în sensuri opuse curenții redresați din circuitul de tensiune și din circuitul de curent.

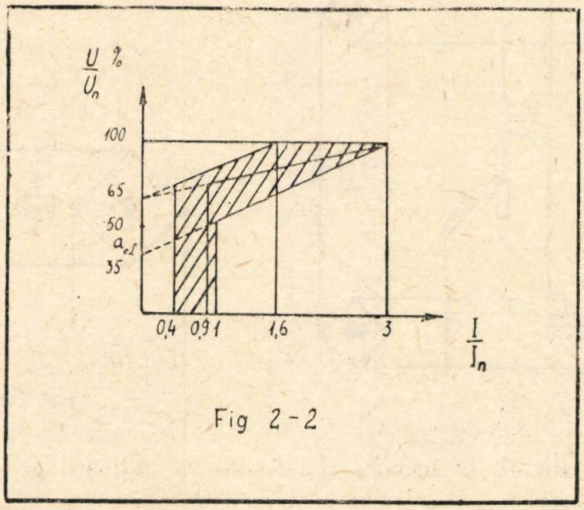


Fig 2-2

Caracteristica de pornire poate fi reglată în limite largi: punctul de plecare de pe axa absciselor poate fi modificat în gama 0,4 I_{nom} ÷ 1 I_{nom} (fig. 2—2), iar pentru $U=U_{nom}$ valoarea corespunzătoare curentului poate fi stabilită între 1,6 I_{nom} și 3 I_{nom}, cu modificarea dorită a pantei celui de al doilea segment al caracteristicii.

În laboratorul de Automatizări și telecomenzi al catedrei de Automatizări din I.P.B. au fost verificate experimental caracteristicile de pornire.

Elementul de măsură al fiecărui complet al releului RD 11 poate funcționa — ca și la releul RD 7 — în „schema cu impedanță pură" sau în „schema cu impedanță mixtă" (fig. 2—3), cu deplasarea caracteristicii circulare în sensul axei R, pentru compensarea influenței arcului electric. Sînt prevăzute pozițiile caracteristicilor de acționare pentru unghiuri de 70° și 80° ale liniei protejate.

Elementul de măsură este realizat cu un releu polarizat, cu o singură înfășurare, prin care circulă diferența curenților redresați din circuitul de tensiune și din circuitul de curent.

Schema de măsură este prevăzută cu un dispozitiv de asigurare a acționărilor corecte (RSV 4) la scurtcircuite monofazate pe linii cu dublu circuit (paralele), analizat în cap. 5.

O altă calitate a releului RD 11 constă în faptul că elementul direcțional este realizat ca releu polarizat, cu o singură înfășurare (fig. 2—4), prin care circulă diferența curenților debitați de două punți redresoare, fiecare dintre acestea fiind alimentate în mod corespunzător și din circuitele de tensiune și din circuitele de curent.

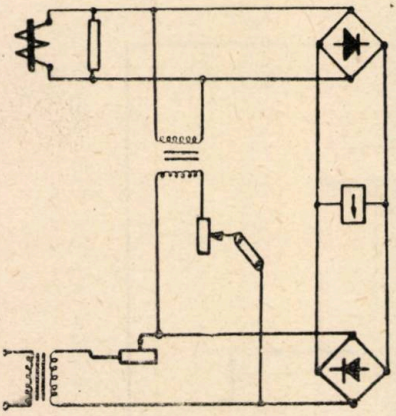


Fig. 2-3

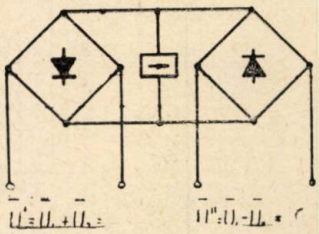


Fig. 2-4

Această realizare se bazează pe faptul că indicații asupra defazajului dintre doi vectori

$$\overline{U}_1 = K_1 \overline{U}_r$$

și

$$\overline{U}_2 = K_2 \overline{I}_r$$

pot fi obținute prin compararea modulelor vectorilor

$$\overline{U}' = \overline{U}_1 + \overline{U}_2$$

și

$$\overline{U}'' = \overline{U}_1 - \overline{U}_2$$

Într-adevăr, după cum se vede în fig. 2—5, în cazul cînd

$$0 < \varphi < 90° \qquad (2.1)$$

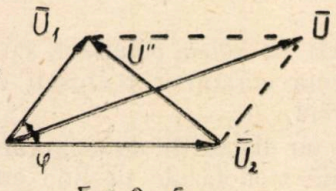


Fig 2-5

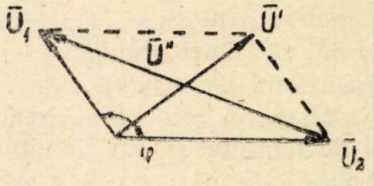


Fig. 2-6

rezultă

$$|\bar{U}'| > |\bar{U}''|; \tag{2.2}$$

din fig. 2—6 rezultă că în cazul cînd

$$90° < \varphi < 180° \tag{2.3}$$

rezultă

$$|\bar{U}'| < |\bar{U}''| \tag{2.4}$$

Pentru

$$\varphi = 90°,$$

evident

$$|\bar{U}'| = |\bar{U}''|$$

Relațiile (2.1), (2.2) și (2.3), (2.4) sînt valabile indiferent de valorile modulelor vectorilor $\bar{U}_1$ și $\bar{U}_2$.

Releele construite pe principiul comparării modulelor $|\bar{U}'|$ și $|\bar{U}''|$ sesizează prin urmare dacă decalajul dintre vectorii $\bar{U}_1$ și $\bar{U}_2$ se găsește în domeniul $\varphi < 90°$ sau $\varphi > 90°$, deci acționează în funcție de semnul mărimii $\cos\varphi$, îndeplinind astfel rolul releelor direcționale.

Se poate ușor constata că pentru

$$180° < \varphi < 270°$$

(deci φ în cadranul III) rezultă

$$|\bar{U}'| < |\bar{U}''|$$

ca și pentru φ în cadranul II, iar pentru

$$270° < \varphi < 360°$$

(deci în cadranul IV) rezultă

$$|\bar{U}'| > |\bar{U}''|$$

ca și pentru φ în cadranul I, releul acționînd deci ca și un releu direcțional, deosebind cazurile cînd $\cos\varphi > 0$ și $\cos\varphi < 0$.

Releul RD 11 include și un dispozitiv de automatizare RAR, în interiorul blocului Sli 2 P 11, (care cuprinde blocajul de pendulări și dispozitivul RAR), și deci are avantajul că nu necesită un dispozitiv separat de RAR.

3. Comportarea protecției la suprasarcină.

Diagrama de acțiune a organelor de pornire A_l (ca și A_e dealtfel) în planul R, X este un cerc cu centrul în origine, (fig. 3—1). După cum se știe o asemenea caracteristică (dacă nu sînt prevăzute anumite măsuri speciale) este în general dezavantajoasă la liniile lungi și foarte încărcate, deci tocmai la liniile pentru care este conceput acest releu. Dezavan-

tajul constă în faptul că organele de pornire sînt la fel de sensibile atît la defecte cît și la suprasarcini și deci în cazul asigurării unei sensibilități corespunzătoare la o linie lungă există pericolul pornirii protecției la suprasarcină. Într-adevăr după cum se vede în fig. 3—1 impedanța de acționare este aceeași indiferent de unghiul acesteia adică atît

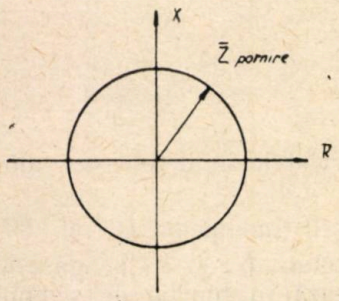


Fig. 3-1

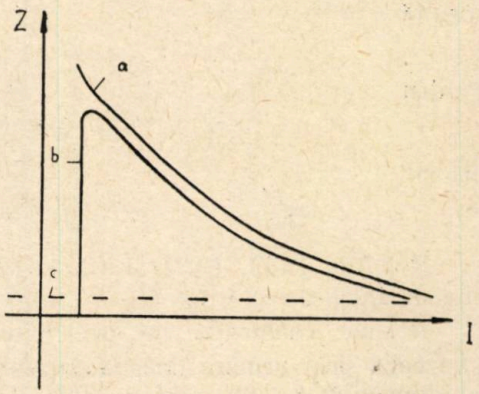


Fig. 3-2

în cazul defectului, adică la unghiuri mari, cît și în cazul suprasarcinei (unghiuri mici).

Releele moderne realizează o sensibilitate mare la defecte simultan cu o mare capacitate de transport datorită unor caracteristici de acționare speciale în formă de cerc deplasat, elipsă, hiperbolă etc., care toate țin seama tocmai de diferența ce există între unghiul impedanței de defect și al celei de sarcină.

Protecția RD 11 are și ea totuși, deși caracteristica de pornire în planul Z este un cerc ca centrul în origine, o sensibilitate diferită la defecte și suprasarcină realizată însă pe altă cale, prin variația impedanței de acționare cu curentul.

După cum se știe curba variației impedanței de sarcină — măsurate de releu — cu curentul $\left(Z_s = \frac{U}{\sqrt{3}\, I}\right)$ are forma unei hiperbole (curba a din fig. 3—2).

Organele de pornire ale protecței RD 11 sînt astfel realizate încît impedanța de acționare a acestora în funcție de curent are o alură asemănătoare (curba b din fig. 3—2). Este ușor de observat că în cazul în care curba *b* este situată mereu sub curba *a* pericolul unei declanșări la suprasarcină este evitat; din aceeași figură este de asemenea ușor de observat avantajul pe care îl prezintă o asemenea curbă $Z_{act} = f(I)$ față de cea a unui releu avînd $Z_{act} = \text{const}$ (curba *c*).

Pentru a nu se produce declanșări la suprasarcină impedanța constantă de acționare a unui asemenea releu ar trebui să fie foarte mică și ea ar fi deci foarte mică și în zona curenților mici unde este posibilă mărirea sensibilității; curba *b* realizează această mărire a sensibilității

la curenți mici — foarte importantă pentru că tocmai la scurtcircuite depărtate curenții sînt mici, și-și micșorează după cum se vede sensibilitatea de zona curenților mari — deci la suprasarcină.

Organele de pornire ale protecției RD 11 realizează o asemenea caracteristică de acționare $Z_{ac} = f(I)$ avantajoasă datorită unei parti-

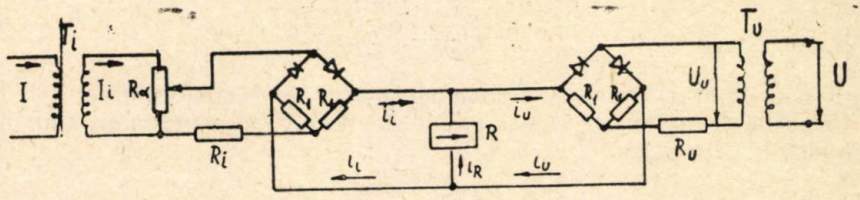


Fig. 3 - 3

cularități constructive. Aceste organe sînt de fapt relee de impedanță realizate din relee cu bobină rotitoare alimentate după principiul „balanței electrice" cu mărimi în prealabil redresate ca la majoritatea releelor moderne, schema lor principială (în care s-au ales notații arbitrare) fiind cea din fig. 3—3.

Particularitatea constructivă prin care se realizează curba de acționare *b* din fig. 3—2, în locul curbei *c* constă în montarea resortului antagonist în așa fel încît el tinde să închidă contactele acționînd în același sens cu curentul ce alimentează releul, și în sens contrar cu tensiunea ce tinde să le deschidă.

Din analiza funcționării schemei din fig. 3—3 pentru determinarea condiției de acționare a releului R_r expusă pe scurt în cele ce urmează, rezultă felul în care organul de pornire realizează o curbă de acționare de felul celei din fig. 3—2, b.

Releul *R* este după cum s-a arătat un releu cu bobină rotitoare care acționează închizîndu-și contactele, cînd curentul I_R circulînd în sensul indicat în figură (adică în sensul curentului ce tinde să-l impună tensiunea aplicată) scade în asemenea măsură încît cuplul ce-l dezvoltă devine mai mic decît cuplul dezvoltat de resort.

Acționarea protecției se produce deci pentru $K_R I_R < F_r$ respectiv pentru $I_R < \frac{F_r}{K_R}$.

Pentru determinarea expresiei curentului I_R din schema din fig. 3—3 se poate folosi principiul suprapunerii efectelor în aplicarea căruia trebuie considerate ca surse independente curentul I_i și tensiunea U_u care într-adevăr nu depind decît de factori exteriori schemei și nu se influențează prin legăturile acesteia (fapt constatat și experimental).

Aplicînd principiul suprapunerii efectelor la schema din fig. 3—3 — se obține pentru I_R expresia $I_R = K_1 U_u - K_2 I_i$ (K_1 și K_2 fiind factori ce

depind de valorile elementelor din schemă) și deci condiția de acționare devine :

$$K_1 U_u - K_2 I_i \leqslant \frac{F_r}{K_R} \tag{3.1}$$

respectiv

$$U_u \leqslant \frac{F_r}{K_R K_1} + \frac{K_2}{K_1} I_i \tag{3.2}$$

K_{Ti} și K_{Tu} fiind rapoartele de transformare ale transformatoarelor Ti și Tu, condiția de acționare a organelor de pornire exprimată în funcție de tensiunea U și curentul I ce i se aduc este

$$U = \frac{F_r}{K_R K_1 K_{Tu}} + \frac{K_2}{K_1} \frac{K_{Ti}}{K_{Tu}} I \tag{3.3}$$

Notînd

$$\frac{F_r}{K_R K_1 K_{Tu}} = K_r \text{ și } \frac{K_2}{K_1} \frac{K_{Ti}}{K_{Tu}} = m$$

Condiția de acționare devine

$$U = K_r + m I \tag{3.4}$$

sau (exprimată în funcție de Z)

$$Z = m + \frac{K_r}{I}. \tag{3.5}$$

Din această ultimă expresie rezultă și diagrama de acționare a organelor de pornire care este deci o hiperbolă (ce tinde asimptotic nu la axa

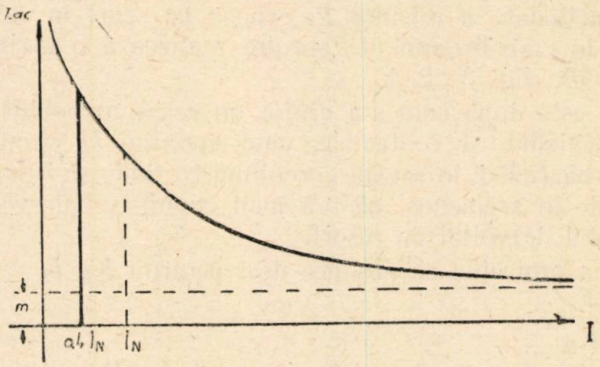


Fig. 3-4

absciselor ci la o axă orizontală de ordonată m) adică o caracteristică de felul celei necesare. Schema de curent continuu a protecției conține un releu de blocaj Ai reglabil prin care se poate stabili valoarea minimă a curentului la care se produce acționarea, între 0,4 I_N și I_N, astfel că diagrama de acționare nu începe de la $I=0$ după cum se vede din fig. 3—4.

După cum se știe diagrama folosită pentru verificarea sensibilității și a capacității de transport a protecțiilor de distanță este $U_{pornire} = f(I)$ adică diagrama ce corespunde expresiei (3.4) a condiției de acționare, prezentată în fig. 3—5 unde (ca și în fig. 3—4) este figurată acțiunea releului reglabil de blocaj Ai ce determină începutul diagramei.

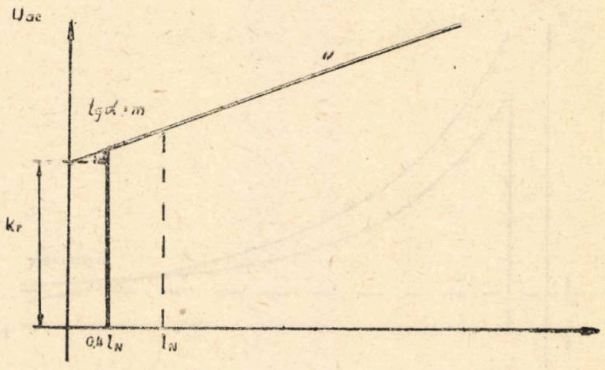


Fig. 3-5

Diagrama de acționare $U_{ac} = f(I)$ a organelor de pornire este deci o dreaptă având ordonata originei K_r și coeficientul unghiular m.

După cum rezultă din expresiile (3.3) și (3.4) ale condiției de acționare precum și din fig. 3—3 cei doi parametri K_r și m ai diagramei pot fi reglați ușor și independent. Într-adevăr ordonata K_r se poate regla prin modificarea lui F_r adică a tensiunii resortului releului iar m se poate regla prin modificarea lui K_2 care se realizează prin variația poziției cursorului reostatului R_α (modificarea lui R_α duce la modificarea porțiunii din curentul total I_i ce străbate releul R și deci la schimbarea coeficientului de proporționalitate K_2).

În felul acesta, prin modificarea tensiunii resortului printr-un indicator în dreptul unei scale având 3 gradații, prin modificarea poziției cursorului reostatului R_α precum și prin reglarea releului A_i se pot obține o multitudine de caracteristici de acționare ale organelor de pornire corespunzător condițiilor impuse de linia protejată din punctul de vedere al sensibilității și capacității de transport.

În fig. 2—2 este indicat domeniul diagramelor posibile de acționare a organelor de pornire (zona hașurată), cele trei ordonate ale originei ce se pot realiza cu ajutorul scalei resortului precum și o diagramă de acționare a releului corespunzînd lui K_r maxim și m minim și unui reglaj al releului A_i de $0{,}9\,I_N$.

Menționăm că scala resortului e etalonată în valori ale tensiunii exprimată în procente din cea nominală, iar scala potențiometrului R_α în valori ale multiplului lui I_N ce corespund la $U_N = 100\%$ pentru panta aleasă.

Diagrama de acționare este ca formă principial avantajoasă din motivele arătate mai sus și ea este în particular avantajoasă prin domeniul

de reglaj de care dispune, pentru liniile de 220 *KV* de lungime mare şi puternic încărcate cum vor fi cele din ţara noastră. Astfel după cum se vede se pot realiza capacităţi mari de transport 3 I_N la U_N) simultan cu sensibilităţi mari (acţionare la I_N pentru $U=50\%\ U_N$). De asemenea posibilitatea de modificare a pantei caracteristicei permite adaptarea pro-

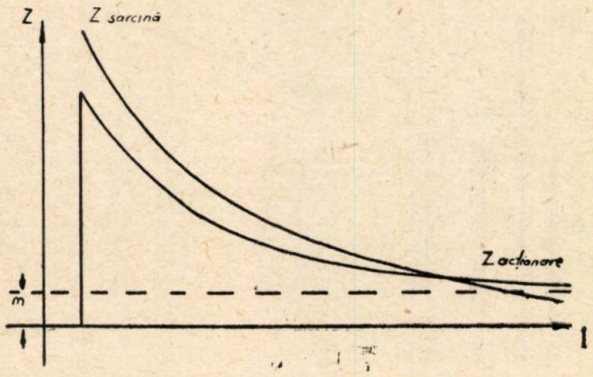


Fig. 3—6

tecţiei la condiţii diferite determinate de nivelul de tensiune ce poate varia în anumite perioade ale anului sau în funcţie de anumite situaţii speciale în exploatare. Din aceste motive, din punct de vedere al caracteristicii organelor de pornire se poate spune că protecţia RD 11 prezintă o serie de calităţi ce pot justifica folosirea ei în reţeaua noastră.

Totodată trebuie arătate şi unele dezavantaje ale organelor de pornire care impun oarecari limite domeniului de folosire. Astfel caracteristica de acţionare realizată nu suplineşte în mod absolut avantajul releelor cu caracteristică deplasată, care disting net defectul de suprasarcină. În domeniul curenţilor foarte mari, după cum se poate vedea din fig. 3—6 impedanţa de acţionare (care după cum s-a menţionat nu tinde asimptotic spre 0 ci spre valoarea m) intersectează hiperbola Z_{sarc} şi urcă deasupra ei, ceea ce evident duce la acţionări la suprasarcină.

Din acest motiv protecţia RD 11 nu va putea fi adaptată la liniile la care pot apare ca urmare a unor avarii — fie chiar şi pentru durate scurte — suprasarcini foarte mari.

4. Adaptarea releului RD 11 pentru linii cu unghiuri ale impedanţelor diferite de 70° sau 80°.

Releul RD 11 are un dispozitiv de comutare cu două poziţii, pentru care se obţine caracteristica circulară de acţionare a elementului de măsură corespunzătoare unor unghiuri de 70° şi 80° ale impedanţei liniei protejate.

Pentru a funcţiona corect şi pe linii ale căror impedanţe au unghiuri φ_L diferite de aceste valori, este necesar ca valoarea impedanţei de acţionare Z_a (determinată pentru valoarea de 70° sau 80°) să fie diferită de

valoarea impedanței a zonei protejate, introducîndu-se un factor de corecție. Totodată, după cum se va vedea în cele ce urmează, va rezulta și o modificare a raportului dintre rezistența maximă (pentru care se asigură acționarea) a arcului la defecte la capătul zonei și impedanța zonei protejate Z_L — raport care este egal cu 0,6 atunci cînd unghiul impedanței liniei are o valoare egală cu 70° sau 80°.

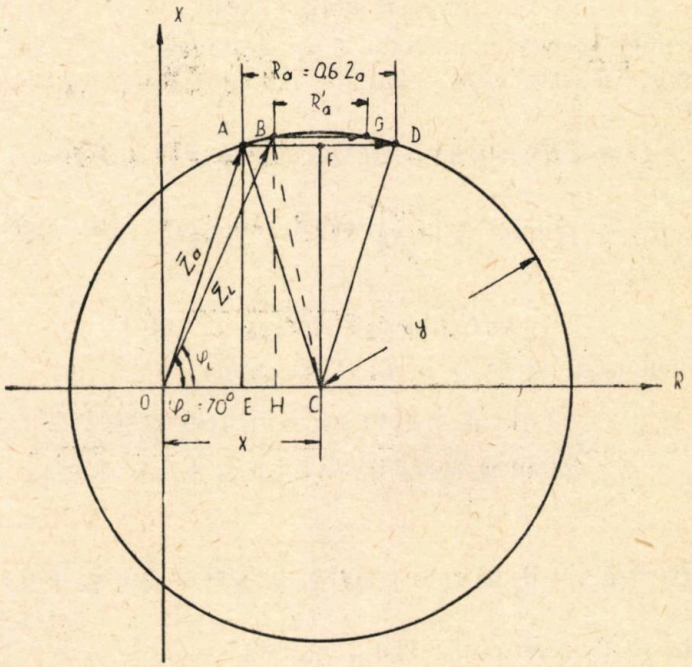


Fig. 4-1

În scopul determinării factorilor de corecție necesari, să considerăm o caracteristică de acționare (fig. 4—1) corespunzătoare unei anumite impedanțe de acționare Z_a a elementului de măsură și unui unghi $\varphi_a = 70°$, dispozitivul de comutare fiind pe poziția de 70°.

Dacă impedanța liniei are un unghi φ_L diferit de φ_a, atunci evident elementul de măsură va acționa la o valoare Z_L (a impedanței) diferită de Z_a modificîndu-se bineînțeles și lungimea zonei protejate.

Se poate stabili o relație între Z_L și Z_a, de forma

$$Z_L = f(Z_a, \varphi_a, \varphi_L)$$

pornind de la faptul că în triunghiul OCB (C fiind centrul cercului) există relația

$$\overline{OB} = \overline{OC}\cos\varphi_L \pm \sqrt{\overline{CB}^2 - \overline{OC}^2 \cdot \sin^2\varphi_L} \qquad (4.1)$$

Distanța $\overline{OC}$ este abscisa centrului cercului. Notînd $\overline{OC} = x$, această valoare se obține ușor în funcție de Z_a, φ_a și $R_a = 0{,}6\, Z_a$:

$$\overline{OC} = x = \overline{OE} + \overline{EC} = Z_a \cos \varphi_a + \frac{R_a}{2} = Z_a \cos \varphi_a + \frac{0{,}6\, Z_a}{2} =$$

$$= Z_a (\cos \varphi_a + 0{,}3) \tag{4.2}$$

punctul E fiind proiecția punctului A pe axa reală.

Distanța $\overline{CB}$ este raza cercului; notînd $\overline{CB} = y$, valoarea razei se obține din:

$$y^2 = \overline{CB}^2 = \overline{CA}^2 = \overline{CF}^2 + \overline{FA}^2 = \overline{AE}^2 + \overline{FA}^2 =$$

$$= (Z_a \cdot \sin \varphi_a)^2 + \left(\frac{R_a}{2}\right)^2 = (Z_a \cdot \sin \varphi_a)^2 + (0{,}3\, Z_a)^2$$

deci

$$y = \overline{CB} = Z_a \sqrt{\sin^2 \varphi_a + 0{,}09} \tag{4.3}$$

Înlocuind (4.2) și (4.3) în (4.1) se obține

$$Z = \overline{OB} = Z_a (\cos \varphi_a + 0{,}3) \cos \varphi_L \pm$$
$$\pm \sqrt{Z_a^2 (\sin^2 \varphi_a + 0{,}09) - Z_a^2 (\cos \varphi_a + 0{,}3)^2 \cdot \sin^2 \varphi_L}$$

respectiv

$$Z_L = Z_a \left[(\cos \varphi_a + 0{,}3) \cos \varphi_L \pm \sqrt{\sin^2 \varphi_a + 0{,}09 - (\cos \varphi_a + 0{,}3)^2 \cdot \sin^2 \varphi_L} \right] \tag{4.4}$$

Relația (4.4) reprezintă relația căutată

$$Z_L = f(Z_a, \varphi_a, \varphi_L).$$

Din (4.4) rezultă imediat

$$Z_a = Z_L \cdot \frac{1}{(\cos \varphi_a + 0{,}3) \cos \varphi_L \pm \sqrt{\sin^2 \varphi_a + 0{,}09 - (\cos \varphi_a + 0{,}3)^2 \cdot \sin^2 \varphi_L}} \tag{4.5}$$

Cu ajutorul relației (4.5) se determină valoarea de acționare necesară Z_a, la care trebuie reglat releul cînd dispozitivul de comutare se găsește pe poziția φ_a (70° sau 80°), iar impedanța liniei are un unghi $\varphi_L \neq \varphi_a$ și zona protejată este definită de impedanța Z_L.

Prin acest mod de reglaj, caracteristica corespunzătoare impedanței Z_a și poziției φ_a a dispozitivului de comutare va trece prin vîrful vectorului $\overline{Z}_L = Z_L \cdot e^{j\varphi_L}$, asigurînd acționarea corectă la defecte pînă la limita zonei protejate.

Raportul

$$K = \frac{Z_a}{Z_L} = \frac{1}{(\cos\varphi_a + 0{,}03)\cos\varphi_L \pm \sqrt{\sin^2\varphi_a + 0{,}09 - (\cos\varphi_a + 0{,}3)^2 \cdot \sin^2\varphi_L}} \quad (4.6)$$

reprezintă factorul de corecție menționat anterior.

Pentru radicalul de la numitor se adoptă semnul astfel încît să rezulte $K > 0$.

Din fig. 4—1 se constată că dacă prin reglajul descris se asigură respectarea lungimii zonei protejate, nu se mai obține însă valoarea 0,6 pentru raportul dintre $R'_a = \overline{BG}$ și Z_L, întrucît (în cazul considerat, cu $\varphi_L < \varphi_a$) $Z_a < Z_L$ și $R_a = 0{,}6\ Z_a > R'_a$.

Se modifică deci rezerva asigurată pentru rezistența arcului la un defect la capătul zonei.

Noul raport $\frac{R'_a}{Z_L} \neq 0{,}6$ se poate determina pornind de la relația

$$R'_a = 2\,\overline{HC} = 2\,(OC - \overline{OH}) = 2\,(x - Z_L \cos\varphi_L) \quad (4.7)$$

Înlocuind (4.2) în (4.7) se obține

$$R'_a = 2\,[Z_a\,(\cos\varphi_a + 0{,}3) - Z_L \cos\varphi_L] \quad (4.8)$$

Din (4.6) rezultă

$$Z_a = K \cdot Z_L \quad (4.9)$$

și înlocuind (4.9) în (4.8) se obține

$$R'_a = 2\,[K Z_L\,(\cos\varphi_a + 0{,}3) - Z_L \cos\varphi_L] =$$
$$= 2\,Z_L\,[K\,(\cos\varphi_a + 0{,}3) - \cos\varphi_L] \quad (4.10)$$

de unde

$$\frac{R'_a}{Z_L} = 2\,[K\,(\cos\varphi_a + 0{,}3) - \cos\varphi_L] \quad (4.11)$$

În cazul cînd $\varphi_L < \varphi_a$, rezultă $Z_a < Z_L$

și

$$\frac{R'_a}{Z_L} < 0{,}6, \text{ iar cînd } \varphi_L > \varphi_a,$$

se obține

$$Z_a > Z_L \text{ și } \frac{R'_a}{Z_L} > 0{,}6$$

Cu ajutorul relației (4.5) se asigură reglajul corect al releului în condițiile menționate $\varphi_L \neq \varphi_a$, iar cu relația (4.11) se obține valoarea rezervei care rezultă pentru rezistența arcului la defecte la capătul zonei protejate.

5. Funcționarea protecției RD 11 la defecte cu pămîntul în cazul liniilor cu circuit dublu.

După cum se știe, în cazul liniilor cu circuit dublu impedanța măsurată de protecția de distanță a unui circuit la un defect pe acesta diferă după cum defectul este sau nu cu atingerea pămîntului, datorită inducției mutuale dintre cele 2 circuite ce se manifestă doar la defectele la care apare și curent homopolar. Totodată, evident chiar în cazul defectelor cu pămîntul impedanța măsurată de protecția unui circuit va fi diferită după cum al 2-lea circuit este sau nu în funcțiune.

Această variație a impedanței măsurate determinată de regimul de funcționare al rețelei constituie în general un neajuns important al protecției de distanță care a fost introdusă în rețele și are o mare răspîndire, tocmai datorită faptului că sensibilitatea ei nu depinde de configurația și regimul de funcționare al rețelei.

Acest neajuns existent la protecțiile de distanță cunoscute și folosite pînă în prezent la noi este eliminat la protecția RD 11 prin aplicarea unei soluții găsite de Kadner și aceasta constituie o calitate deosebită a protecției RD 11.

Dată fiind importanța acestei probleme pentru rețeaua din țara noastră unde există un mare număr de linii duble de 110 kV și unde una din primele linii de 220 kV va avea circuit dublu, precum și datorită faptului că defectele cu pămîntul sînt cele mai frecvente, am efectuat o analiză detaliată a comportării protecției RD 11 la linii duble la asemenea defecte — analiză expusă mai jos.

Pentru evidențierea avantajelor soluției folosite de releele RD 11 (Kadner) am analizat și comportarea la asemenea defecte a protecției celei mai răspîndite în rețeaua noastră — RD 7 analiză valabilă dealtfel și pentru alte tipuri de protecție de distanță folosite la noi cum ar fi D 200, D 110 și D 111.

Soluția adoptată este de fapt o extindere a metodei folosite în protecțiile de distanță pentru realizarea unei sensibilități unice a organelor de măsură — independentă de natura defectului.

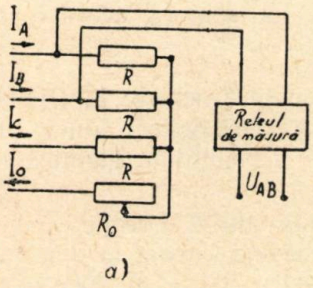
După cum se știe în protecțiile de tipul celor menționate mai sus, această sensibilitate unică se realizează prin alimentarea organului de măsură la toate tipurile de defecte (cu sau fără pămînt) cu o tensiune și un curent al căror raport este întotdeauna proporțional cu impedanța pe fază de secvență directă a liniei pînă la punctul de defect.

După cum se vede în fig. 5—1 a și b, în cazul unui scurtcircuit bifazic AB (și situația e similară și pentru defect între alte faze) releului de măsură i se aduce tensiunea U_{AB} și căderea de tensiune $|R(\bar{I}_A - \bar{I}_B)|$, iar in cazul unui scurtcircuit monofazic — tensiunea U_{A0} și căderea de tensiune $|R\bar{I}_A + R_0\bar{I}_0|$. Releul de măsură reacționînd la raportul dintre mărimile aduse, va măsura în primul caz impedanța $\frac{U_{AB}}{R|\bar{I}_A - \bar{I}_B|}$ iar în al doilea caz $\frac{U_{A0}}{|R\bar{I}_A + R_0\bar{I}_0|}$.

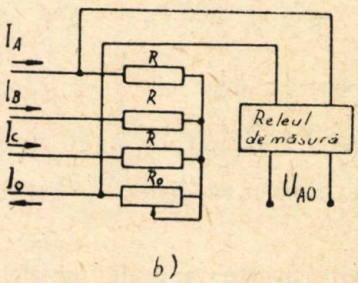
La producerea unui scurtcircuit bifazic AB pe linia protejată la o distanță ce corespunde unei impedanțe directe Z_{dk} relația între tensiunea de defect în locul instalării protecției și curenții de defect este

$$\bar{U}_{AB} = \bar{Z}_{d\,sc}\,(\bar{I}_A - \bar{I}_B) \tag{1}$$

și deci raportul măsurat de releu este $\dfrac{Z_{d\,sc}}{R}$.



a)



b)

Fig. 5-1

La producerea unui scurtcircuit monofazic $A0$ relația între tensiunea și curentul de defect este mai complicată și se determină astfel:

$$U_{A0} = \bar{I}_d\,\bar{Z}_d + \bar{I}_i\,\bar{Z}_i + \bar{I}_h\,\bar{Z}_h \tag{2}$$

Cum la un asemenea defect $\bar{I}_A = \bar{I}_d + \bar{I}_i + \bar{I}_h$ și $\bar{I}_h = \dfrac{\bar{I}_0}{3}$ iar $\bar{Z}_d = \bar{Z}_i$ relația (2) se mai poate scrie:

$$\bar{U}_{A0} = \bar{Z}_d\,(\bar{I}_d + \bar{I}_i + \bar{I}_h) - \bar{Z}_d\,\bar{I}_h + \bar{Z}_h\,\bar{I}_h = \bar{Z}_d\left[\bar{I}_A + \bar{I}_0\,\frac{\bar{Z}_h - \bar{Z}_d}{3\,\bar{Z}_d}\right]$$

Considerînd pentru simplificare (ceea ce nu reduce valabilitatea raționamentului) că $\bar{Z}_h$ și $\bar{Z}_d$ au același unghi și notînd $\dfrac{Z_h - Z_d}{3\,Z_d} = k_0$ relația (2) devine

$$\bar{U}_{A0} = \bar{Z}_{d\,sc}\,(\bar{I}_A + k_0\,\bar{I}_0) \tag{3}$$

şi în general în cazul unui scurtcircuit monofazic

$$\bar{U}_f = \bar{Z}_{d\,sc}(\bar{I}_f + k_0 \bar{I}_0) \tag{4}$$

unde $\bar{I}_0$ este suma curenţilor de fază.

După cum s-a văzut mai sus releul de măsură măsoară impedanţa

$$\frac{U_{A0}}{|R\bar{I}_A + R_0\bar{I}_0|} = \frac{U_{A0}}{R\left|\bar{I}_A + \frac{R_0}{R}\bar{I}_0\right|}$$

Se observă deci că dacă raportul rezistenţelor din releu $\frac{R_0}{R} = k$ e ales astfel încît să fie egal cu k_0, releul va măsura ca şi în cazul defectului bifazic raportul $\frac{Z_{d\,sc}}{R}$ şi deci se va asigura aceeaşi sensibilitate.

În felul acesta la toate releele menţionate (inclusiv la RD 11) prin reglarea rezistenţei R_0 corespunzător caracteristicilor liniei protejate (pentru a se obţine $k=k_0$) se realizează o sensibilitate identică la toate tipurile de defecte.

Exprimată altfel, această metodă constă într-o corecţie ce se introduce în circuitul de curent al releului de măsură căruia la defecte monofazice nu i se mai aduce ca la defecte bifazice U_{def} şi $2I_{def}$ ci U_{def} şi $I_{def} + k_0 I_0$, raportul între mărimile aduse fiind în ambele cazuri acelaşi — $Z_{d\,sc}$.

Metoda aceasta este după cum s-a văzut eficace în cazul liniilor simple dar ea nu mai este suficientă în cazul liniilor cu dublu circuit datorită inducţiei mutuale homopolare la care factorul de corecţie k_0 (determinat din impedanţa homopolară proprie a unui circuit) nu ţine seama.

În cele ce urmează se analizează erorile de măsură ce se produc la releele de tipul D 200, RD 7, D 111 în cazul liniilor duble, la care există corecţia prin k_0 descrisă mai sus, dar care nu poate ţine seama de inducţia mutuală, şi corecţia acestor erori la protecţia RD 11.

Vom analiza — pentru cazul unui defect monofazic pe un circuit al unei linii duble — comportarea organelor de măsură ale acestor protecţii (respectiv mărimile ce li se duc) la un capăt al liniei, atît la linia defectă cît şi la cea sănătoasă.

Această analiză este efectuată atît pentru cazul unei linii alimentate de la un singur capăt cît şi pentru cazul mai complex al unei linii alimentate de la ambele capete.

După cum se ştie schema echivalentă în reţeaua homopolară a unei linii de lungime l cu circuit dublu avînd un defect pe unul din circuite la o distanţă λl de capătul din stînga (fig. 5—2 a) este cea din fig. 5—2b.

În această figură X_{1h} și X_{2h} sînt respectiv reactanțele homopolare proprii ale celor două circuite, iar X_{mh} este reactanța homopolară mutuală a acestora. În schema echivalentă și în calculele de mai jos s-a considerat (pentru simplificarea formulelor) că impedanțele sînt reactanțe pure și deci operațiile vectoriale pot fi înlocuite prin operații

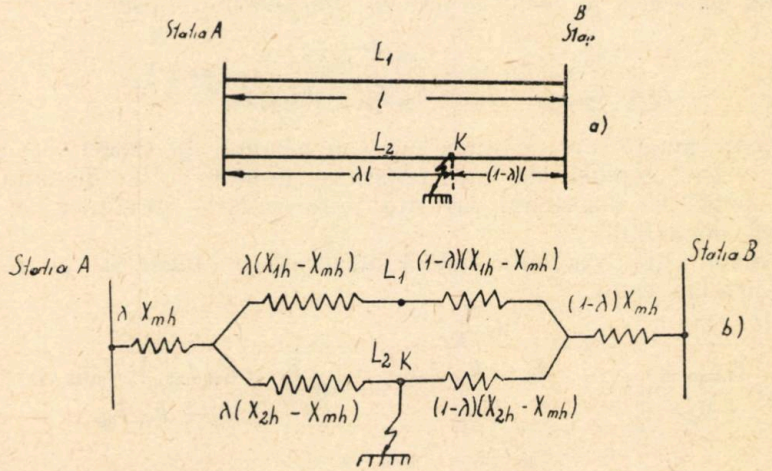


Fig. 5-2

scalare. Reactanțele directe (identice cu cele inverse) ale celor două linii sînt respectiv $X_{1d}=X_{1i}$ și $X_{2d}=X_{2i}$. Toate calculele sînt efectuate pentru scurtcircuit monofazat pe faza A.

a) Cazul liniei alimentate de la un singur capăt (din stația A).

În acest caz relațiile între tensiunea și curenții de defect în stația A la linia defectă 2 și la cea sănătoasă 1 sînt următoarele:

— La linia defectă 2.

$$U_{A0} = I_{2d}\lambda X_{2d} + I_{2i}\lambda X_{2i} + (I_{1h} + I_{2h})\lambda X_{mh} + I_{2h}\lambda (X_{2h} - X_{mh}) =$$

$$= \lambda X_{2d}\left[I_{2d} + I_{2i} + (I_{1h} + I_{2h})\frac{X_{mh}}{X_{2d}} + I_{2h}\frac{X_{2h} - X_{mh}}{X_{2d}}\right] =$$

$$= \lambda X_{2d}\left[I_{2d} + I_{2i} + I_{2h} - I_{2h} + I_{1h}\frac{X_{mh}}{X_{2d}} + I_{2h}\frac{X_{2h}}{X_{2d}}\right] =$$

$$= \lambda X_{2d}\left[I_2 + 3I_{2h}\frac{X_{2h} - X_{2d}}{3X_{2d}} + 3I_h\frac{X_{mh}}{3X_{2d}}\right].$$

$$Cum\ I_{1h} = \frac{I_{10}}{3} \quad \text{și} \quad I_{2h} = \frac{I_{20}}{3}$$

iar $\dfrac{X_{2h} - X_{2d}}{3X_{2d}} = k_{20}$ (k_0 al liniei 2), notînd $\dfrac{X_{mh}}{3X_{2d}} = k_{m\,20}$,

relația devine :

$$U_{A0} = \lambda X_{2d} [I_2 + k_{20} I_{20} + k_{m\,20} I_{10}] \tag{5}$$

Elementului de măsură al protecției i se aduce însă după cum știm U_{A0} și $I_2 + k_{20} I_{20}$ și deci el măsurînd raportul lor va măsura o altă impedanță decît cea de defect și anume una mai mare, căci

$$\frac{U_{A0}}{I_2 + k_{20} I_{20}} > \frac{U_{A0}}{I_2 + k_{20} I_{20} + k_{m\,20} I_{10}} = \lambda X_{2d}$$

Această amplificare artificială a impedanței de defect pe care o măsoară releul depinde de caracteristicile liniilor și de distanța reală pînă la defect ce determină raportul între valorile curenților de defect de pe cele două linii.

Raportul între reactanța fictivă măsurată de releu și cea reală de defect (directă) este

$$\frac{X_{\text{măsurat}}}{\lambda X_{2d}} = \frac{\dfrac{U_{A0}}{I_2 + k_{20} I_{20}}}{\dfrac{U_{A0}}{I_2 + k_{20} I_{20} + k_{m\,20} I_{10}}} = \frac{I_2 + k_{20} I_{20} + k_{m\,20} I_{10}}{I_2 + k_{20} I_{20}}$$

Deci

$$\frac{X_{\text{măsurat}}}{X_{\text{real}}} = 1 + \frac{k_{m\,20} I_{10}}{I_2 + k_{20} I_{20}} \tag{6}$$

Pentru marea majoritate a liniilor cu dublu circuit de la noi (la care cele 2 circuite au caracteristici identice) $X_h = 3{,}5\, X_d$ și $X_{mh} = 2\, X_d$ și deci

$$k_{20} = k_0 = \frac{3{,}5\, X_d - X_d}{3\, X_d} = \frac{2{,}5}{3} = 0{,}83$$

iar

$$k_{m\,20} = k_{m0} = \frac{2\, X_d}{3\, X_d} = 0{,}666\,.$$

Deci pentru aceste linii

$$\frac{X_{\text{măsurat}}}{X_{\text{real}}} = 1 + \frac{0{,}66\, I_{10}}{1{,}83\, I_{20}} = 1 + 036\, \frac{I_{10}}{I_{20}}\,. \tag{7}$$

Din fig. 5—2 b în care considerăm că alimentarea există doar din A, și cu datele menționate mai sus pentru liniile noastre, rezultă ușor relația:

$$I_{10} [1{,}5\, X_d + (1 - \lambda)\, 1{,}5\, X_d] = I_{20}\, \lambda\, X_d$$

și deci

$$\frac{I_{10}}{I_{20}} = \frac{\lambda}{2 - \lambda} \tag{8}$$

Deci

$$\frac{X_{măsurat}}{X_{real}} = 1 + 0{,}36\,\frac{\lambda}{2-\lambda} \tag{9}$$

Se observă deci că eroarea de măsură e întotdeauna pozitivă și că ea crește cu depărtarea pînă la defect atingînd valoarea 36% în cazul în care defectul este chiar la capătul liniei.

— La linia fără defect 1

$$U_{A0} = I_{1d}[X_{1d} + (1-\lambda)\,X_{2d}] + I_{1i}[X_{1i} + (1-\lambda)\,X_{2i}] +$$

$$+ (I_{1h} + I_{2h})\,\lambda\,X_{mh} + I_{1h}[X_{1h} - X_{mh} + (1-\lambda)\,(X_{2h} - X_{mh})] =$$

$$= [X_{1d} + (1-\lambda)\,X_{2d}]\left[I_{1d} + I_{1i} + I_{1h} - I_{1h} + (I_{1h} + I_{2h})\,\frac{\lambda\,X_{mh}}{X_{1d} + (1-\lambda)\,X_{2d}} + \right.$$

$$\left. I_{1h}\,\frac{X_{1h} - X_{mh} + (1-\lambda)\,(X_{2h} - X_{mh})}{X_{1d} + (1-\lambda)\,X_{2d}}\right]$$

Considerînd — ceea ce e în general valabil (și la liniile din țara noastră această considerație este riguros valabilă) $X_{1d} = X_{2d} = X_d$ și $X_{1h} = X_{2h} = X_h$ expresia devine:

$$U_{A0} = [X_{1d} + (1-\lambda)\,X_{2d}]\left[I_1 - I_{1h} + (I_{1h} + I_{2h})\,\frac{\lambda\,X_{mh}}{X_d\,(2-\lambda)} + \right.$$

$$\left. + I_{1h}\,\frac{(X_h - X_{mh})\,(2-\lambda)}{X_d\,(2-\lambda)}\right] \tag{10}$$

Prelucrată mai departe relația revine:

$$U_{A0} = X_d\,(2-\lambda)\left[I_1 + I_{1h}\,\frac{\lambda\,X_{mh} + (X_h - X_{mh})\,(2-\lambda) - X_d(2-\lambda)}{X_d\,(2-\lambda)} + \right.$$

$$\left. + I_{2h}\,\frac{\lambda\,X_{mh}}{X_d\,(2-\lambda)}\right] = X_d\,(2-\lambda)\left[I_1 + I_{10}\,\frac{(2-\lambda)\,(X_h - X_d) - 2\,X_{mh}\,(1-\lambda)}{3\,X_d\,(2-\lambda)} + \right.$$

$$\left. + I_{20}\,\frac{X_{mh}}{3\,X_d}\,\frac{\lambda}{2-\lambda}\right] \tag{11}$$

Circuitele fiind considerate identice $K_{10} = K_{20} = K_0 = \dfrac{X_h - X_d}{3\,X_d}$ și $k_{m\,10} = k_{m\,20} = k_{m0} = \dfrac{X_{mh}}{3\,X_d}$ și deci relația (11) devine

$$U_{A0} = X_d\,(2-\lambda)\left[I_1 + I_{10}\left(k_0 - 2\,k_{m0}\,\frac{1-\lambda}{2-\lambda}\right) + I_{20}\,k_{m0}\,\frac{\lambda}{2-\lambda}\right] \tag{12}$$

Din relația (12) se vede că pentru a se efectua o măsură corectă, în circuitul de curent al protecției liniei fără defect ar trebui să se aducă mărimea

$$I_1 + I_{10}\left(k_0 - 2\,k_{m0}\,\frac{1-\lambda}{2-\lambda}\right) + I_{20}\,k_{m0}\,\frac{\lambda}{2-\lambda}$$

In locul acestei mărimi însă releului i se aduce după cum știm mărimea $I_1 + k_0 I_{10}$ și deci și aceasta măsoară eronat și anume o mărime mai mare decît cea reală.

Folosind aceleași date ale liniilor din țara noastră se găsește ușor

$$\frac{X_{\text{măsurat}}}{X_{\text{real}}} = 1{,}36 - 0{,}67\,\frac{1-\lambda}{2-\lambda}.$$

Se observă că eroarea nu se anulează niciodată și este de 36% pentru defect în apropierea capătului liniei.

In concluzie, în cazul liniilor alimentate de la un singur capăt, atît releul liniei defecte cît și al celei fără defect măsoară impedanțe de defect mai mari decît cele reale și aceasta reprezintă un pericol de fapt doar pentru linia defectă, unde eroarea fiind relativ mare la defecte depărtate există posibilitatea deconectării cu o temporizare mai mare decît cea corespunzătoare locului scurtcircuitului și deci al unor declanșări neselective.

Ținînd seama de acest fapt, soluția adoptată de Kadner și aplicată la protecția RD 11 corectează numai eroarea de măsură a releului liniei defecte pentru că numai aci eroarea poate duce la extinderi de avarii, iar releul liniei sănătoase după cum se va vedea continuă să măsoare eronat ceea ce însă nu atrage după sine dificultăți.

Schema prin care se realizează o măsură corectă a distanței la defecte cu pămîntul în cazul liniilor cu dublu circuit este indicată principial în fig. 5—3 unde se arată doar felul în care se efectuează corecția erorii la protecția liniei defecte L_2.

Considerînd pentru simplificarea formulelor (ceea ce însă nu restrînge generalitatea) că cele două circuite sînt identice și că deci există cîte o singură valoare pentru k_0 și k_{m0} rezultă din relația (5) că pentru a efectua o măsură corectă a impedanței (identică cu cea de la defecte bifazice) elementului de măsură al protecției liniei defecte $L\,2$ trebuie să i se aducă — în circuitul de curent — mărimea $I_2 + k_0 I_{20} + k_{m0} I_{10}$.

După cum se observă ușor din figura 3, alegîndu-se pozițiile cursoarelor pentru a corespunde valorilor k_0 și k_{m0}, tocmai aceasta este mărimea ce se aduce elementului de măsură (înmulțită cu R ca și la scurtcircuitele bifazice), dacă contactul „a" al cărui rol se va explica mai jos se comută. In cazul în care contactul „a" nu-și schimbă poziția elementul de măsură primește în circuitul de intensitate mărimea $I_2 + k_0 I_{20}$, deci ca în cazul liniilor cu simplu circuit.

O schemă similară asigură și pentru protecția liniei L 1 corecția măsurii prin introducerea în circuitul de curent a unui termen proporțional cu curentul liniei $L\,2 = k_{m0} I_{20}$.

Rolul contactului „a" este de a efectua această corecție numai la protecția liniei pe care s-a produs defectul. Această selectare se realizează cu ajutorul unui releu comparativ de curent homopolar care e alimentat de curenții homopolari ai ambelor circuite și prin compararea acestora determină circuitul defect. Acest releu (din care a fost figurat schematic doar un contact final „a") are un rol foarte important.

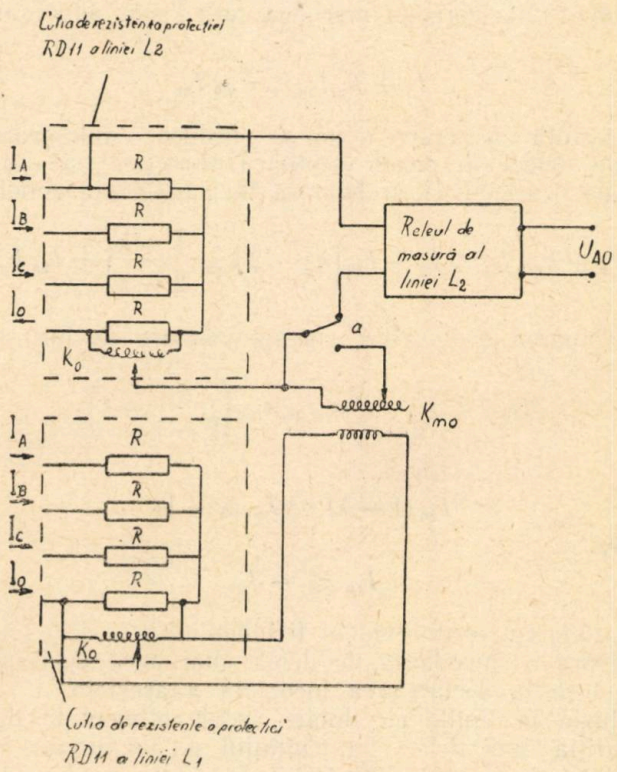


Fig. 5-3

După cum s-a văzut mai sus corecția este necesară numai la protecția liniei defecte căci numai la aceasta mărirea artificială a impedanței de defect măsurate poate duce la declanșări neselective.

Dar la linia fără defect corecția este nu numai nenecesară dar chiar periculoasă căci ea poate atrage după sine scurtarea artificială a impedanței de defect măsurate de protecția acesteia și deci o declanșare incorectă a liniei; de aci provine importanța deosebită a releului comparativ homopolar care împedică efectuarea corecției la linia fără defect și deci declanșarea neselectivă a acesteia.

Pericolul pe care l-ar aduce efectuarea corecției în mod automat (deci prin prevederea unei conexiuni fixe fără releu comparativ) la ambele circuite ale liniei rezultă cu ușurință din relația (12).

Din această relație rezultă că pentru ca protecția liniei sănătoase $L1$ să efectueze o măsură corectă circuitului de intensitate al acesteia trebuie să i se aducă mărimea

$$I_1 + I_{10}\left(k_0 - 2\,k_{m0}\frac{1-\lambda}{2-\lambda}\right) + I_{20}\,k_{m0}\frac{\lambda}{2-\lambda}$$

Dacă s-ar efectua corecția mărimea care i s-ar aduce ar fi după cum știm

$$I_1 + k_0\,I_{10} + k_{m0}\,I_{20}$$

De aci rezultă că pentru a nu se produce o micșorare artificială a impedanței de defect în cazul efectuării corecției (și deci posibilitatea unei declanșări neselective), trebuie să fie satisfăcută condiția

$$I_1 + k_0\,I_{10} + k_{m0}\,I_{20} \leqslant I_1 + I_{10}\left(k_0 - 2\,k_{m0}\frac{1-\lambda}{2-\lambda}\right) + I_{20}\,k_{m0}\,\frac{\lambda}{2-\lambda} \qquad (13)$$

care prin efectuarea reducerilor corespunzătoare devine succesiv

$$I_{10}\,2\,k_{m0}\frac{1-\lambda}{2-\lambda} \leqslant I_{20}\,k_{m0}\left(\frac{\lambda}{2-\lambda} - 1\right),$$

respectiv

$$I_{10}(1-\lambda) \leqslant I_{20}(\lambda - 1)$$

și în definitiv

$$I_{10} \leqslant -I_{20} \qquad (14$$

Condiția (14) nu poate evident fi îndeplinită și deci releul liniei fără defect ar măsura o impedanță de defect mai mică decît cea reală ceea ce ar putea duce la declanșarea incorectă a acesteia.

În concluzie la liniile cu dublu circuit alimentate dintr-o singură parte, la apariția unui defect cu pămîntul pe un circuit, în cazul echipării cu protecții de tipul D 200, RD 7, D 110 se produce la ambele circuite o mărire artificială a impedanței de defect măsurate ceea ce poate atrage întîrzierea declanșării liniei defecte și deci funcționări neselective. Protecția RD 11 elimină acest neajuns prin corectarea măsurii dar numai la linia defectă, mărirea artificială a impedanței la linia sănătoasă neconstituind un pericol, pe cînd efectuarea corecției ar atrage posibilitatea declanșării neselective a acesteia.

b) Cazul liniei duble alimentate de la ambele capete.

Este ușor de văzut că și în acest caz corecția ce trebuie efectuată la releul liniei defecte pentru ca aceasta să măsoare corect impedanța este aceeași ca și în cazul liniei alimentate de la un singur capăt.

Pentru a găsi relația între tensiunea și curenții de scurtcircuit ai liniei defecte L_2 trebuie întocmită schema echivalentă a rețelei homopolare ce se înseriază în cazul scurtcircuitului monofazic cu cea directă și inversă.

Intreaga rețea homopolară din care face parte linia cu dublu circuit în afara acesteia, oricît de complicată ar fi și oricîte legături suplimentare prin bucle ar exista între stațiile A și B poate fi întocmită pentru calculul care ne interesează printr-o stea formată din trei reactanțe, vîrfurile stelei fiind nodurile A, B și punctul neutru al rețelei, legat la pămînt.

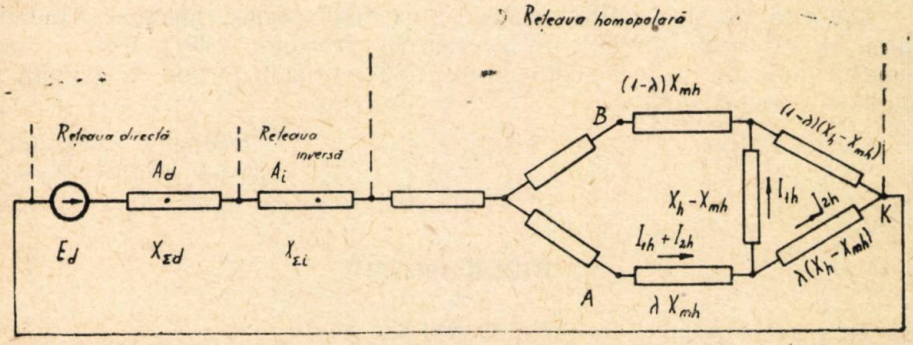


Fig. 5-4

Ținînd seama de acest lucru schema echivalentă de calcul pentru un scurtcircuit monofazic în punctul k al circuitului L_2 al liniei cu două circuite identice, produs la o distanță λl de stația A (fig. 5—2 a) este cea din fig. 5—4, unde X_d și X_i reprezintă reactanțele echivalente (directă și inversă) ale întregului sistem, A_d și A_i sînt respectiv punctele din aceste rețele ce corespund stației A, iar I_{1h} și I_{2h} sînt curenții homopolari ai celor două circuite în stația A.

Din fig. 5—4 rezultă ușor că relația între tensiunea pe faza defectă și curenții de defect ai circuitului defect L_2, în stația A este

$$U_f = I_{2d}\lambda X_{2d} + I_{2i}\lambda X_{2i} + (I_{1h} + I_{2h})\lambda X_{mh} + I_{2h}\lambda (X_h - X_{mh})$$

adică tocmai relația din care prin prelucrări succesive s-a obținut expresia (5) ce stă la baza efectuării compensării erorii în protecția RD 11.

Deci și în cazul liniilor duble alimentate de la ambele capete corecția realizată de protecția RD 11 duce la o măsură corectă a impedanței pe linia cu defect și deci la o funcționare corectă.

Determinarea cantitativă a erorii de măsură ce se produce la circuitul fără defect atît în lipsa compensării cît și în cazul efectuării acesteia nu poate fi efectuată decît cu cunoașterea în întregime a rețelei din care face parte linia dublă și deci nu există o expresie generală a acesteia. Totuși analiza efectuată pe o cale asemănătoare celei folosite la determinarea comportării protecției circuitului defect permite să se observe că la fel ca și în cazul alimentării de la un singur capăt — protecția circuitului fără defect măsoară o impedanță mai mare decît cea reală dacă nu se efectuează nici o corecție și poate măsura o impedanță mai mică decît cea reală dacă i se aplică aceeași corecție ca și la circuitul defect.

În concluzie, din întreaga analiză efectuată rezultă că soluția folosită în protecția RD 11 la liniile cu dublu circuit prin care se efectuează o corecție a măsurii numai la circuitul cu defect duce la o funcționare selectivă a protecției la scurtcircuite cu pământul, în timp ce celelalte tipuri de protecție de distanță ce nu folosesc o asemenea corecție măsoară pe circuitul defect o impedanță mai mare decît cea reală și pot duce astfel la declanșări neselective.

Datorită acestei calități foarte importante (care afectează funcționarea la cel mai frecvent tip de defect) protecția RD 11 este în mod deosebit indicată a fi folosită în rețelele cu neutrul pus la pământ la liniile cu circuit dublu.

Catedra de automatică
Institutul politehnic București

BIBLIOGRAFIE

[1] Prospectul releului de distanță RD 11.

[2] *Penescu C.*: Automatica și telemecanica sistemelor energetice, vol. 1, 2. Editura Academiei R.P.R. 1959, 1960.

[3] *Kadner, Wacarda:* Vehalten von Distanzrelais in starr geerdeten Hochspannungs netzen, Energietechnik 1958, H. 12.

[4] *Chenzbraun I.:* Funcționarea protecției de distanță cu relee de tip RD 7 la suprasarcină și posibilitățile de ameliorare a acesteia. — Energetica, 1962 nr. 12.

[5] *Федосеев А. М.:* Релейная защита электрических систем, Госэнергоиздат, 1952.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC BUCUREȘTI
Tomul XXVI — 1964, Fascicola 1

ELECTRONICĂ

C.Z. 621.396.64

ASUPRA APLICĂRII REACȚIEI NEGATIVE DE TENSIUNE LA UN ETAJ DE AMPLIFICARE

REINHARD PIRINGER

Cînd se studiază reacția negativă de tensiune aplicată unui etaj de amplificare [1], se presupune că tensiunea de reacție $u_r = -\beta \Delta u_a$ se adună la semnalul de la intrare e, componenta alternativă a tensiunii dintre grilă și catod avînd deci expresia:

$$\Delta u_g = e - \beta \Delta u_a . \tag{1}$$

De aici urmează că semnalul e trebuie să se găsească în serie cu tensiunea u_r, ceea ce se realizează în schema din figura 1, care reprezintă deci un montaj de reacție serie. Aci, tensiunea de reacție are expresia:

$$u_r = \frac{R_2}{R_1 + R_2} \Delta u_a , \tag{2}$$

iar

$$\Delta u_g = e + \frac{R_2}{R_1 + R_2} \Delta u_a . \tag{3}$$

Valoarea factorului de reacție este

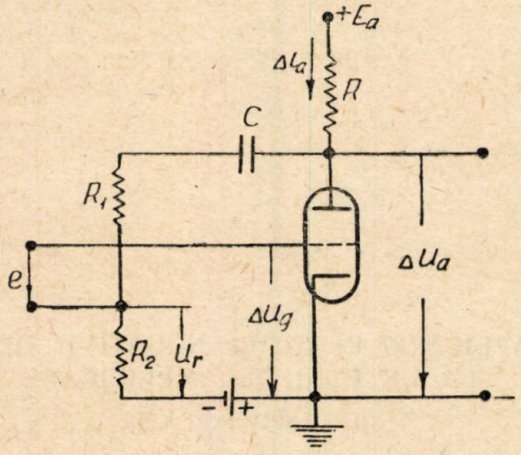
$$\beta = -\frac{R_2}{R_1 + R_2} \tag{4}$$

și reacția este negativă, deoarece Δu_a oscilează în antifază față de Δu_g. De altfel, în relația (1) semnele au fost luate în așa fel, încît semnul lui β să arate dacă reacția este pozitivă sau negativă. În urma aplicării reacției negative, amplificarea scade de la valoarea

$$a = -\frac{\Delta u_a}{\Delta u_g} = \frac{\mu R}{R_i + R} \tag{5}$$

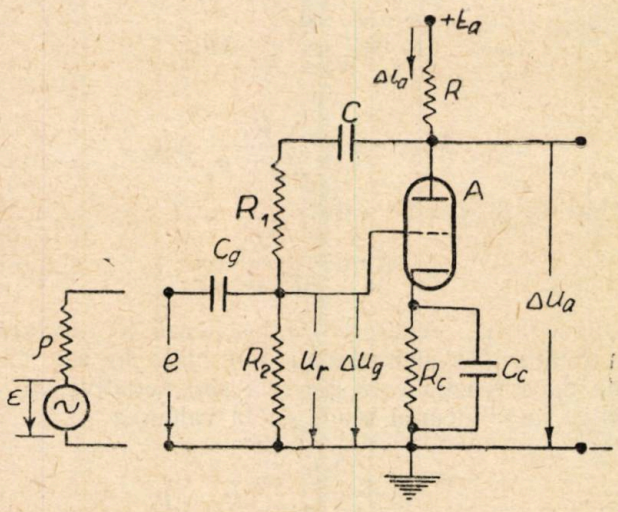
la

$$a' = -\frac{\Delta u_a}{e} = \frac{a}{1 - \beta a} . \tag{6}$$



Schema 1

Fig. 1. Schema montajului cu reacție negativă de tensiune serie



Schema 2

Fig. 2. Schema montajului cu reacție negativă de tensiune paralel.

Folosirea în practică a schemei *1* de reacție negativă de tensiune serie întîmpină dificultăți însemnate, deoarece ambele puncte ale semnalului *e* se găsesc la un potențial alternativ diferit de zero față de masă. Se știe că în schemele nesimetrice de amplificatori este necesar ca un punct al

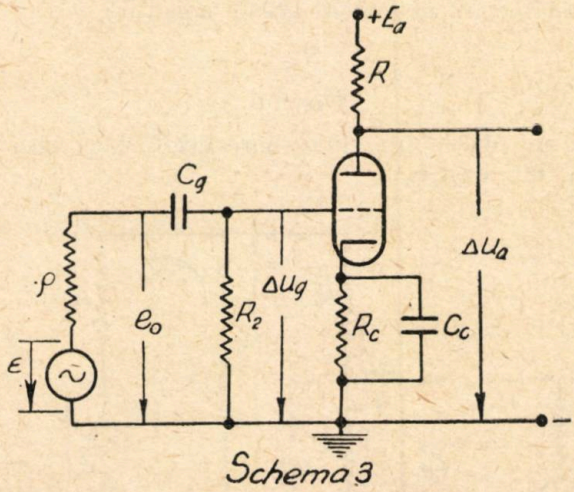


Fig. 3. Etaj amplificator fără reacție.

fiecărei tensiuni alternative să se găsească la un potențial fix (la „masă"), pentru a evita cuplaje nedorite care produc fenomene supărătoare și fac imposibilă funcționarea amplificatorului.

De aceea în practică se folosește cel mai des schema din figura 2 de reacție negativă de tensiune paralel, în care semnalul *e* are un punct la masă. În schema *2* se pare la prima vedere că nu există reacție, deoarece $\Delta u_g = e$ (C_g fiind scurtcircuit). Mai mult, se poate scrie și $\Delta u_g = u_r$, deci componenta alternativă a tensiunii de grilă ar fi formată numai de tensiunea de reacție și semnalul *e* nu ar avea nici o influență. Aceste concluzii greșite se datoresc faptului că nu s-a ținut seama că atît semnalul *e* cît și tensiunea de reacție u_r trebuie privite ca avînd o anumită rezistență internă și deci valoarea lor depinde de impedanța pe care ele debitează.

Presupunînd semnalul *e* produs de un generator de *t.e.m.* ε și rezistență internă ϱ, se va examina întîi schema *2* înainte de aplicarea reacției (fig. 3). Din schema *3* rezultă :

$$\Delta u_g = e_0 = \frac{R_2}{\varrho + R_2}\,\varepsilon, \tag{7}$$

amplificarea este dată de relația (5), iar impedanța de intrare are valoarea $Z_{g0} = R_2$.

Dacă se examinează din același punct de vedere schema *2*, pentru care circuitul echivalent de curent alternativ este reprezentat în figura 4, se observă în primul rînd că chiar cînd sarcina *R* și deci și eventuala

tensiune u_r de reacție este nulă, impedanța de intrare s-a modificat totuși la valoarea

$$Z_g = R_{12} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}, \tag{8}$$

iar semnalul de la intrare devine în aceste condiții:

$$e = \frac{R_{12}}{R_{12} + \varrho}\,\varepsilon. \tag{9}$$

De altfel, R_1 este de obicei mult mai mare decît R_2 și deci $R_{12} \approx R_2$ adică $Z_g \approx Z_{g0}$, iar $e \approx e_0$.

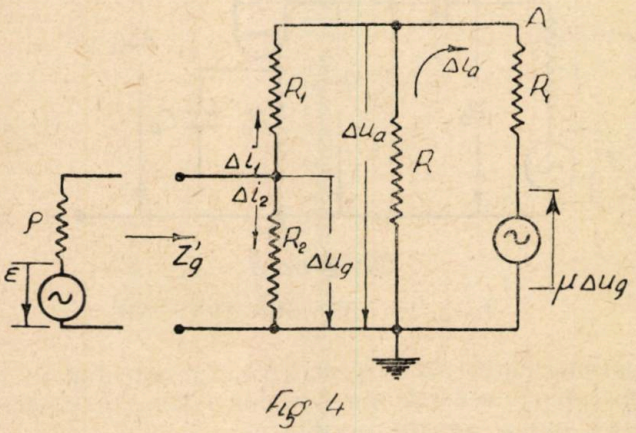


Fig. 4

Fig. 4. Circuitul echivalent de curent alternativ al schemei 2.

Aplicînd în circuitul de intrare al schemei 2 principiul suprapunerii efectelor, după care curentul produs într-o ramură de mai mulți generatori este egal cu suma curenților produși de fiecare generator în parte, atunci cînd ceilalți generatori sînt înlocuiți prin impedanța lor internă, rezultă:

$$\Delta u_g = R_2 \left[\frac{\varepsilon}{\varrho + R_{12}} \cdot \frac{R_1}{R_1 + R_2} + \frac{\Delta u_a}{R_1 + R'_2} \cdot \frac{\varrho}{R_2 + \varrho} \right] = e + \frac{R'_2}{R_1 + R'_2}\,\Delta u_a, \tag{10}$$

unde

$$R'_2 = \frac{R_2 \varrho}{R_2 + \varrho}. \tag{11}$$

Cînd s-a scris relația (10), s-a neglijat impedanța internă a generatorului care produce pe Δu_a și care este $\frac{R_l R}{R_l + R}$ față de R_1, ținînd seama că R_1 este de obicei cu mult mai mare. Calculele au fost efectuate și în cazul cînd nu se face această neglijare obținîndu-se expresiile exacte pentru

$\Delta u_g, \beta$ etc. valabile și atunci cînd R_1 este comparabil cu $\frac{R_i R}{R_i + R}$. Relațiile și expresiile sînt însă în acest caz mai complicate și nu permit o interpretare simplă la prima vedere. Ținînd seama că în schemele întîlnite în practică, R_1 este mult mai mare decît $\frac{R_i R}{R_i + R}$ și că relațiile exacte nu aduc nimic nou, aceste calcule nu se redau aici.

Din relația (10) rezultă că în cazul schemei *2* există o reacție negativă de tensiune, factorul de reacție fiind

$$\beta = -\frac{R_2'}{R_1 + R_2'}, \tag{12}$$

adică o valoare analoagă cu cea dată de relația (4) pentru schema *1*, diferența constînd doar în faptul că R_2 se modifică în R_2' din cauza impedanței interne ρ a generatorului ε. Dacă etajul anterior este un etaj cu pentodă și impedanță de sarcină mare, atunci ρ este mare și R_2' se apropie de R_2.

Este important de remarcat că în relația (10) *e* înseamnă semnalul care există la intrare cînd nu se aplică reacție și că în momentul închiderii rețelei de reacție semnalul scade la valoarea Δu_g dată de (10). Deci, spre deosebire de schema *1* unde valoarea semnalului nu era modificată de reacție, în schema *2* semnalul de la intrare scade din cauza rezistenței interne a generatorului de semnal. Atunci s-ar putea crede că este indicată folosirea la intrare a unui generator cu rezistență internă mică sau chiar nulă, pentru a evita scăderea semnalului la aplicarea reacției. Din relațiile (11) și (12) se vede însă că $\rho = 0$ atrage după sine $R_2' = 0$ și deci $\beta = 0$, adică factorul de reacție se anulează și nu mai există reacție. Urmează că, pentru ca schema *2* să funcționeze cu reacție trebuie ca generatorul de excitație să aibă o impedanță internă diferită de zero și este de dorit ca ea să fie cît mai mare. Cele găsite mai sus demonstrează echivalența reacției negative de tensiune paralel cu o reacție serie de aceeași natură și avînd factorul de reacție dat de (12), echivalență demonstrată pe altă cale și în [2]. Pe baza echivalenței dintre relațiile (10) și (1), toate proprietățile unui etaj cu reacție negativă de tensiune vor putea fi aplicate și în cazul de față. Nu trebuie însă să se uite că aceste proprietăți se referă la *semnalul e existent între grilă și catod înainte de aplicarea reacției.*

Astfel, amplificarea scade la valoarea:

$$a' = \frac{a}{1 + \frac{R_2'}{R_1 + R_2'} a} \tag{13}$$

Relația (13) poate fi scrisă mai comod sub forma:

$$\frac{1}{a'} = \frac{1}{a} + \frac{R_2'}{R_1 + R_2'} = \frac{1}{a} - \beta. \tag{13'}$$

Este cert că amplificarea față de tensiunea Δu_g existentă între grilă și catod, singura care poate fi măsurată experimental direct în schema 2 rămîne a și este dată de formula (5), dacă se face însă raportul între tensiunea Δu_a și semnalul e existent între grilă și catod înainte de aplicarea reacției, se obține amplificarea redusă a' dată de formula (6).

Ca și la aplicarea unei reacții negative serie, și în cazul schemei 2, stabilitatea amplificării se îmbunătățește iar factorul de distorsiune și tensiunea de zgomot scad cu toate că amplificarea față de tensiunea Δu_g a rămas neschimbată. Fizic, acest lucru se explică prin aceea că, semnalul e fiind constant, valoarea lui Δu_g este influențată de Δu_a conform relației (10) și deci o variație a lui Δu_a produce o variație de același sens a lui Δu_g care prin fenomenul de amplificare al tubului are ca efect o variație de sens contrar a lui Δu_a și astfel funcționarea este mai stabilă. De asemenea, tensiuni pe armonici sau tensiuni de zgomot care nu existau în semnalul e ajung pe grilă prin rețeaua de reacție, ceea ce produce un efect în antifază și de aceea factorul de distorsiune și tensiunea de zgomot scad.

În ceea ce privește însă impedanța de intrare, există o diferență esențială față de schema 1. Ținînd seama că în relația (10) a fost separat semnalul e (existent înaintea aplicării reacției) de tensiunea de reacție, s-ar putea spune că impedanța de intrare a schemei 2 este aceea care face ca între grilă și catod să existe tensiunea e. Se vede ușor din relația (9) că această impedanță este $Z_g = R_{12}$. Deci, dacă se pornește de la relația (10) care arată că schema 2 este un amplificator cu reacție negativă, ar trebui trasă concluzia că impedanța de intrare nu s-a modificat față de cea existentă înainte de a aplica reacția. În realitate, impedanța de intrare este aceea care conduce la semnalul Δu_g între grilă și catod și ea rezultă din examinarea circuitului de intrare:

$$\frac{1}{Z'_g} = \frac{\Delta i_1 + \Delta i_2}{\Delta u_g} = \frac{\dfrac{\Delta u_g - \Delta u_a}{R_1} + \dfrac{\Delta u_g}{R_2}}{R_2} = \frac{1+a}{R_1} + \frac{1}{R_2}. \qquad (14)$$

Impedanța de intrare scade deci apreciabil, în paralel cu R_2 găsindu-se rezistența $\dfrac{R_1}{1+a}$ care intervine din cauza reacției și produce micșorarea semnalului de la e la Δu_g.

Impedanța Z'_g fiind aceea care face ca între grilă și catod să existe tensiunea Δu_g, nimic nu ne împiedică, ca din punctul de vedere al tensiunilor pe frecvențele existente la intrare, să privim schema 2 ca un etaj amplificator fără reacție, însă avînd impedanța de intrare Z'_g. Astfel, din figura 4 putem deduce:

$$\Delta u_g = \frac{Z'_g}{\varrho + Z'_g}\,\varepsilon. \qquad (15)$$

Amplificarea etajului este a și este dată de formula (5).

Dacă se calculează însă amplificarea în raport cu tensiunea e existentă la intrare cînd impedanța de intrare era $Z_g = R_{12}$, adică înainte de aplicarea reacției, ar trebui să se obțină relația (13′) dacă cele două feluri de a privi schema 2 sînt echivalente.

Folosind relațiile (9) și (15), se obține:

$$a' = -\frac{\Delta u_a}{e} = a\,\frac{Z_g'(R_{12}+\varrho)}{R_{12}(Z_g'+\varrho)}. \tag{16}$$

Utilizînd apoi formulele (16) și (23), se găsește prin calcule simple

$$\frac{1}{a'} = \frac{1}{a} + \frac{\varrho R_2}{R_1(R_2+\varrho)+\varrho R_2} = \frac{1}{a} + \frac{R_2'}{R_1+R_2'}. \tag{17}$$

Relația (17) fiind identică cu (13′) rezultă următoarea concluzie: *Schema 2 de reacție negativă de tensiune poate fi privită fie ca un amplificator cu reacție negativă avînd la intrare semnalul* e *și impedanța* R_{12} *(existente în absența reacției), factorul de reacție fiind* $\beta = -\dfrac{R_2}{R_1+R_2'}$ *fie ca un amplificator fără reacție avînd semnalul* Δu_g *și impedanța de intrare* Z_g' *variabilă cu amplificarea* a.

Această concluzie nu este valabilă pentru tensiunile pe frecvențe inexistente la intrare (zgomotul tubului, armonicile datorite distorsiunilor neliniare introduse de tub; zgomot de rețea existent în tensiunea de alimentare anodică), deoarece pentru aceste tensiuni amplificatorul nu poate fi privit ca amplificator fără reacție, căci tensiunea Δu_g va conține și componente care nu existau în generatorul de *t. e. m.* e, componente care se datoresc tocmai reacției de la anod la grilă prin potențiometrul R_1, R_2. Deoarece anodul oscilează în antifază față de grilă, rezultă în acest mod micșorarea tensiunii de zgomot și a factorului de distorsiune, cu toate că pentru frecvențele tensiunii electromotoare e amplificatorul poate fi considerat fără reacție.

Mărirea stabilității amplificării rezultă și în caz că schema 2 este privită ca amplificator fără reacție, căci o variație, de exemplu o creștere a amplificării produce o micșorare a impedanței de intrare Z_g' conform relației (14), care are drept urmare micșorarea lui Δu_g (15) și deci a lui Δu_a. Astfel, variația relativă globală a amplificării este mai mică decît în cazul schemei 3, unde nu există calea de la anod spre grilă prin rezistența R_1.

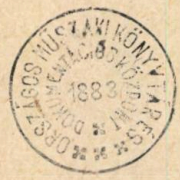
Avantajele reacției negative de tensiune în ceea ce privește mărirea stabilității amplificării, scăderea factorului de distorsiune și micșorarea tensiunii de zgomot se obțin în întregime în schema examinată (fig. 2) și acest lucru nu depinde, bineînțeles, de modul cum privim schema. În ceea ce privește însă impedanța de intrare, după cum s-a arătat mai sus, ea poate fi considerată în mod diferit, obținîndu-se pentru fiecare caz o altă valoare.

Catedra de tuburi electronice și tranzistori
Institutul politehnic București

BIBLIOGRAFIE

[1] *T. Tănăsescu:* — Manual de tuburi și circuite electronice. Edit. Academiei R.P.R., București 1955, vol. I, § 13.1.

[2] *С. Н. Кризе:* — Усилители напряжения низкой частоты. Г Э И Москва, 1953.



Intreprinderea poligrafică „Grafica Nouă" II — București — c. 9167

INDICAȚII REDACȚIONALE

Manuscrisele vor fi prezentate în două exemplare, dactilografiate la două rînduri și colaționate de autor. Relațiile matematice și formulele se vor scrie cît mai clar, cu cerneală.

Desenele și graficele vor fi executate în tuș negru pe hîrtie de calc, numerotate și prezentate separat cu un borderou cuprinzînd nr. curent și legenda fiecărei figuri. Locul figurilor se va indica în text. Scrisul pe figuri va fi cel standardizat.

În continuarea textului, pentru fiecare exemplar se va da bibliografia de referință și, pe cîte o foaie separată de hîrtie, cîte un rezumat, în limbile: rusă, franceză, germană și engleză. La bibliografie se va indica în mod obligatoriu: numele și inițialele de prenume ale autorului, titlul și volumul lucrării, editura, locul și anul apariției, sau periodicul în care a apărut, volumul, anul, pagina inițială și finală a articolului.

Bibliografia se va întocmi în ordinea de citare în text și se va numerota curent. Referințele la bibliografie se vor face în text prin indicarea numărului de ordine al lucrării, încadrat în paranteze drepte, de exemplu [5].

Întreaga responsabilitate pentru exactitatea calculelor, datelor experiențelor și afirmațiilor științifice revine numai autorilor. Conducerea revistei își rezervă dreptul de a nu publica materialele necorespunzătoare.

40820

F 1130

REFERÁLVA

R

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC BUCUREȘTI

TOMUL XXVI FASCICOLA 2 ANUL 1964
MARTIE — APRILIE

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC BUCUREŞTI

apare, cu şase fascicole pe an, în continuarea vechilor periodice ştiinţifice: „Bulletin de Mathématiques et de Physique pures et appliquées" şi „Buletinul Politehnicei din Bucureşti".

Organizat pe baze noi, el reflectă în primul rînd activitatea ştiinţifică a corpului didactic din Institutul Politehnic Bucureşti. În limita spaţiului disponibil, se pot publica şi lucrări ştiinţifice ale colaboratorilor din afara Institutului.

Corespondenţa şi schimburile de publicaţii cu Redacţia şi Administraţia Buletinului se fac pe adresa:

INSTITUTUL POLITEHNIC BUCUREŞTI
CALEA GRIVIŢEI 132
(cu menţiunea „pentru Buletinul Institutului")

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC BUCUREŞTI

издаётся в шестых годовых выпусках являясь продолжением прежних научных периодических журналов „Bulletin de Mathématiques et de Physique pures et appliquées" и „Buletinul Politehnicei din Bucureşti".

Составленный на новых основах, он отражает в первую очередь научную деятельность преподавательского состава Бухарестского Политехнического Института. В пределах возможностей будут опубликованы и научно-исследовательские работы и внеинститутских сотрудников.

Переписка и обмен периодическими изданиями с Редакцией и Руководством Бюллетеня производятся по адресу:

INSTITUTUL POLITEHNIC BUCUREŞTI
CALEA GRIVIŢEI 132
(с указанием „pentru Buletinul Institutului")

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC BUCUREŞTI

est une publication, continuant les anciens périodiques scientifiques: „Bulletin de Mathématiques et de Physique pures et appliquées" et „Buletinul Politehnicei din Bucureşti".

Tel qu'il se présente, il reflète en premier lieu l'activité scientifique du corps didactique de l'Institut Polytechnique de Bucarest. On pourra y ajouter aussi, dans la limite des possibilités, les travaux des collaborateurs qui n'appartiennent pas à l'Institut.

L'adresse pour la correspondance et les échanges de publications est:

INSTITUTUL POLITEHNIC BUCUREŞTI
CALEA GRIVIŢEI 132
(avec la mention „pentru Buletinul Institutului")

ORSZÁGOS MŰSZAKI KÖNYVTÁR ÉS DOKUMENTÁCIÓS KÖZPONT 1883

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC BUCUREŞTI

TOMUL XXVI — FASCICOLA 2

MARTIE—APRILIE
1964

COMITETUL DE REDACȚIE

Prof. Dr. *I. Agîrbiceanu*, membru corespondent al Academiei R.P.R.; Prof. Dr. *I. S. Antoniu*, membru corespondent al Academiei R.P.R.; Acad. Prof. *M. Bercovici*; Prof. Dr. *E. Bratu*, membru corespondent al Academiei R.P.R.; Prof. *Gh. Buzdugan*, membru corespondent al Academiei R.P.R.; Acad. Prof. Dr. *E. Carafoli*; Conf. *S. Călin*, cand. St. Th.; Acad. Prof. Dr. *D. Dumitrescu*; Conf. *I. Grădișteanu*, cand. St. Ec.; Prof. *C. Ionescu-Bujor*; Prof. Dr. *Gh. Manea*, membru corespondent al Academiei R.P.R.; Prof. *N. Manolescu*; Prof. *St. Mantea*; Prof. *N. Marinescu*, cand. St. Th.; Acad. Prof. Dr. *C. Nenițescu*; Prof. *C. Penescu*, membru corespondent al Academiei R.P.R.; Prof. *M. Postelnicescu*; Acad. Prof. Dr. *R. Rădulet*; Prof. *Al. Rău*; Prof. *Al. Spătaru*; Prof. *L. Stoicescu*; Prof. *I. Zăgănescu*.

Redactor responsabil: Prof. *C. Dinculescu*
Membru corespondent
al Academiei R. P. R.

Sumar

MATEMATICA

D. Mangeron

Contribuții la mecanica neliniară a vibrațiilor 17

I. M. Miu

Sur les zéros réels de certaines fonctions 29

FIZICA

D. Angelescu

Influența păstrării emulsiilor nucleare în lichide asupra urmelor α și a difuziei atomilor de toron 39

ELECTROCHIMIE

I. Atanasiu, L. Blum Lazăr, M. Constantinescu

Extragerea electrolitică a iodului din apele minerale și de zăcământ 43

MECANICA

A. Stan

Unele nomograme utile referitoare la protecția mașinilor împotriva vibrațiilor 57

M. Atanasiu

Unele proprietăți topologice ale sistemelor de corpuri 65

TERMOTEHNICA

A. Seleșteanu

Ciclurile termo-gazo-dinamice ale mașinilor de forță . . . 83

M. Năstase

Aspectul polistadial al perioadei de întîrziere la autoaprindere cu referire la experimentări făcute pe motoare cu aprindere prin comprimare cu camera separată de turbulență 97

G. Crăciun

Cercetarea experimentală a paletajului compresorului axial, profilat cu considerarea pierderilor de energie 111

ELECTROTEHNICA

A. Timotin A. Țugulea

Asupra interpretării electrodinamicii Maxwell-Herzt în lumina teoriei relativității 127

Резюме

Д. К. 531.1

Д. Манжерон

Вклад в проблематику нелинейной механики колебаний

В ряде своих предыдущих исследований автор разработал метод приведенных ускорений любого порядка, метод тангенциальных координат и матричный-тензорный [1] — [6], примененные затем в исследованиях различных авторов [7] — [15].

В настоящей работе, исходя из нового класса поливолновых интегро-дифференциальных уравнений (6), (7), интересующих нелинейную механику колебательных процессов, и используя ранее разработанный автором метод интегральных уравнений [31], решается ряд задач, связанных с серией последующих работ с совместными исследованиями в сотрудничестве с Л. Е. Кривошеиным [39].

Buletinul Institutului politehnic Bucureşti, Tom. XXVI, fasc. 2/964.

Д. К. 517.9

И. М. Миу

О действительных корнях некоторых функций

В данной работе дается обобщение одной теоремы автора, опубликованной в [1] и [2], относительно действительных корней некоторых классов функций.

В то же время дается применение обобщенной теоремы к корням некоторых полиномов.

Buletinul Institutului politehnic Bucureşti, Tom. XXVI, fasc. 2/964.

Д. К. 539.1

Д. Ангелеску

Влияние хранения ядерных эмульсий в жидкостях на следы α-частиц и на диффузию атомов торона

Изучается увеличение пробега α-частиц и рост дуффузии атомов торона в ядерных эмульсиях, экспонируемых в различных органических жидкостях. Устанавливаются кологесвенные характеристики для использованных жидкостей.

Buletinul Institutului politehnic Bucureşti, Tom. XXVI, fasc. 2/964.

Д. К. 518.3:621-7

А. Стан

Некоторые полезные номограммы в защите машин против вибраций

Представлены две полезные номограммы в проектировании приспособлений устройст и изоляций различных агрегатов имеющих степень свободы.

Одна из номограмм представляет собой изменение у постоянной упругой, коэфициента передачи и собственной частоты в зависимости от статической деформации. Это позволяет быстро анализировать существующее положение, найти самый подходящий материал для защиты и т. д.

Другая номограмма позволяет определить толщину слоя амортизатора каучука, для загрузок при сжатии, в зависимоти от его характеристики (твердость по Шору), способ динамической упругости ит.д.

Применение вышеуказанного иллюстрируется на примерах.

Buletinul Institutului politehnic Bucureşti, Tom. XXVI, fasc. 2/964.

Summary

D.C. 531.1

D. Mangeron

Some Problems Related to Nonlinear Mechanics

In a set of his previous papers the author [1]—[6] has developed the reduced accelerations of any order method, the tangential method and a new 4×4 matrices method, largely utilized by other scientists in their research work [7]—[15].

Starting from his new integral equations method [31] the author solves in this articles some problems of interest in non linear mechanics, concerning a new class of integro-differential "polywave" equations (7′, 18).

Buletinul Institutului politehnic Bucureşti, Tom. XXVI, fasc. 2/964.

D.C. 517.9

I. M. Miu

On the Real Zeros of Functions

The paper presents a generalization of the author's theorem published in [1] and [2] referring to the real zeros of some class of functions.

At the same time, the generalized theorem is being applied to the zeros of some polynoms.

Buletinul Institutului politehnic Bucureşti, Tom. XXVI, fasc. 2/964.

D.C. 539.1

D. Anghelescu

Influence of Storage in Liquids of Nuclear Emulsion on α Tracks and Thoron Diffusion

In nuclear emulsion exposed in different organic liquids the increase in length of α-tracks and the enhanced diffusion of thoron atoms is investigated. Quantitative characteristics in this respect are given for each liquid.

Buletinul Institutului politehnic Bucureşti, Tom. XXVI, fasc. 2/964.

D.C. 518.3 : 621—7

Aurelian Stan.

Some Useful Nomograms to Protect Machines Against Vibrations

There are presented two useful nomograms to the projection of devices for amortization and isolation of the vibrations from different sets having one degree of liberty.

One of the nomograms represents the variation of the elastic constant, of the coefficient of transmission and of the own frequency in relation with the static deformation. This allows to make a fast analysis of a given situation, to find the most convenient stuff to be used ans so on.

The other nomogram allows to determine the thickness of the amortizable rubber sheet necesary in different solicitations of compression, related to its characteristics (Shore hardness, modulus of dynamic elasticity a.s.o.).

Their utility is illustrated by examples.

Buletinul Institutului politehnic Bucureşti, Tom. XXVI, fasc. 2/964.

Д. К. 513.8:531

М. Атанасиу

Некоторые топологические свойства систем тел

В работе излагается применение теории графов к структуральному анализу систем твёрдых тел, встречаемых в теоретической механике, теории механизмов и в сооружении.

Buletinul Institutului politehnic Bucureşti, Tom. XXVI, fasc. 2/964.

Д. К. 661.471:615.79

И. Атанасиу, Л. Блум Лазар, М. Константинеску

Электролитическое извлечение иода из минеральных и залежных вод

Излагаются результаты, полученные при попытках извлечения иода из минеральных и залежных вод.

Электролитическое извлечение возможно в хороших условиях благодаря тому, что величина разряжения потенциала иода маленькое и отдаленное от величины потенциалов разряжения других галоидов.

Примененный метод состоит в предварительном анодном окислении иона I^- до IO_3^- и выделения I_2 из разбавленных растворов, затем в концентрации растворов в смолах, изменяющих ионы и электролитическое извлечение путем анодного окисления иона из солюции.

Использованное оборудование — не сложное и процесс протекает с повышенным выходом тока и вещества и с пониженным индикаторным расходом энергии.

Buletinul Institutului politehnic Bucureşti, Tom. XXVI, fasc. 2/964.

Д. К. 621.1:531.3

А. Селештеану

Термо-и газодинамические процессы силовых машин

В работе исследуются расчетные методы, которые придают одинаковое значение газодинамическим и термодинамическим явлениям.

С этой целью выводятся основные уравнения, которые позводяют представить термо-процессы в диаграмме энтальпия — кинетическая энергия.

Формулы и диаграммы применены к ряду случаев: течение в каналах, лопатки турбомашин, камеры сгорания, расчет ступени турбины, газотурбинные установки, ракеты. Одновременно, выясняются потери термических процессов и их изображение в диаграммах.

Buletinul Institutului politehnic Bucureşti, Tom. XXVI, fasc. 2/964.

D.C. 513.8 : 531

M. Atanasiu

Some Topological Properties of the Systems of bodies

In this paper is exposed the application of the graph theory to the structural analysis of rigid bodysystems met in the theoretical mechanics, the theory of mechanism and in the construction statics.

Buletinul Institutului politehnic Bucureşti, Tom. XXVI, fasc. 2/964.

D.C. 661.471 : 615.79

I. Atanasiu, L. Blum Lazăr, M. Constantinescu

The Electrolytic Extraction of Iodine out of the Mineral and Deposit Waters.

The results obtained in the experiments of extracting iodine from mineral and deposit waters are presented.

The electrolytic extraction is possible in good conditions because the discharging potential iodine is small and distanced from the potential discharging values of the other halogens.

The applied method consists of the anodic preoxidation of ion I^- to IO_3^- and the release of I_2 from diluted solution, then the concentration of solution on ion exchanging resins and the electrolytic extraction by anodic oxidation of ion I^- of the eluation agent.

The installation used is a simple one and the process takes place with a high efficiency of current and substance and with a specific low consumption of energy.

Buletinul Institutului politehnic Bucureşti, Tom. XXVI, fasc. 2/964.

D.C. 621.1 : 531.3

A. Seleşteanu

Thermo-gazo-dynamic Cycles for Power Englines

In this article is made the analysis of the calculus methods which afford to give the same importance both to gasdynamic and thermo-dynamic phenomena. For this aim fundamental relations are deducted allowing to represent the thermic cycles in the diagram enthalpia/kinetic energy. all this — formulae and diagrams are applied to a number of practical instances, as the flow through the canals, the pales of turbines, the combustion chambers, the calculus of a stage as well as that of a turbine, complex aggregates of gas-power engines, rockets. At the same time, there are in the article diagrams illustrating a thermic process with its losses.

Buletinul Institutului politehnic Bucureşti, Tom. XXVI, fasc. 2/964.

Д. К. 621.41.043

М. Нэстасе

Многостадиальный вид периода запаздывания при самозажигании, относящемся к опытам проведенных на двигателях с зажиганием сжатием с отдельной камерой турбулентности

На основе опытов, произведенных с дизельным двигателем с отдельными камерами турбулентности, в работе рассматривается период запаздывания при самовоспламенении пасаорнальном отношении самовоспламения.

Для конкретизации роли, которуы играют физические и химические процессы в период запаздывания при самовоспламенении, следилось за влиянием температуры и губолентности из отдельной камеры турболенткости и влияние природы горючего.

По произведенному анализу устанавливается сложный полистадиальный характер физико-химических процессов, производящих в период запаздывания, т.к. они играют одинаково важную роль.

Дифференцируется значение, которое имеет определенный тип физического или химического процесса, если только принимается во внимание камеры сгорания-температура, турболентность воздуха и т. д.

Buletinul Institutului politehnic Bucureşti, Tom. XXVI, fasc. 2/964.

Д. К. 621.512:621.3.017

К. Гуцы

Экспериментальное испытание компрессорных осевых палетажей, профилированных с учета потери энертии

Экспериментально для трёх выбранных относительных вытяжек ($h = 0{,}35$; $0{,}52$; $1{,}04$), изучаются различные решетки осевого продольного компрессора в двух вариантах:

а) По закону постоянной циркудяции;

б) С учетом потери энергии.

Была изучена структура тока перед и за решеткой профилей и была установлена зависимость потери энергии от рассматриваемых факторов.

Buletinul Institutului politehnic Bucureşti, Tom. XXVI, fasc. 2/964.

Д. К. 538.3:530.12

А. Тимотин, А. Цугулеа

Интерпретация электродинамики Максвелла и Герца с точки зрения теории относительности

Доказывается что ододшение Герца для электродинамики Максвелла, является единственной дорелативистской теорией электромагнитных явлений, совместной с принципом относительности. Теория Герца отличается от релативистской электродинамики только своей кинематической основой и может применятся, также как и нютонская механика, для описания явлений в которых релативиские эффекты пренебрежительны.

Buletinul Institutului politehnic Bucureşti, Tom. XXVI, fasc. 2/964.

D.C. 621.43.043

M. Năstase

The Poliphase Aspect of the Delay Period at Self-ignation with Preference to Experiments Carried out on Engines Ignited by Compression with a Separate Turbulence Chamber.

On the basis of experiments carried out on a Diesel motor with separate turbulence chambers, the work analyses the delay period for self ignition in the case of polystage sels ignition.

For settling the part played by both the piysical and chemical processes during the self ignition delay period, the influence of temperature and turbulence in the separate, turbulence chamber as well as the influence of the kind of fuel were examined.

From the analysis carried out, it is to be observed that the complex, polyphase character of the physical- chemical processes taking place during self ignition delay period, have an important part as well.

There may be made a difference of the importance which a certain type of chemical or physical process has, if the conditions within air turbulence are taken into account and so on.

Buletinul Institutului politehnic Bucureşti, Tom. XXVI, fasc. 2/964.

D.C. 621.512 : 621.3.017

C. Guţă

Experimental Investigation on the Plade System of the Axial Compressor Designed by Taking into Account the Losses of Energy

The design networks of the axial compressor in two variants are experimentally studied, for the relative elongations chosen ($h = 0{,}35$; $0{,}52$; $1{,}04$) :

a) on the basis of the constant circulation law.

b) by considering the losses of energy.

The structure of the current has been studied before and after the profile network and the dependance of the losses of energy on the considered factors has been established.

Buletinul Institutului politehnic Bucureşti, Tom. XXVI, fasc. 2/964.

D.C. 538.3 : 530.12

A. Timotin, A. Ţugulea

On the Relativistic Interpretation of the Maxwell-Hertz Electrodynamics

It is shown that the Hertz generalization of Maxwell's electrodynamics is the unique prerelativistic theory of electromagnetic phenomena coherent with the principle of relativity, and that it differs from relativistic electrodynamics only in regard to its kinematics basis.

Thus Hertz's electrodynamics, as Newton's mechanics, shall be employed only in instances when relativistic effects can be neglected.

Buletinul Institutului politehnic Bucureşti, Tom. XXVI, fasc. 2/964.

Résumé

D. Mangeron C.D. 531.1

Sur certains problèmes concernant la Mécanique non linéaire des vibrations

Dans une série de travaux propres antérieurs, consacrés à l'élaboration des méthodes nouvelles des accélérations réduites d'ordre quelconque, tangentielle et matricielle-tensorielle, intéressant la théorie des mécanismes et des machines, l'auteur a mis les fondements de quelques procédés nouveaux [1]—[6] qui ont constitué la source d'inspiration d'autres chercheurs [7]—[15].

Dans ce travail on expose quelques résultats concernant la Mécanique non linéaire des vibrations, tout en prenant comme point de départ quelques systèmes intégro-différentiels polyvibrantes (7′, 18). Pour la détermination exacte ou approximative des solutions des problèmes à la frontière considérée on a appliqué la méthode des équations intégrales exposées par l'auteur dans [31].

L'article se conclut par quelques indications concernant les problèmes élaborés par l'auteur en collaboration avec M. L. E. Krivochéine se trouvant sous presse dans d'autres recueils [39].

Buletinul Institutului politehnic Bucureşti, Tom. XXVI, fasc. 2/964.

I. M. Miu C.D. 517.9

Sur les zéros réels de certaines fonctions

Dans ce travail on indique une généralisation d'un théorème de l'auteur publié dans [1], [2] ce théorème se référe aux zéros réels de certaines fonctions.

On fait aussi l'application de ce théorème généralisé au zéro des polynomes.

Buletinul Institutului politehnic Bucureşti, Tom. XXVI, fasc. 2/964.

D. Anghelescu C.D. 539.1

Sur les traces α et la diffusion des atomes de thoron dans les émulsions nucléaires gardées en divers liquides

On étudie l'agrandissement des parcours α et l'acroissement de la diffusion des atomes de thoron pour les émulsions nucléaires conservées dans quelques liquides organiques. On établie des caractéristiques quantitatives pour les liquides utilisés.

Buletinul Institutului politehnic Bucureşti, Tom. XXVI, fasc. 2/964.

Aurelian Stan C.D. 518.3 : 621—7

Quelques abaques utiles pour la protection des machines contre les vibrations

On présente deux abaques utiles dans la projection des dispositifs d'amortissement et d'isolement des vibrations des divers aggrégats ayant un dégré de liberté.

Un abaque (fig. 1) représente la variation de quelques éléments très utiles (la constante élastique, le coefficient de transmissibilité, la fréquence propre) en fonction de la déformation statique. Il permet d'analyser rapidement une situation existente, de trouver le meilleur matériel qui doit être utilisé (liège, arcs métalliques, caoutchouc), la constante élastique nécessaire etc.

L'autre abaque (fig. 2) permet de déterminer l'épaisseur de la couche d'amortissement de caoutchouc nécessaire dans le cas de sollicitation à la compression, en fonction de quelques caractéristiques du caoutchouc (dureté Shore, modul de Young). On présente aussi des exemples.

Buletinul Institutului politehnic Bucureşti, Tom. XXVI, fasc. 2/964.

Zusammenfassung

D.K. 531.1

D. Mangeron

Beiträge zur nichtlinearen Mechanik der Schwingungen

In einer Reihe seiner früheren Arbeiten hat der Verf. einige neue graphisch-analytische Methoden, die die Getriebelehre betreffen, ausgearbeitet, und zwar: die Methode der reduzierten Beschleunigungen beliebiger Ordnung, die Tangentialgeometrischemethode und die Matrix-Tensor-Methode [1]—[6], während man in [7]—[15] einige Forschungsarbeiten, wo die obenerwähnten Methoden benützt worden waren, findet.

In dieser Arbeit löst der Verf. — dank seiner eigenen Methode der Intergralgleichungen [31] — einige Probleme, die eine Klasse Integro-Differential-Polywellengleichungen (7), (8) betreffen und in der nichtlinearen Mechanik der Schwingungen vom Interesse sind.

Buletinul Institutului politehnic Bucureşti, Tom. XXVI, fasc. 2/964.

D.K. 517.9

I. M. Miu

Über die reelen Nullen einiger Funktionen

In dieser Arbeit wird eine Verallgemeinerung eines vom Verfasser in [1] und [2] veröffentlichen Theorems, bezüglich der reelen Nullen einiger Klassen von Funktionen, gegeben.

Buletinul Institutului politehnic Bucureşti, Tom. XXVI, fasc. 2/964.

D.K. 539.1

D. Anghelescu

Einfluss der Aufbewahrung von Kernspuremulsionen in Flüssigkeiten auf α-Spuren und Thorondiffusion

Die Verlängerung von α-Spuren und die Intensirvierung der Diffusion Thoronatomen wird in Kernspuremulsionen untersucht, die in verschiedenen organischen Flüssigkeiten exponiert wurden. In dieser Hinsicht werden quantitative Charakteristiken für die einzelnen Flüssigkeiten gegeben.

Buletinul Institutului politehnic Bucureşti, Tom. XXVI, fasc. 2/964.

D.K. 518.3 : 621—7

Aurelian Stan

Einige nützliche Nomogrammen zum Schutz der Triebwerke gegen den Schwingungen

Es werden zwei nützliche Nomogrammen zu den Vorkehrungen für Amortisation und Isolierung der Schwingungen verschiedener Aggregate mit einer Freiheitsstufe vorgestellt.

Ein Nomogramm stellt die Veränderung der elastischen Konstante, des Koeffizienten der Übertragung und der eigenen Frequenz in Beziehung mit der statischen Formänderung dar. Damit ist es möglich einen bestimmten Zustand rasch zu analysieren den besten Stoff zu finden den man anwenden kann u.s.w.

Das andere Nomogramm ermöglicht die Bestimmung der Dicke der amortierenden Schicht aus Kautschuk, die notwendig ist im Falle einer auffordernder Zusammendrückung in Beziehung mit ihren Charakteristiken (die Härte Shore, dynamischer Elastizitässmodul u.a.)

Ihre Benützungen werden durch Beispiele erläutert.

Buletinul Institutului politehnic Bucureşti, Tom. XXVI, fasc. 2/964.

C.D. 513.8 : 531

M. Atanasiu

Quelques propriétés topologiques des systèmes des corps

Dans l'ouvrage on expose l'application de la théorie des graphes à l'analyse structurale des systemes des rigides recontrés dans la Mécanique Théorique, la Théorie des Mécanismes et dans la Statique des constructions.

Buletinul Institutului politehnic Bucureşti, Tom. XXVI, fasc. 2/964.

C.D. 661.471 : 615.79

I. Atanasiu, L. Blum Lazăr, M. Constantinescu

L'extraction électrolytique de l'iode des eaux minérales et de gisement

On expose les résultates obtenus dans les essais d'extraction de l'iode des eaux minérales et de gisement.

L-extraction électrolytique est possible dans de bonnes conditions par le fait que la valeur du potentiel de décharge de l'iode est petite et loin des valeurs dés potentiels de décharge des autres halogènes.

La méthode appliquée consiste dans la préoxidation anodique de l'ion I^- à IO_3^- et la mise en liberté de I_2 des solutions diluées, puis la concentration des solution sur des résines echangeant d'ion et l'extraction électrolytique par oxydation anodique de l'ion I^- de eluat.

L'installation utilisée est simple et le processus évolue avec rendement élevé de courant et de substance et avec consommation spécifique d'énergie baissée.

Buletinul Institutului politehnic Bucureşti, Tom. XXVI, fasc. 2/964.

C.D. 621.1 : 531.3

A. Seleşteanu

Les cycles thermo-gazo-dynamiques des machines de force (enérgétiques)

Dans cet ouvrage on fait l'analyse des méthodes de calcul accordant autant d'importance aux phénomènes gazo-dynamiques qu'à ceux thérmo-dynamiques. A cet effet on établit les relations fondamentales permettant de représenter les cycles thermiques dans le diagramme enthalpie/énérgie cynétique. Formules ainsi que diagrammes sont appliqués à une série de cas pratiques, ainsi que : l'écoulement par les canaux, les palettes des turbines, les chambres de combustion, le calcul d'un étage et d'une turbine aggrégats de turbines à gaz, complexes, fusées. En même temps, on trace les diagrammes du processus thérmique, en y indiquant les pertes.

Buletinul Institutului politehnic Bucureşti, Tom. XXVI, fasc. 2/964.

D.K. 513.8 : 531

M. Atanasiu

Einige topologische Eigenschaften der Systeme von Körpern

In der Arbeit wird die Anwendung der Graphen-Théorie in der Struktural-analyse, der festen Systeme, welchen man in der theoretischen Mechanik, in der Theorie der Mechanismen und in der Statik des Baues begegnet, dargestellt.

Buletinul Institutului politehnic Bucureşti, Tom. XXVI, fasc. 2/964.

D.K. 661.471 : 615.79

I. Atanasiu, L. Blum Lazăr, M. Constantinescu

Elektrolytische Extraktion von Jod aus den Mineralwässern und Schichtwässern

Es werden die Versuchsergebnisse über die Extraktion von Jod aus den Mineralwässern und Schichtwässern gegeben.

Die elektrolytische Extraktion ist unter guten Bedingungen möglich, da der Wert des Entladungspotentials des Jodes klein und von den Werten der Entladungspotentiale der anderen Halogene entfernt ist.

Die angewandte Methode besteht in der anodischen Voroxydierung des Ions I^- zu IO_3^- und Freigabe des I_2 aus verdünnten Lösungen, darauffolgende Konzentration der Lösungen auf Ionenaustauschern Harzen und der elektrolytischen Extraktion durch anodische Oxydierung des I^- Ions aus der Eluat.

Die verwendete Einrichtung ist einfach und der Vorgang läuft mit einem hohen Strom-und einer hohen Substanzausbeute und einem geringen spezifischem Energieverbrauch ab.

Buletinul Institutului politehnic Bucureşti, Tom. XXVI, fasc. 2/964.

D.K. 621.1 : 531.3

A. Seleşteanu

Thermo-gaso-dynamische Prozesse der Kraftmaschinen

In der Arbeit sind die Berechnungsmethoden studiert, welche dieselbe Bedeutung den gaso-dynamischen sowie termo-dynamischen Erscheinungen zuschreiben. Zu diesem Zwecke, sind die Grundgleichungen angegeben, welche die Prozessendarstellung in der Enthalpie kynetische Energie Diagramm erlauben.

Die Formeln und die Diagrammen sind an eine Reihe von Beispielen angewandt: Strömung durch die Kanälle, Schaufeln der Turbomaschinen, Verbrennungskammern, Berechnung einer Stufe und einer Turbine, Gasturbineninstallationen, Raketen. Gleichzeitig sind die thermischen Prozesse mit Verlusten dargestellt.

Buletinul Institutului politehnic Bucureşti, Tom. XXVI, fasc. 2/964.

C.D. 621.43.043

M. Năstase

L'aspect polystadial de la période de retardement à autoallumage ayant rapport aux expérimentations effectuées sur moteurs à allumage par compression à chambre de turbulence séparée

A partir de certaines expérimentations effectuées sur un moteur Diesel à chambres de turbulence séparées, on analyse dans l'ouvrage la période de retardement à autoallumage sous l'aspect polystadial de l'autoallumage, (allumage spontané).

Pour concrétiser le rôle que les processus physiques et chimiques jouent dans la période de retardement à autoallumage on a poursuivi l'influence de la température et de la turbulence de la chambre séparée de turbulence et l'influence de la nature du combustible.

De l'analyse effectuée, on constate le caractère complexe, polystadial des processus, physico-chimiques qui ont lieu dans la période de retardement à autoallumage, ces processus jouant un rôle de la même importance.

On différencie l'importance que comporte un certain type de processus physique ou chimique seulement si l'on considère les conditions de la chambre de combustion : la température, la turbulence de l'aire, etc.

Buletinul Institutului politehnic Bucureşti, Tom. XXVI, fasc. 2/964.

C.D. 621.512 : 621.3.017

C. Guţă

„La recherche expérimentale des palettes du comprresseur axial profilés avec considération des pertes d'énergie"

Expérimentalement, pour 3 allongements relatifs choisis (h 0,35 ; 0,52 ; 1,04) on étudie les réseaux de profils du compresseur axial profilé en deux variantes :

a) Selon la loi de la circulation constante.

b) Avec considération des pertes d'énergie.

On a analysé la structure du courant avant et après le réseau de profils et on a établi la dépendence des pertes d'énergie des facteurs considérés.

Buletinul Institutului politehnic Bucureşti, Tom. XXVI, fasc. 2/964.

C.D. 538.3 : 530.12

A. Timotin, A. Ţugulea

Sur l'interprétation relativiste de l'électrodynamique Maxwell-Hertz

On montre que la généralisation par Hertz de l'électrodynamique de Maxwell est la seule théorie prérelativiste des phénomènes électomagnetiques qui soit compatible avec le principe de la relativité et qui ne s'éloigne de l'electrodynamique relativiste que par sa base cynématique.

Il s'ensuit que l'électrodynamique de Hertz, comme d'ailleurs la mécanique de Newton, devrait être employée lorsqu'on peut admettre de négliger les effets relativistes.

Buletinul Institutului politehnic Bucureşti, Tom. XXVI, fasc. 2/964.

D.K. 621.43.043

M. Năstase

Der polystadiale Ausdruck der Verzögerungsperiode bei Selbstzündung, mit Berufung auf Versuche die mit Motoren mit Druckzündung mit separater Turbulenzkammer gemacht wurden

Auf Grund von an einem Dieselmotor mit gesonderten Wirbelströmungs — (Turbulenz) kammern durchgeführten Versuchen, wird (im Artikel) die Verzögerungsperiode bei Selbstzündung vom Gesichtspunkte der Mehrstufigkeit der Selbstzündung, untersucht.

Zwecks Veranschaulichung der Bedeutung der physischen und chemischen Prozesse in der Verzögerungsperiode bei Selbstzündung, wurde der Einfluss der Temperatur und der Wirbelströmung in der gesonderten Wirbelströmungskammer und der Einfluss der Art des Brennstoffes, verfolgt.

Aus der erfolgten Untersuchung ergab sich der komplexe mehrstufige Charakter der physischen und chemischen Prozesse, welche sich in der Verzögerungsperiode bei Selbstzündung abspielen, beide von gleichgrosser Bedeutung.

Die Bedeutung, welche ein gewisser physischer oder chemischer Prozess hat, tritt hervor, nur wenn die Bedingungen in der Verbrennungskammer — die Temperatur, die Wirbelströmung der Luft, usw. in Erwägung gezogen werden.

Buletinul Institutului politehnic Bucureşti, Tom. XXVI, fasc. 2/964.

D.K. 621.512 : 621.3.017

C. Guţă

„Experimentelle Untersuchung der unter Berücksichtigung der Energieverluste profilierten Schaufelsysteme des axialen Kompressors"

Auf experimentellem Wege werden für drei gewählte relative Längen ($h = 0{,}35$; $0{,}52$; $1{,}04$) die Profilnetze des in zwei Varianten profilierten axialen Kompressors studiert:

a) Nach dem Gesetze des konstanten Kreislaufs.

b) Unter Berücksichtigung der Energieverluste.

Die Struktur des Stromes wurde vor und nach den Netzprofilen untersucht und die Abhängigkeit der Energieverluste von den berücksichtigten Faktoren, festgestellt.

Buletinul Institutului politehnic Bucureşti, Tom. XXVI, fasc. 2/964.

D.K. 538.3 : 530.12

A. Timotin, A. Ţugulea

Über die relativistische Deutung der Maxwell-Hertz'schen Elektrodynamik

Es wird gezeigt, dass die Hertz'sche Verallgemeinerung der Maxwellschen Elektrodynamik die einizige vorrelativistische Theorie der elektromagnetischen Erscheinungen ist und sich von der relativistischen Elektrodynamik nur durch deren kinematische Grundsätze unterscheidet.

Buletinul Institutului politehnic Bucureşti, Tom. XXVI, fasc. 2/964.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC BUCUREȘTI
Tomul XXVI — 1964. Fascicola 2

MATEMATICĂ

C.Z. 531.1

CONTRIBUȚII LA MECANICA NELINIARĂ A VIBRAȚIILOR

D. MANGERON
Institutul politehnic Iași

Într-un șir de studii anterioare, consacrate elaborării metodei accelerațiilor reduse, metodei tangențiale și metodei matriciale, interesînd studiul mecanismelor și mașinilor, atît ca analiză de funcționare cît și ca sinteză de proiectare în vederea automatizării, autorul a expus fundamentele unor procedee grafo-analitice noi, [1]—[6], folosite apoi în țară și peste hotare (îndeosebi în U.R.S.S., S.U.A., R. P. Chineză, R. P. Bulgaria) ca bază pentru unele teze de doctorat (J. S. Beggs, S.U.A.; John J. Uicker, S.U.A.; Ia. S. Zilberman, U.R.S.S., Ia. A. Iasiulionis, U.R.S.S.; Chang Tsy Siarg, R. P. Chineză; G. Kalitzin, R. P. Bulgaria ș.a. ș.a.) [7]—[12], de disertație de candidat în științe fizico-matematice (C. Drăgan, Iași), sau pentru unele studii fundamentale sau aplicative [13]—[15].

Trebuie menționat, în particular, faptul că studiile autorului relative la metoda accelerațiilor reduse, folosite pînă mai eri în mod sistematic în probleme de cinematică, și-au găsit acum — după cum s-a subliniat de către acad. sovietic S. N. Kojevnikov la recentul congres unional de Mecanică teoretică și aplicată (29.I.—5.II.1964, Moscova) — aplicații de fond și în dinamica mecanismelor [16].

O altă serie de lucrări, inițiată prin studiul [17], inserat în IZVESTIA AKADEMII NAUK S.S.S.R., O.T.N., MEHANIKA I MASINOSTROENIE, servește acum — așa cum au arătat unele studii ce se fac în continuare sub dirijarea autorului la Universitatea din Dakar, Senegal, [18], [19] — și așa cum a subliniat în revista internațională de bibliografie mecanică REFERATIVNII JURNAL MEHANICA prof. dr. V. V. Dobronravov cu ocazia dării de seamă asupra lucrării menționate — ca bază pentru elaborarea într-o formă nouă a întregei mecanici analitice.

Este vorba de stabilirea unei infinități de ecuații de forma

$$\frac{1}{m}\frac{\partial T^{(m)}}{\partial q_j^{(m)}} - \frac{m+1}{m}\frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j, \quad (j = 1,2,\ldots, n) \tag{1}$$

în care m este un număr întreg pozitiv, iar prin indicele (m) s-a notat ordinul de derivare totală în raport cu timpul, care schematizează problemele de mișcare a sistemelor mecanice olonome.

Ecuațiile corespunzătoare de mișcare a sistemelor mecanice neolonome se prezintă, de ex., atunci cînd avem de aface cu dependențe liniare neintegrabile între vitezele lagrangiene generalizate

$$\dot{q}_n = a_{r\alpha}\dot{q}_\alpha + a_r \ , \quad (a = 1, 2, .., k \ ; \ r = k+1, k+2, ..., k+p = n). \tag{2}$$

$$a_{r\alpha} = a_{r\alpha}(t, [q_\alpha]), \ a_r = a_r(t, [q_r]), \ [q_\alpha] \equiv (q_1, q_2, \cdots, q_k),$$

$$[q_r] \equiv (q_{k+1}, q_{k+2}, \cdots, q_{k+p}). \ \dot{q}_r \equiv \frac{d}{dt} q_r \cdot \dot{q}_\alpha \equiv \frac{d}{dt} q_\alpha , \tag{3}$$

în care k este un număr întreg ce marchează numărul coordonatelor lagrangiene independente, sumarea se face în raport cu $r = k+1$, $k+2, \ldots, T_0$ este o funcție care diferă de energia cinetică T prin faptul că în expresia lui T_0 se consideră drept variabile numai coordonatele generalizate q_j și t, pe cînd vitezele generalizate $\dot{q}_j$ sînt luate drept niște mărimi fixate. Funcția R_m este definită prin

$$R_m = \frac{1}{m}[T^{(m)} - T_0^{(m)}], \ m = 1, 2, 3, \ldots . \tag{4}$$

În cele ce urmează se expune o serie de rezultate noi relative la mecanica tehnică a vibrațiilor neliniare, interesînd îndeosebi variate game de fenomene din fizica și tehnica actuale, cristalizate prin sisteme integro-diferențiale *).

§ 1. Ecuații integro-diferențiale polivibrante

Fie

$$M^k[v(\xi, \eta)] = f_1(\xi, \eta) + \lambda \iint_{R1*} K_1(\xi, \eta; \xi_0, \eta_0) f_2[\xi_0, \eta_0; v(\xi_0, \eta_0)] \, d\xi_0 \, d\eta_0 , \tag{5}$$

o ecuație integro-diferențială polivibrantă de ordin k, în care λ este un parametru, operatorul diferențial

$$M[\cdot] \equiv \left(\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} - \frac{\partial^2}{\partial \eta^2}\right)[\cdot], \quad M^k \equiv \left(\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} - \frac{\partial^2}{\partial \eta^2}\right) M^{k-1}, \tag{6}$$

care constituie o particularizare a operatorilor diferențiali de forma

$$M^k[v(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m; \eta_1, \ldots, \eta_2, \eta_m)] \equiv \left(\frac{\partial^{2m}}{\partial \xi_1^2 \partial \xi_2^2 \cdots \partial \xi_m^2} - \right.$$

$$\left. - \frac{\partial^{2m}}{\partial \eta_1^2 \partial \eta_2^2 \cdots \partial \eta_m^2} \right) M^{k-1}[v],$$

*) A se vedea capitolele introductive în fenomene fortuite și ereditare în mecanica vibrațiilor în [20].

folosiți de autor în cadrul teoriei unitare a diferitelor tipuri de ecuații integro-diferențiale, prezentată la al IV-lea Congres al Matematicienilor Romîni și utilizată acum de alți autori [21]—[23], este clasicul operator al undelor, $f_1(\cdot)$, $K_1(\cdot)$, $f_2(\cdot)$ sînt funcții continue date pentru toți

$$(\xi, \eta),\ (\xi_0, \eta_0) \in R_1^* \equiv [a_1, b_1] \times [a_2 b_2],\ \alpha \leqslant v \leqslant \beta.$$

f_2 fiind o funcție neliniară în raport cu v.

Ecuația (5) se transformă prin folosirea substituțiilor

$$\xi = \frac{1}{2}(x+y),\quad \eta = \frac{1}{2}(x-y)$$

într-o ecuație integro-diferențială neliniară cu derivata de ordin superior a lui Picone [24]

$$\frac{\partial^{2k} u(x,y)}{\partial x^k \partial y^k} = F_1(x,y) + \lambda \iint_{R^*} K_2(x,y;t,\tau) f[t,\tau; u(t,\tau)]\, dt\, d\tau, \qquad (6)$$

în care s-a notat

$$u(x,y) \equiv v\left[\frac{x+y}{2}, \frac{x-y}{2}\right],\ F_1(x,y) \equiv f_1\left[\frac{x+y}{2}, \frac{x-y}{2}\right],$$

$$K_2(x,y:t,\tau) \equiv K_1\left[\frac{x+y}{2}, \frac{x-y}{2}; \frac{t+\tau}{2}, \frac{t-\tau}{2}\right],\ K^* = [a,b] \times [b,d],$$

$$f[t,\tau;\ u(t,\tau)] \equiv f_2\left[\frac{t+\tau}{2}, \frac{t-\tau}{2}; v\left(\frac{t+\tau}{2}, \frac{t-\tau}{2}\right)\right].$$

§ 2. Probleme de tip Dirichlet pentru ecuații integro-diferențiale polivibrante

Să studiem problema de existență și de unicitate a soluțiilor problemelor de contur

$$u(A)\,|_{Fr\,R} = \varphi_0(A);\ D^i u(A)\,|_{R1} = \varphi_i(A)\quad (i = 1, 2, \cdots, k-1) \qquad (7)$$

relative la ecuații integro-diferențiale polivibrante de un tip ceva mai general decît acel menționat în (5) și anume

$$D^k u(A) + \sum_{i=k-2}^{\circ} \sum_{j=k-2}^{\circ} B_{ij}(A) \frac{\partial^{i+j} u(A)}{\partial x^i \partial y^j} = f_1[A, u(A)] + \qquad (8)$$

$$+ \iint_R K(A,B) f_2[B, u(B)]\, dB.$$

În (8) prin $D \equiv \dfrac{\partial^2}{\partial x\, \partial y}$ s-a notat derivata prima totală a lui Picone [25], introdusă de autor în [26] și folosită apoi cu deosebit succes în calculul

variatelor soluții ale problemelor de Fizică Matematică ([27], pag. 201 și urm.), $B_{ij}(A) \equiv B_{ij}(x,y)$; $\varphi_i(A)$, $K(A,B)$ sînt funcții continue date pentru toți $A, B \in R = [a,c] \times [b,d]$; $dB = d\xi\, d\eta$; $f_1[A, u(A)]$; și $f_2[B, u(B)]$ sînt funcții date, în general vorbind neliniare în raport cu cel de al doilea argument pentru toți $A, B, u \in g\{R, r_1 \leqslant |u| \leqslant r_2\}$: $F_r R$ este frontiera domeniului R și $R_1 = \begin{cases} x = a, & b \leqslant y \leqslant d, \\ y = b, & a \leqslant x \leqslant c. \end{cases}$

Fie $\Phi(A)$ o funcție cunoscută de $2k$ ori continuu derivabilă, satisfăcînd condițiile neomogene de contur (7), și fie $M(A, B)$ funcția lui Green *) [26], [28] relativă la problema de contur

$$u(A)\,|_{Fr\,R} = 0;\quad D^i u(A)\,|_{R_1} = 0 \,(i = 1, 2, \cdots, k-1);\quad D^k u(A) = 0, \tag{9}$$

și anume

$$M(x,y;\xi,\eta) \equiv$$

$$M(A,B) \equiv \begin{cases} \dfrac{[(x-a)(c-\xi)(y-b)(d-\eta)]^{k-1}}{[(c-a)(d-b)]^{k-1}(k-1)!^2} & x \leqslant \xi;\ y \leqslant \eta, \\ \left\{\dfrac{[(x-a)(c-\xi)]^{k-1}}{(c-a)^{k-1}} - (x-\xi)^{k-1}\right\} \times & \\ \times \dfrac{[(y-b)(d-\eta)]^{k-1}}{(d-b)^{k-1}(k-1)!}, & x \geqslant \xi,\ y \leqslant \eta, \\ \left\{\dfrac{[(y-b)(d-\eta)]^{k-1}}{(d-b)^{k-1}} - (y-\eta)^{k-1}\right\} \times & \\ \times \dfrac{[(x-a)(c-\xi)]^{k-1}}{(c-a)^{k-1}(k-1)!}, & x \leqslant \xi,\ y \geqslant \eta, \\ \left\{\dfrac{[(x-a)(c-\xi)]^{k-1}}{(c-a)^{k-1}} - (x-\xi)^{k-1}\right\} \times & \\ \times \left\{\dfrac{[(y-b)(d-\eta)]^{k-1}}{(d-b)^{k-1}} - (y-\eta)^{k-1}\right\} & x \geqslant \xi,\ y \geqslant \eta. \end{cases} \tag{10}$$

Din (7), (8) se obține

$$u(A) = \Phi(A) - \iint_R M(A,B)\left[f_1[B, u(B)] - \sum_{i=k-2}^{\circ} \sum_{i=k-2}^{\circ} B_{ij}(B)\, \frac{\partial^{i+j} u(B)}{\partial \xi^i\, \partial \eta^j} + \right. \tag{11}$$

$$\left. + \iint_R K(B,C) f_2[C, u(C)]\, dC\right] dB \equiv \Phi(A) - \iint_R (A,B)\, S[u(B)]\, dB + $$

$$+ \iint f_3[A, B, u(B)]\, dB,$$

*) Unii autori, ca de ex., prof. dr. M. Salvadori de la Universitatea Columbia din New York, folosind ca bază de plecare în teza sa de doctorat unele lucrări ale autorului [29], a numit funcția $M(A, B)$ „funcția lui Mangeron". Ea a mai fost folosită apoi de L. E. Krivoșein, U.R.S.S., F. Rossi, Italia ș.a.

în care s-a notat

$$f_3[A, B, u(B)] \equiv M(A, B) f_1[B, u(B)] + f_2[B, u(A)] \iint_R M(A, C) K(C, B)\, dC ; \tag{12}$$

$$S[u(B)] \equiv \sum_{i=k-2}^{\infty} \sum_{j=k-2}^{\infty} B_{ij}(B) \frac{\partial^{i+j} u(B)}{\partial \xi^i \partial \eta^j} .$$

Introducînd funcția

$$\varphi(A) \equiv S[u(A)] \tag{13}$$

și operînd asupra ecuației (11) cu operatorul $S[\cdot]$, se obține următoarea ecuație integrală

$$\varphi(A) = \Phi_1(A) + \iint_R M_2(A, B) \varphi(B)\, dB + \iint_R f_4[A, B, u(B)]\, dB , \tag{14}$$

în care prin $\Phi_1(A)$, $M_2(A, B)$ s-au notat funcții cunoscute pentru toți $A, B \in R$ și $f_4[A, B, u(B)] \equiv S_A[f_1[A, B, u(B)]]$.

Fie $\Gamma(A, B)$ nucleul rezolvant al nucleului $M_2(A, B)$. Din (14) rezultă

$$\varphi(A) = \Phi_1(A) + \iint_R f_4[A, B, u(B)]\, dB + \iint_R \Gamma(A, B) [\Phi_1(B) + \tag{15}$$

$$+ \iint_R f_4[B, C, u(C)]\, dC]\, dB \equiv \Phi_2(A) + \iint_R f_6[A, B, u(B)]\, dB .$$

Prin urmare, din (11), ținîndu-se seama de (15), se obține

$$u(A) = \Phi_3(A) + \iint_R f_6[A, A, u(B)]\, dB . \tag{16}$$

În consecință, dacă funcția $f_6[A, B, u(B)]$ satisface în domeniul $g = \{R, r_1 \leqslant |u| \leqslant r_2\}$ în raport cu cel de al treilea argument condiția lui Lipschitz cu coeficientul $\gamma(A, B)$ și dacă este îndeplinită inegalitatea

$$\max_R \iint_R \gamma(A, B)\, dB < 1, \tag{17}$$

atunci existența și unicitatea problemei (7), (8) sînt asigurate pe baza principiului reprezentărilor condensate (S. Banach).

Se poate enunța, în consecință, următoarea

Teorema 1. *Dacă* M(A, B) *este funcția lui Green a problemei de contur* (9), *dacă* 1 *nu este o valoare caracteristică a nucleului* $M_2(A, B)$; $\Gamma(A, B)$ *este nucleul rezolvant al acestui nucleu* $M_2(A, B)$ *și dacă funcția* $f_6[A, B, u(B)]$ *satisface în domeniul* g *condiția lui Lipschitz în raport cu cel de al treilea argument al său, avînd drept coeficient* $\gamma(A, B)$, *atunci problema de contur* (7), (8) *posedă — în ipoteza îndeplinirii inegalității* (17) *— o soluție unică de* 2k *ori continuu derivabilă, și care poate fi construită prin metoda aproximațiilor succesive a lui Picard* *).

*) Condiția de lipschitzianitate din teorema de mai sus poate fi extinsă, așa cum a arătat A. Rosenblatt folosind o lucrare a autorului [30].

§ 3. Rezolvări de probleme de mecanică neliniară prin metoda ecuațiilor integrale *)

Să determinăm cu aproximație soluția problemei de contur (7), (8) relativă la ecuații integro-diferențiale polivibrante folosind metoda ecuațiilor integrale, expusă de autor cu prilejul recentului congres de Mecanică neliniară a vibrațiilor organizat de R.S.C. și R.P.P. la Liblice (Praga) [31].

Deoarece rezolvarea ecuațiilor din sistemul integro-diferențial (7), (8) este echivalentă cu determinarea soluției ecuației integrale (16), vom folosi în cele ce urmează — în cadrul aplicării sistematice a metodei ecuațiilor integrale elaborată de autor — ecuația auxiliară funcțională

$$w(A) = \Phi_3(A) + \sum_{i=1}^{s} \sum_{j=1}^{r} c_{ij} f_6[A, (x_i, y_j), w(x_i, y_j)], (x_i, y_j) \in R, \quad (18)$$

în care c_{ij} sînt coeficienți cunoscuți, preluați dintr-o formulă de cubatură aleasă la baza procesului de aproximație **).

Punînd în (18) $i = 1, 2, \ldots, s$; $j = 1, 2, \ldots, r$, se obține un sistem de ecuații neliniare numerice, ce poate fi transcris sub forma vectorial-matricială

$$W = \Phi_4 + T(W). \quad (19)$$

Din (19) rezultă că dacă norma operatorului T satisface inegalitatea

$$\| T \| < 1, \quad (20)$$

atunci soluția sistemului (19) există și este unică.

Prin urmare funcția $w(A)$ se determină într-un mod univoc. Dacă soluția problemei (19) este determinată cu aproximație, atunci și funcția $w(A)$ se găsește și ea cu aproximație.

Fie σ_{ij} $(i = 1, 2, \ldots, s;\ j = 1, 2, \ldots, r)$ — soluția problemei (19) (exactă sau aproximativă). Atunci, drept soluție aproximativă a problemei (7), (8) se ia funcția

$$u_{sr}(A) = \Phi_3(A) + \sum_{i=1}^{s} \sum_{j=1}^{r} c_{ij} f_6[A, (x_i, y_j), \sigma_{ij}]. \quad (21)$$

Dacă funcția $\Gamma(A, B)$ nu este cunoscută, atunci, folosind (14), se construiește o ecuație redusă pentru determinarea aproximativă a funcției $\varphi(A)$ și anume

$$\bar{\varphi}(A) = \Phi_1(A) + \sum_{i=1}^{s} \sum_{j=1}^{r} c_{ij} M_2(A; (x_i, y_j)) \bar{\varphi}(x_i, y_j) + \psi(A, \bar{u}), \quad (22)$$

*) Metoda ecuațiilor integrale elaborată de autor, a fost numită în unele lucrări recente „metoda lui Mangeron de rezolvare a problemelor neliniare" [32].

**) Pentru numeroase formule de cubatură noi, utile în calcule moderne, a se vedea rezultatele recentului colocviu de Analiză numerică de la Cluj [33], precum și o serie de noi formule de cubatură elaborate cu totul recent de D. L. Sobolev, ș.a. [34], D. V. Ionescu [33] ș.a.

în care

$$\psi(A, \bar{u}) \equiv \iint_R f_4[A, B, \bar{u}(B)]\, dB .$$

Atunci cînd este îndeplinită inegalitatea

$$\boxed{\det} \| c_{ij} M_2[(x_\alpha, y_\beta), (x_i, y_j)] \| \neq 0, \tag{23}$$

din (22) se găsește mai întîi $\varphi(x_i, y_j)$ și se obține apoi

$$\bar{\varphi}(A) = \Phi_{sr}(A) + \iint_R f_7[A, B, \bar{u}(B)]\, dB, \tag{24}$$

în care $\Phi_{sr}(A)$, $f_7[A, B, \bar{u}(B)]$ sînt funcții cunoscute de argumentele lor.

Substituind (24) în (11), se obține ecuația integrală din care se determină soluția aproximativă $z_{sr}(A)$ a problemei considerate:

$$z_{sr}(A) = \Phi(A) + \iint_R f_3[A, B, z_{sr}(B)]\, dB - \iint_R M(A, C)\,[\Phi_{sr}(C) + \tag{25}$$

$$+ \iint_R f_7[C, B, z_{sr}(B)]\, dB]\, dC \equiv \psi_{sr}(A) + \iint_R f_8[A, B, z_{sr}(B)]\, dB.$$

Din (25) rezultă, că pentru existență și unicitate a funcției $z_{sr}(A)$ ajunge să fie îndeplinite inegalitățile

$$|f_6[A, B, v_2(B)] - f_8[A, B, v_1(B)]| \leqslant l(A, B)\,|v_2(B) - v_1(B)|, \tag{26}$$

$$\boxed{\max} \iint l(A, B)\, dB < 1, \tag{27}$$

$l(A, B)$ fiind „constanta" lui Lipschitz și $\{v_1, v_2, A\} \in g$.

Dacă inegalitățile (26), (27) sînt îndeplinite, funcția $z_{sr}(A)$ poate fi construită prin metoda aproximațiilor succesive a lui Picard.

În caz contrar, se construiește ecuația redusă de forma

$$u_{sr}(A) = \psi_{sr}(A) + \sum_{\alpha=1}^{\nu} \sum_{\beta=1}^{\lambda} c_{\alpha\beta} f_8[A, (x_\alpha, y_\beta), u_{sr}(x_\alpha, y_\beta)], \tag{28}$$

$$(x_\alpha, y_\beta) \in R,$$

procedîndu-se apoi în mod analog cu cel indicat la începutul acestui paragraf.

Acest procedeu se cristalizează aici după cum urmează: Se formează sistemul de ecuații

$$u_{sr}(x_i, y_j) = \psi_{sr}(x_i, y_j) + \sum_{\alpha=1}^{\nu} \sum_{\beta=1}^{\lambda} c_{\alpha\beta} f_8[(x_i, y_j), (x_\alpha, y_\beta), u_{sr}(x_\alpha, y_\beta)] \tag{29}$$

$$(i = 1, 2, \cdots, \nu;\ j = 1, 2, \cdots, \lambda).$$

Determinînd din acest sistem $u_{sr}(x_\alpha, y_\beta)$ (cu precizie sau cu aproximație), se găsește apoi $\bar{u}_{sr}(A)$, care este soluția aproximativă a problemei (7), (8).

Cele de mai sus permit să se enunțe următoarele teoreme:

Teorema 2. *Dacă în domeniul* R *problema* (9), (8) *posedă o soluție unică de* 2 k *ori continuu derivabilă,* $\Gamma(A, B)$ *este nucleul rezolvant al nucleului* $M_2(A, B)$, *este îndeplinită inegalitatea* (20), *atunci soluția aproximativă a problemei inițiale poate fi construită pe baza formulei* (21).

Teorema 3. *Dacă în domeniul* R *problema* (7), (8) *posedă o soluție unică de* 2 *k ori continuu derivabilă, sînt îndeplinite inegalitățile* (23), (26), (27), *atunci soluția aproximativă a problemei considerate poate fi dată sub forma*

$$\bar{u}_{sr}(A) = \psi_{sr}(A) + \iint_R f_8 [A, B, \omega_{sr}(B)]\, dB, \tag{30}$$

în care $\omega_{sr}(A)$ *este soluția (exactă sau aproximativă) a ecuației integrale*

$$v(A) = \psi_{sr}(A + \iint_R f_9 [A, B)\, v(B)]\, dB. \tag{31}$$

Funcția $w_{sr}(A)$ *poate fi construită prin același procedeu ca și funcția* (21).

§ 4. Concluzii

În cap. IV „Mecanica vibrațiilor" din volumul recent FUNDAMENTELE MECANICII [20] autorul a ilustrat metoda elaborată a ecuațiilor integrale, studiind, de ex., problema care schematizează funcționarea unui oscilator cu lămpi

$$LC\frac{d^2u}{dt^2} + RC\frac{du}{dt} + u = [(M - LD)\frac{d}{dt} - DR]\, f[E_r + u], \tag{32}$$

în care $L, C, R, \ldots$ sînt parametri independenți de timp, $f(\cdot)$ este o funcție neliniară de u, unicitatea soluției fiind asigurată prin condiții adecvate inițiale sau de contur (Problema de tip Cauchy, Dirichlet ș.a.).

Noi elaborări de aplicare a metodei ecuațiilor integrale, interesînd ecuații integro-diferențiale, merită atenție în tratarea concretă a numeroaselor probleme de bază, rezolvate cu succes la noi în țară, ca de ex. teoria jeturilor laterale, datorită acad. Elie Carafoli [35] sau unele probleme de scurgeri ale acad. C. Iacob [36].

Noi probleme interesînd mecanica vibrațiilor, promovată la noi în țară și în cadrul numeroaselor aplicații practice [37], au fost rezolvate recent de autor, în colaborare cu A. F. Șestopal, în paginile aceluiași *Buletin*, pe cînd o altă serie de probleme se află în curs de elaborare sau sub tipar, în colaborare cu L. E. Krivoșein ș.a. [38], [39].

Menționăm, în fine, abordarea de către autor a problemelor polivibrante prin procedee de programare dinamică [40], care au atras în mod deosebit atenția lui R. Bellman și a altor specialiști [41].

BIBLIOGRAFIE

1. D. Mangeron, *K grafo-analiticeskim metodam kinematiki material'nyh sistem*. Doklady Akad. Nauk SSSR, *102*, *5*, 1955, 897—898. *O privedennyh uskoreniah liubogo poreadka i nekotoryh ih ekstremal'nyh svoistvah*. Doklady Akad. Nauk S.S.S.R., *112*, *1*, 1957, 27—28.

2. D. Mangeron, C. Drăgan, *Kinematiceskoe issledovanie novym matricino-tensornym metodom cetyrehzvennyh prostrastvennyh mehanizmov*. Revue de Méc. appl., *VII*, *3*, 1962, 539—552.

3. D. Mangeron, *Mechanisms Design through the reduced accelerations method*. Proccedings. Congress on theoretical and applied Mechanics, Bombay, 1961, 347—350.

4. D. Mangeron, *Eine neue tangentialgeometrische Methode zum Studium der Maschinen und Getriebe*. Wiss. Tagung der Technischen Universität Dresden, 1962. Zusammenfassungen.

5. D. Mangeron, *Some new methods concerning nonlinear vibrations*. II. wiss. Konferenz über nichtlinearen Schwingungen. Warszawa, 1963.

6. D. Mangeron, *Einige neue Methoden zum Studium der Getriebe und Antriebe*. III. internationale Konferenz zum Studium der Getriebe und Antriebe. Miskolc, 1963. Zusammenfassungen.

7. John J. Uicker, Jr., *Velocity and Acceleration Analysis of Spacial Mechanisms using 4X4 Matrices Method*. Northwestern University, Technological Institute. Evanston, III., 1963.

8. J. S. Beggs, *The Screw Matrix*. Bul. Inst. politehn. Iași, *VI (X)*, *3—4*, 1963, 315—322.

9. Ia. S. Zilberman, *Issledovanie mehanizmov metodom privedennyh uskorenii*. Trudy Rostovskogo-na-Donu Instituta injenerov jeleznodorojnogo transporta. *XXIX*, Prikladnaia Mehanika, 1961, 11—91.

10. Ia. I. Iasiulionis, *Primenenie δ krugov k uskoreniam vysșego poreadka*. Lietuvos Zemes Ūkio Akademijos Moksliniai Darbai, V, 1958, 253—259.

11. G. Kalitzin, *Teoria na mehanizmite i maşinite*. Izd. „Tehnika", Sofia, 1960.

12. * * * *Teoria mecanismelor și mașinilor. Structura și Cinematica mecanismelor*. Ed. Tehn., București, 1959. Cap. II, § 22. *Metoda accelerațiilor reduse*, pp. 352—354.

13. C. Drăgan, *Asupra unor noi metode de studiu a mecanismelor și mașinilor*. Autoreferatul lucrării de disertație pentru obținerea titlului de candidat în științe fiz.-mat. Univ. „Al. I. Cuza", Iași, 1961.

14. P. A. Lebedev, *Analiticeskie metody issledovania prostranstvennyh mehanizmov*. Sudpromgiz, Leningrad, 1963.

15. T.-Tzy-Syan, *Kinematiceskii analiz mehanizmov s nizșimi parami metodom kvadratnyh matritz 4-go poreadka*. Akad. Nauk SSSR, Teoria Mașin i Mehanizmov, vyp. *92—93*, 1962, 17—27.

16. S. N. Kojevnikov, *Dinamika mașin s uprugimi zveniami i raspreaelennymi parametrami*. Vtoroi vsesoiuznyi S'edz po teoreticeskoi i prikladnoi mehanike. Annotatzii dokladov. Moskva, Akad. Nauk SSSR, 1964, 112—113.

17. D. Mangeron, *O novîh formah uravnenii analiticeskoi dinamiki*. Izv. Akad. Nauk SSSR, OTN, Mehanika i Mașinostroenie, *2*, 1962, 128.

18. Souleymane Niang, *Sur les équations de Lagrange-Mangeron concernant les équations de la Mecanique analytique*. Bul. Inst. politehnic Iași, *X (XIV)*, *1—2*, 1964.

19. V. V. Dobronravov, *Retenzia 9A74 o rabote D, Mangeron i S. Deleanu*. Ref. J. Mehanika, *9*, 1963, 12.

20. Z. Gábos, D. Mangeron, I. Stan, *Fundamentele Mecanicii*. Ed. Acad. R.P.R., Cap. IV. D. Mangeron, *Mecanica vibrațiilor*, 1962, 215—386.

21. D. Mangeron, *Solutions par composition concernant différents types d'équations aux dérivées partielles*. Al IV-lea Congres al Matematicienilor Romîni, București, 1956.

22. Iu. M. Berezansky, *O kraevyh zadaceah dlea obscih differențialnyh operatorov v ceastnyh proizvodnyh*. Doklady Akad. Nauk SSSR, 1958, *122*, *6*, 959—962.

23. I. N. Vekua, *Cetvertyi S'ezd rumînskih matematikov*. Izv. Akad. Nauk SSSR, 1956.

24. D. Mangeron, *On the Dirichlet's problems corcerning equations with „total" derivatives*. Bul. Inst. politehn. Iași, s. n., *III (VII)*, *3—4*, 1957.

25. D. Mangeron, L. E. Krivosein, *Il metodo polinomiale nei problemi al contorno per le equazioni integro-differenziali a derivate totali nel senso di Picone*. Accademia Naz. dei Lincei. Rend., Cl. Sci. fis., mat. e nat., s. 8, *XXXII*, *3*, 1962, 306—312.

26. D. Mangeron, *Sopra un problema al contorno per le equazioni a caratteristiche reali multiple*. Rend. Accad. Sci. fis., mat., Napoli, s, 4, *II*, 1932, 1—11.

27. M. Picone, *Nuovi metodi per il calcolo delle soluzioni delle equazioni a derivate parziali della Fisica Matematica.* Ann. Sci. Univ. Jassy, I Section (Math., Phys., Chimie) *XXVI, 1*, 1940, 183—232.

29. M. Salvadori, *Problemi variazionali in forma non parametrica.* Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa, s. 2, *5*, 1936, 51—72.

28. D. Mangeron, *Sur les noyaux associés à certains classes d'équations aux dérivées partielles.* Mathematica, Cluj, 1938, *14*, 31—35.

30. A. Rosenblatt, *Sur l'application de la méthode des approximations de M. Picard à l'étude de certaines équations aux dérivées partielles à caractéristiques réelles et multiples.* C. r. Acad. Sci., Paris, *197*, 1933, 1278—1290.

31. D. Mangeron, *Beiträge zur graphisch-analytische Methoden der nichtlinearen Mechanik*, III. celostatni konference Dynamika stroju. Praha/Liblice, 1963.

32. F.-S. Rossi, *Sul metodo di Mangeron nello studio di certi problemi nonlineari.* Bul. Inst. politehn. Iași, s. n., *XII(XIII), 3—4*, 1963.

33. * * * *Colocviul de aproximarea funcțiilor cu aplicații la calculul numeric.* Cluj, 15—19, XI.1963.

34. * * * *Vtoroi Vsesoiuzny S'ezd po teoreticeskoi i prikladnoi Mehanike.* Annotatzii dokladov. Acad. Nauk SSSR, Moskva, 1964.

35. E. Carafoli, *Theory of the lateral fluid jets concerning rocketry.* Revue de Méc. appl., *VII, 6*, 1962, 1049—1062.

36. C. Iacob, *Introduction mathématique à la Mécanique des fluides.* Acad. R.P.R., București ; Gauthier-Villars, Paris, 1960.

37. Gh. Buzdugan, L. Hamburger, *Combaterea vibrațiilor în întreprinderi.* Acad. R.P.R., 1953.

38. D. Mangeron, A. F. Șestopal, *Problema dezvoltării funcțiilor Green în serii de soluții fundamentale cu aplicații la mecanica vibrațiilor.* Bul. Inst. politehn. București, *6*, 1963 (sub tipar).

39. D. Mangeron, L. E. Krivoșein, *Granicinye zadaci otnoseasciesea k nekotorym novym klassam integro-differentzial'nyh uravnenii interesuiuscih matematiceskuiu fiziku.* Izv. na Mat. Inst. BAN, Sofia, (sub tipar).

40. D. Mangeron, *Sur une classe de problèmes à la frontière non elliptiques d'ordre supérieur.* C. r. Acad. Sci., Paris, *255*, 1962, 2894—2896.

41. D. Mangeron, *On the Bellman's equations on dynamic programming concerning a new class of boundary value problems.* J. Math. Anal. and appl., 8, 1964, 6 p.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC BUCUREȘTI
Tomul XXVI — 1964. Fascicola 2

C.Z. 517.9

SUR LES ZÉROS RÉELS DE CERTAINES FONCTIONS

I. M. MIU

Dans ce travail nous nous occuperons de zéros réels d'une fonction $f(x)$ continue sur l'intervalle $[a, b]$ et dérivable sur (a, b) et ensuite de zéros d'un polynôme d'une variable réelle, relativement à un théorème que nous avons publié auparavant [1], [2], et nous donnerons une généralisation de ce théorème

§ 1. Un théoreme relatif aux zéros d'une certaines classe de fonctions

Dans un travail antérieur [1], nous avons indiqué un théorème relatif aux zéros d'une certaine classe de fonctions.

Nous voudrons donner maintenant une nouvelle forme à ce théorème.

On va introduire d'abord la convention suivante :

Etant donnée une fonction $f(x)$ définie sur l'intervalle $[a, b]$ et continue sur un voisinage $V \in [a, b]$ du point x_0 et une droite Δ, on peut distinguer deux cas, suivant que le graphique $G_f = \{x, f(x) \mid x \in V\}$ de la fonction $f(x)$ dans le voisinage V consideré, traverse ou non cette droite.

Premier cas. Si le graphique G_f de la fonction $f(x)$ rencontre la droite dans un seul point x_0 dans le voisinage V ou seulement sur un ensemble de points $M(x) \in V$, sans traverser cette droite, on dit que la fonction $f(x)$ possède dans le voisinage V un nombre pair de points communs avec la droite Δ.

Le nombre pair de points peut être fini ou infini.

Exemple 1. La fonction $f(x)$ définie et continue sur $[0 ; 8]$ telle que :

$$f(x) = \begin{cases} 12 - 2x & \text{pour } x \in [0; 6] \\ x - 6 & \text{pour } x \in (6; 8] \end{cases}$$

possède au point $x = 6$ un nombre pair de points communs avec l'axe des x.

Exemple 2. La fonction $f(x)$ définie et continue sur $[0\,;5]$ telle que :

$$f(x)=\begin{cases}4-x^2 \text{ pour } x\in[0\,;2]\\ 0 \quad \text{pour } x\in(2\,;3]\\ x-3 \text{ pour } x\in(3\,;5]\end{cases}$$

possède dans l'intervalle $[0\,;5]$ un nombre pair infini de points communs avec l'axe x.

Deuxième cas. Si le graphique G_f de la fonction $f(x)$ rencontre la droite Δ seulement au point x_0 dans le voisinage V, ou seulement dans un ensemble de points $M(x)\in V$ et le graphique traverse la droite Δ, on peut dire que la fonction $f(x)$ possède dans le voisinage V un nombre impair de points communs, avec la droite Δ.

Exemple 3. La fonction $f(x)$ définie et continue sur $[0\,;3]$ telle que :

$$f(x)=\begin{cases}1-x^3 \quad \text{pour } x\in[0\,;1]\\ \dfrac{3}{2}(1-x) \text{ pour } x\in(1\,;3]\end{cases}$$

possède, au point $x=1$ un nombre fini impair de points communs avec l'axe des x.

Exemple 4. La fonction $f(x)$ définie et continue sur $[0\,;6]$ telle que :

$$f(x)=\begin{cases}9-4x^2 \text{ pour } x\in\left[0\,;\dfrac{3}{2}\right]\\ 0 \quad \text{pour } x\in\left(\dfrac{3}{2}\,;4\right]\\ 4-x \quad \text{pour } x\in(4;6]\end{cases}$$

possède, dans l'intervalle $[0\,;6]$ un nombre impair infini de points communs avec l'axe des x qui sont tous les points de l'intervalle $\left[\dfrac{3}{2},4\right]$.

Une conséquence de ce qui vient d'être exposé est la suivante :

Etant donnée une fonction $f(x)$ continue sur l'intervalle $[a,\ b]$,

a) Si $f(a)\,f(b)>0$ la fonction considérée $f(x)$ possède dans $(a,\ b)$ un nombre pair fini de zéros — (ou aucun zero) — ou bien un nombre pair infini de zéros.

b) Si $f(a)\,f(b)<0$ la fonction considérée possède dans $(a,\ b)$ un nombre impair fini de zéros ou un nombre impair infini de zéros.

Avec la convention établie ci-dessus nous pouvons énoncer :

Théorème : Soient les fonctions $f(x)$, $\psi(x)$, $\varphi(x)$, définies sur l'intervalle $[a,\ b]$ avec valeurs finies, telle que :

1° La fonction $f(x)$ est continue sur l'intervalle $[a,\ b]$ et dérivable sur $(a,\ b)$.

2° Les fonctions $\psi(x)$, $\varphi(x)$ sont continues sur $(a,\ b)$.

3° Les fonctions $f(x)$, $\varphi(x)$ n'ont pas de zéros communs réels dans $[a,\ b]$.

Entre deux zéros réels consécutifs de la fonction $f(x)$ appartenant à l'intervalle $[a, b]$ on trouve au total un nombre impair de zéros réels des fonctions :

$$\Phi(x) = \psi(x) f(x) + \varphi(x) f'(x) \text{ et } \varphi(x).$$

Démonstration :

I. La fonction $f(x)$ possède un nombre fini de zéros dans $[a, b]$.

Soient $x = \alpha$ et $x = \beta$. $(\alpha < \beta)$, deux zéros consécutifs réels de la fonction $f(x)$, situés dans l'intervalle $[a, b]$.

Puisque la fonction $f(x)$ est continue sur l'intervalle $[a, b]$, et dérivable sur (a, b), il en résulte qu'on peut écrire pour les valeurs $x \in [a, b]$, $x' \in (a, b)$

$$f(x) = f(x') + f'(x')\,(x - x') + \gamma(x)\,(x - x'),$$

$\gamma(x)$ étant une fonction continue en x' et nulle en ce point. Pour que des valeurs de x et x' telles que $|x - x'|$ soient suffisamment petites on peut approximer la différence $f(x) - f(x')$ par la différentielle de $f(x)$ ainsi :

$$f(x) - f(x') \approx f'(x')\,(x - x'). \tag{1}$$

On peut avoir deux cas :

A. La fonction $\varphi(x)$ possède dans (α, β) un nombre pair de zéros (même aucun).

Considérons la grandeur $\varepsilon > 0$ suffisamment petite et qui remplisse les conditions suivantes :

— les intervalles $[\alpha, \alpha + \varepsilon]$, $[\beta - \varepsilon, \beta]$ soient disjoints.

— les intervalles précédents ne contiennent aucun zéro de la fonction $\varphi(x)$.

— les intervalles $(\alpha, \alpha + \varepsilon]$, $[\beta - \varepsilon, \beta)$ ne contiennent aucun zéro de $f'(x)$.

En posant dans (1) : $x = \alpha$, $x' = \alpha + \varepsilon$; $x = \beta$, $x' = \beta - \varepsilon$, pour $\varepsilon > 0$ suffisamment petite on peut faire les approximations :

$$f(\alpha + \varepsilon) \approx f'(\alpha + \varepsilon) \cdot \varepsilon,$$

$$f(\beta - \varepsilon) \approx -f'(\beta - \varepsilon) \cdot \varepsilon.$$

Il en résulte qu'on peut approximer les valeurs de la fonction $\Phi(x)$ aux points $\alpha + \varepsilon$, $\beta - \varepsilon$ pour $\varepsilon > 0$ suffisamment petite, comme il suit :

$$\begin{cases} \Phi(\alpha + \varepsilon) \approx f'(\alpha + \varepsilon)\,[\varepsilon\psi(\alpha + \varepsilon) + \varphi(\alpha + \varepsilon)] \approx f'(\alpha + \varepsilon)\,\varphi(\alpha + \varepsilon) \\ \Phi(\beta - \varepsilon) \approx f'(\beta - \varepsilon)\,[-\varepsilon\psi(\beta - \varepsilon) + \varphi(\beta - \varepsilon)] \approx f'(\beta - \varepsilon)\,\varphi(\beta - \varepsilon). \end{cases} \tag{2}$$

Des conditions que satisfait ε il en résulte :

$$\varphi(\alpha + \varepsilon)\,\varphi(\beta - \varepsilon) > 0,\ f'(\alpha + \varepsilon)\,f'(\beta - \varepsilon) < 0,$$

et donc $\Phi(\alpha + \varepsilon)\,\Phi(\beta - \varepsilon) < 0$.

La fonction $\Phi(x)$ étant continue sur (α, β) la dernière inégalité conduit à la conclusion que cette fonction possède dans l'intervalle (α, β) un nombre impair de zéros.

On a démontré donc dans le cas A, que dans l'intervalle (α, β) il en existe au total un nombre impair de zéros des fonctions $\Phi(x)$ et $\varphi(x)$.

B. La fonction $\varphi(x)$ possède dans (α, β) un nombre impair de zéros.

Pour la grandeur $\varepsilon > 0$, choisie dans les mêmes conditions comme dans le cas précédent, on peut écrire les mêmes relations (2) où on a :

$$\varphi(\alpha+\varepsilon)\,\varphi(\beta-\varepsilon)<0,\quad f'(\alpha+\varepsilon)\,f'(\beta-\varepsilon)<0,$$

et donc $\Phi(\alpha+\varepsilon)\,\Phi(\beta-\varepsilon)>0$.

La fonction $\Phi(x)$ étant continue sur (a, b) donc aussi sur (α, β), il en résulte que le théorème est démontré aussi dans ce cas.

II. La fonction $f(x)$ possède une infinité de zéros distribués de façon continue sur un nombre fini d'intervalles fermés contenues dans l'intervalle $[a, b]$.

Supposons que l'on ait un intervalle $[\alpha, \beta] \subset [a, b]$ et les nombres $\alpha \leqslant \alpha' < \beta' \leqslant \beta$ tels que : $f(x) = 0$ pour $x \in [\alpha, \alpha']$ et pour $x \in [\beta' \beta]$.

$$f(x) \neq 0 \text{ pour } x \in (\alpha', \beta').$$

On démontre de la même façon qu'au cas précédent que dans (α', β') il en existe au total un nombre impair de zéros des fonctions $\Phi(x)$ et $\varphi(x)$.

§ 2. L'application de ce théorème aux cas des polynômes

Si on considère que $f(x)$, $\psi(x)$, $\varphi(x)$, sont des polynômes, le théorème précédent peut être énoncé de la façon suivante.

Théorème. Etant donnés les polynômes $P(x)$, $Q(x)$, $S(x)$, si $P(x)$ et $Q(x)$ n'ont pas de zèros communs, entre deux zèros consécutifs α, β, $(\alpha < \beta)$, du polynôme $P(x)$ se trouvent au total un nombre impair de zéros des polynômes

$$F(x) = S(x)\,P(x) + Q(x)\,P'(x) \text{ et } Q(x).$$

Lorsque $P(x)$ et $Q(x)$ ont des zéros communs, on ne considère comme zéros consécutifs du polynôme $P(x)$ que ceux qui restent seulement après avoir laissé de côté les zéros communs de $P(x)$ et $Q(x)$.

Dans ce cas entre deux zéros consécutifs de $P(x)$ — considérés comme plus haut — se trouvent au total un nombre impair de zéros de $F(x)$ et $Q(x)$ si on ne considère pour $Q(x)$ les zéros communs de $P(x)$ et $Q(x)$

Démonstration :

Il reste à démontrer seulement le cas où $P(x)$ et $Q(x)$ ont des zéros communs.

Dans ce cas les polynômes $P(x)$ et $Q(x)$ peuvent s'écrire :

$$P(x) = N(x)\,P_1(x)$$
$$Q(x) = N(x)\,Q_1(x),$$

où $N(x)$ est un polynôme qui a tous les zéros réels et communs avec $P(x)$ et $Q(x)$ et les polynômes $P_1(x)$ et $Q_1(x)$ n'ont aucun zéro commun. Les deux zéros considérés dans les conditions du théorème sont zéros consécutifs de $P_1(x)$.

On a

$$F(x) = N(x)\,[S(x) + Q_1(x)\,N'(x)]\,P_1(x) + N^2(x)\,Q_1(x)\,P_1'(x).$$

D'ici on voit que si α et β sont deux zéros consécutifs du polynôme $P_1(x)$, on trouve dans l'intervalle (α, β) au total un nombre impair de zéros des polynômes $F(x)$ et $Q_1(x)$. Cette conclusion se déduit en appliquant le théorème précédent, où on fait : $f(x) = P_1(x)$, $\varphi(x) = N^2(x)\,Q_1(x)$.

Il en résulte, que dans ce cas, entre deux zéros consécutifs du polynôme $P(x)$ — considérés comme ci-dessus — on trouve au total un nombre impair de zéros de $F(x)$ et $Q(x)$ si dans ce nombre on ne considère pas pour $Q(x)$ les zéros communs de $P(x)$ et $Q(x)$.

Dans [1] nous avons montré que l'une des applications importantes du théorème que nous avons établi, est la séparation des racines réelles d'une fonction $f(x)$ dérivable dans l'intervalle considéré.

Dans le cas d'une équation algébrique

$$P(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1} x + a_n = 0, \tag{3}$$

qui ne possède pas de racines multiples, les équations

$$\begin{cases} F(x) = S(x)\,P(x) + Q(x)\,P'(x) = 0 \\ Q(x) = 0 \end{cases} \tag{4}$$

qui séparent les racines réelles de l'équation (3) peuvent être du dégré $\approx \frac{n-1}{2}$. En général les équations (4) peuvent être respectivement du dégré n' et n'' tels que $n' + n'' = n - 1$.

Si l'équation (3) possède des racines multiples, on détermine au préalable ces racines et on applique ensuite le théorème à l'équation qui en résulte après avoir écarté les racines multiples de l'équation (3).

§ 3. **Une généralisation des théorèmes précédents**

Nous considérons une fonction $f(x)$ continue sur $[a, b]$ et dérivable sur (a, b), et la fonction $\varphi(x)$ définie sur $[a, b]$ et continue sur (a, b).

Supposons que :

— dans $[a, b]$ la fonction $f(x)$ est nulle sur un ensemble d'intervalles fermés et disjoints $M = \{S_1, S_2, S_3, \ldots, S_p\}$.

— dans (a, b) la fonction $\varphi(x)$ este nulle sur un ensemble d'intervalles fermés et disjoints $N = \{L_1, L_2, L_3, \ldots, L_q\}$.

Certains intervalles, et même tous, des ensembles M, N peuvent être points.

Nous pouvons avoir les cas :

a) Certains intervalles de l'ensemble M soient disjoints avec tous les intervalles de l'ensemble N.

Désignons par M_{sd} l'ensemble de ces intervalles.

b) Certains intervalles de l'ensemble M peuvent être partiellement couverts par des intervalles de l'ensemble N, mais tels que pour chacun de ces intervalles, leurs deux extrémités ne sont pas couvertes.

Désignons par M'_{sd} l'ensemble de ces intervalles.

c) Certains intervalles de l'ensemble M peuvent être complètement couverts par des intervalles de l'ensemble N.

Soit M_0 l'ensemble de ces intervalles.

d) Certains intervalles de l'ensemble M peuvent être partiellement couverts par des intervalles de l'ensemble N, mais tels que pour chacun de ces intervalles leurs deux extremités soient incluses dans les intervalles de N.

Soit M'_0 l'ensemble de ces intervalles.

e) Certains intervalles de M peuvent être partiellement couverts par des intervalles de l'ensemble N, tels que leurs extrémités gauches soient aussi incluses dans les intervalles de N mais leurs extrémités droites ne sont pas incluses dans l'ensemble N.

Désignons par M_d l'ensemble de ces intervalles.

f) Certains intervalles de l'ensemble M peuvent être aussi partiellement couverts par des intervalles de l'ensemble N, tels que leurs extrémités droites soient incluses dans les intervales de N, mais leurs extrémités gauches ne sont pas incluses dans l'ensemble N.

Désignons par M_s l'ensemble de ces intervalles.

Nous avons évidemment $M = M_{sd} \cup M'_{sd} \cup M_0 \cup M'_0 \cup M_d \cup M_s$.

Dans ce qui suit, nous considérons intervalles consécutifs de zéros de la fonction $f(x)$, deux intervalles S_i, S_j, qui satisfassent les conditions suivantes :

1) L'intervalle S_i soit au gauche de l'intervalle S_j.

2) $S_i \subset (M_{sd} \cup M'_{sd} \cup M_d)$.

3) $S_j \subset (M_{sd} \cup M'_{sd} \cup M_s)$.

4) Entre S_i et S_j n'existe aucun intervalle de l'ensemble

$$M_{sd} \cup M'_{sd} \cup M_d \cup M_s .$$

Nous pouvons énoncer la suivante :

Théorème

Etant données les fonctions $f(x)$, $\psi(x)$, $\varphi(x)$ avec valeurs finies telle que :

1° La fonction $f(x)$ soit continue sur l'intervalle $[a, b]$, et dérivable sur (a, b).

2° Les fonctions $\psi(x)$, $\varphi(x)$ soient définies sur $[a, b]$ et continues sur (a, b).

Soient S_i, $S_j \subset [a, b]$ les intervalles consécutifs de zéros de la fonction $f(x)$. Ces intervalles, dans les cas particuliers, peuvent être points.

Le théorème affirme qu'entre deux intervalles consécutifs de zéros S_i, S_j de la fonction $f(x)$ on trouve au total un nombre impair de zéros des fonctions :

$$\Phi(x) = \psi(x) f(x) + \varphi(x) f'(x) ; \ \varphi(x),$$

si dans ce nombre on ne considère pas les zéros de $f(x)$ qui sont situés entre les intervalles consécutifs S_i, S_j considérés.

Démonstration.

Soient $S_i = [a_i, \alpha_i] \subset [a, b]$ et $S_j = [\beta_j, b_j] \subset [a, b]$, intervalles consécutifs de zéros de la fonction $f(x)$.

Considérons la grandeur $\varepsilon > 0$ suffisamment petite et qui remplisse les conditions suivantes :

— les intervalles $[\alpha_i, \alpha_i + \varepsilon]$, $[\beta_j - \varepsilon, \beta_j]$ soient disjoints.

— les intervalles précédents ne contiennent aucun zéro de la fonction $\varphi(x)$.

— les intervalles $(\alpha_i, \alpha_i + \varepsilon]$, $[\beta_j - \varepsilon, \beta_j)$ ne contiennent aucun zéro des fonctions $f(x)$ et $f'(x)$.

Nous avons :

$$\left.\begin{aligned} \Phi(\alpha_i + \varepsilon) &= \psi(\alpha_i + \varepsilon) f(\alpha_i + \varepsilon) + \varphi(\alpha_i + \varepsilon) f'(\alpha_i + \varepsilon), \\ \Phi(\beta_j - \varepsilon) &= \psi(\beta_j - \varepsilon) f(\beta_j - \varepsilon) + \varphi(\beta_j - \varepsilon) f'(\beta_j - \varepsilon). \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Dans ces relations pour $\varepsilon > 0$ suffisamment petite (qui satisfait les conditions de ce qui vient d'être exposé) les grandeurs :

$$\eta_i = |\psi(\alpha_i + \varepsilon) f(\alpha_i + \varepsilon)|,$$
$$\eta_j = |\psi(\beta_j - \varepsilon) f(\beta_j - \varepsilon)|,$$

peuvent être tant petites que nous voulons.

Des relations (5) résulte qu'on peut approximer la fonction $\Phi(x)$ dans les points $\alpha_i + \varepsilon$, $\beta_j - \varepsilon$ comme il suit :

$$\left.\begin{aligned} \Phi(\alpha_i + \varepsilon) &\approx \varphi(\alpha_i + \varepsilon) f'(\alpha_i + \varepsilon), \\ \Phi(\beta_j - \varepsilon) &\approx \varphi(\beta_j - \varepsilon) f'(\beta_j - \varepsilon). \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

Dans ce qui va suivre, nous considérons tous les cas possibles quand les fonctions $f(x)$ et $\varphi(x)$ s'annullent dans l'intervalle $I_{ij} = (\alpha_i + \varepsilon, \beta_j - \varepsilon)$ et les résultats nous les poserons dans un tableau.

Désignons par :

n_1 le nombre de zéros dans I_{ij} de la fonction $f(x)$.

n_2 le nombre de zéros dans I_{ij} de la fonction $\varphi(x)$.

n_3 le nombre de zéros dans I_{ij} communs entre les fonctions $f(x)$ et $\varphi(x)$.

n_4 le nombre de zéros dans I_{ij} de la fonction $\varphi(x)$ qui ne sont pas communs avec les zéros de la fonction $f(x)$.

n_5 le nombre de zéros dans I_{ij} de la fonction $f(x)$ qui ne sont pas communs avec les zéros de la fonction $\varphi(x)$.

m le nombre de zéros dans I_{ij} de la fonction $\Phi(x)$.

n le nombre de zéros situés dans I_{ij} des fonctions $\Phi(x)$, $\varphi(x)$ moins les zéros de $f(x)$ situés aussi dans I_{ij}.

Il résulte les relations suivantes :

$$\left.\begin{aligned} n_4 &= n_2 - n_3, \\ n_5 &= n_1 - n_3. \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

Nous avons encore noté dans le tableau :

avec p = pair avec i = impair

Avec ces notations, en tenant compte de relations (7) et (6) nous avons le tableau :

Nr.	Le nombre de zéros dans l'intervalle I_{ij}					Le signe			Le nombre de zéros dans I_{ij}		
	n_1	n_2	n_3	$n_4 = n_2 - n_3$	$n_5 = n_1 - n_3$	$\varphi(\alpha_i+\varepsilon)\,\varphi(\beta_j-\varepsilon)$	$f'(\alpha_i+\varepsilon)\,f'(\beta_j-\varepsilon)$	$\Phi(\alpha_i+\varepsilon)\,\Phi(\beta_j-\varepsilon)$	m	$m+n_2$	$n = m+n_2-n_3-n_5$ $n = m+n_2-n_1$
1	p	p	p	p	p	+	−	−	i	i	i
2	p	p	i	i	i	+	−	−	i	i	i
3	p	i	p	i	p	−	−	+	p	i	i
4	p	i	i	p	i	−	−	+	p	i	i
5	i	p	p	p	i	+	+	+	p	p	i
6	i	p	i	i	p	+	+	+	p	p	i
7	i	i	p	i	i	−	+	−	i	p	i
8	i	i	i	p	p	−	+	−	i	p	i

Nous faisons la remarque que dans les hypothèses considérées en tous les cas la fonction :

$$\Phi(x) = \psi(x)\,f(x) + \varphi(x)\,f'(x),$$

a dans l'intervalle I_{ij}, au moins n_5 zéros communs avec la fonction $f(x)$. Cette propriété résulte évidemment parce que dans les hypothèses considérées, $f(x)$ et $f'(x)$ ont n_5 zéros communs dan I_{ij} qui ne sont pas zéros de $\varphi(x)$.

Donc on aura : $m - n_5 \geqslant 0$

Aussi nous avons $n_2 - n_3 \geqslant 0$.

Par conséquence le nombre

$$n = m + n_2 - n_3 - n_5 = m + n_2 - n_1 = \text{un nombre impair} > 0.$$

Une conséquence immédiate de ce théoréme est :

Les zéros réels des fonctions $\Phi(x)$ et $\varphi(x)$ séparent les zéros réels de la fonction $f(x)$.

Observation. En tenant compte de ce qui précède, nous pouvons énoncer aussi le suivante.

Théorème :

Si α et β sont deux zéros de la fonction $f(x)$, dans l'intervalle fermé $[\alpha, \beta]$ on trouve au moins un zéros des fonctions :

$$\Phi(x) = \psi(x) f(x) + \varphi(x) f'(x) ; f(x),$$

si les conditions suvantes sont remplies :

— la fonction $f(x)$ est continue sur $[\alpha, \beta]$ et dérivable sur (α, β).

— les fonctions $\psi(x)$, $\varphi(x)$ sont continues sur $[\alpha, \beta]$.

La chaire de mathématique
Institut polytechnique Bucarest

LITTÉRATURE

I. M. Miu, Une nouvelle méthode pour la séparation des racines réelles des équations (Buletinul Institutului Politehnic, București, tom. XXV, fascicola 4).

I. M. Miu, Sur un théorème et une généralisation du théorème de la moyenne. (Buletinul Institutului Politehnic București, tom. XXV, fascicola 6).

I. M. Miu, Contribution sur la théorie des équations algébriques (Buletinul Institutului Politehnic, tom. XXV, fascicola 5).

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC BUCUREȘTI
Tomul XXVI — 1964. Fascicola 2

FIZICĂ

C.Z. 539.1

INFLUENȚA PĂSTRĂRII EMULSIILOR NUCLEARE ÎN LICHIDE ASUPRA URMELOR α ȘI A DIFUZIEI ATOMILOR DE TORON*

DAN ANGHELESCU

1. Sînt cunoscute numeroase efecte ale tratării emulsiilor nucleare cu diferite lichide, la acțiunea cărora placa este supusă un timp determinat, relativ scurt, în timpul prelucrării. În ultimii ani au început să fie utilizate, la studiul interacțiunilor particulelor de înaltă energie, plăci îmbibate cu substanțe cu conținut ridicat de hidrogen [1]. Lucrarea de față prezintă unele rezultate obținute la studiul efectelor fizico-chimice în cazul păstrării emulsiilor nucleare într-un lichid organic de la impresionare pînă la developare.

Experiențele au fost efectuate cu plăci Nikfi *K*, cu grosimea nominală de 100 μm, care au fost scufundate într-o soluție 1,1% $Th(NO_3)_4$. După 3 minute plăcile au fost scoase din soluția radioactivă, spălate cu apă curgătoare și apoi introduse și păstrate pînă la developare, în unul din lichidele:

alcool etilic
dioxan
acetat de etil
eter etilic

Developarea, după procedeul obișnuit, a fost făcută la 48 de ore de la impresionare. Pentru comparație o placă martor a fost supusă acelorași tratamente (cu excepția introducerii în lichide organice) și developată în aceleași condiții. La explorarea plăcilor a fost utilizat un microscop Zeiss, tip Lumipan, binocular, cu obiectiv de imersie.

În emulsiile păstrate în lichide organice s-a constatat, în comparație cu placa martor, mărirea parcursului α și creșterea difuziei atomilor de toron, ambele efecte avînd caractere diferențiate, în funcție de lichidul în care era ținută placa.

---

* Lucrare comunicată la sesiunea științifică a cadrelor didactice din Institutul politehnic București, 22—23 februarie 1964.

2. S-a determinat parcursul particulelor α emise de *Th C'* utilizînd urme α de înclinare mică (cel mult 20°) din stelele cu 4 sau 3 brațe (ThX — Tn — ThA — Th C' sau Tn — ThA — Th C'). Se știe că umezirea emulsiei provoacă mărirea factorului de contracție [2]. Pentru a evita măsurătorile laborioase, legate de determinarea factorului de contracție, s-a adoptat pentru acesta valoarea din placa martor; deoarece s-au utilizat numai urmele de înclinare mică erorile introduse astfel sînt neglijabile.

Rezultatele, date în coloana a doua din tabelul 1, arată că parcursul mediu în emulsia nucleară a particulelor α emise de *ThC'* se mărește dacă emulsia a fost menținută într-un lichid pînă la developare, dar creșterea este diferită, variind în limite destul de largi (de la 3% în cazul păstrării în eter etilic, pînă la 22% în cazul ținerii plăcii în acetat de etil).

Tabelul 1

Lichidul în care a fost ținută placa	Parcurs mediu (μ *m*)	Coeficient de reținere	Număr de urme de Th C' măsurate
1	2	3	4
alcool etilic	54,6 $\pm$ 0,3	0,16 $\pm$ 0,01	53
dioxan	49,7 $\pm$ 0,3	0,09 $\pm$ 0,01	55
acetat de etil	57,1 $\pm$ 0,5	0,24 $\pm$ 0,01	50
eter etilic	48,5 $\pm$ 0,3	0,03 $\pm$ 0,01	59
placă martor	47,0 $\pm$ 0,3	—	55

Se constată că nu există o legătură directă de proporționalitate între parcursul α în lichide pure și în emulsiile păstrate în lichide. Astfel parcursul particulelor α de o energie cinetică dată este mai mare în eter etilic decît în alcool etilic, în timp ce în emulsia păstrată în eter etilic parcursul α este mai mic decît în cea ținută în alcool etilic.

Aceasta se poate explica admițînd diferite grade de reținere a lichidelor de către emulsia nucleară. Scufundînd plăcile în lichide acestea pătrund în emulsie în diferite proporții. Reținerea lichidelor în emulsie se poate face în două feluri: pe de o parte emulsia este umectată, în mod uniform, rezultînd o emulsie umedă, pe de altă parte se formează bule în lichid. Parcursul unei particule α este dat aditiv de parcursul în emulsia umedă și în bulele de lichid. Intrucît nu se poate determina ce fracțiune de lichid se găsește sub formă de bule și ce fracțiune umectează emulsia, se va considera, formal, că parcursul particulei α constă din parcursul în emulsia uscată (același ca în placa martor) și parcursul în bulele de lichid. Pentru valorile medii se poate scrie:

$$\overline{R} = x\,\overline{R}_m + y\overline{R}'$$

unde $\overline{R_m}$, $\overline{R}$ și $\overline{R'}$ reprezintă parcursul mediu al particulei α în placa martor, placa păstrată în lichid, respectiv în lichidul pur, iar x și y sînt doi coeficienți subunitari (suma lor este evident 1) care, formal, reprezintă fracțiunea de parcurs străbătută în emulsie, respectiv în lichid. Deci mărimea y, care va fi numită coeficient de reținere al lichidului de către emulsie, exprimă, formal, fracțiunea din volumul emulsiei ocupată de lichid. $\overline{R'}$ a fost calculat utilizînd formula Bragg-Kleeman [3].

$$\overline{R'} = 27{,}4 \frac{\sqrt{A}}{\varrho} \mu m,$$

unde ρ este densitatea, iar A greutatea atomică medie a lichidului. Valorile obținute pentru coeficientul de reținere sînt date în coloana 3 din tabelul 1.

3. Difuzia atomilor de toron a fost studiată urmărind scindarea stelelor $ThX - Tn - ThA - ThC'$ în stelele de tipul $Tn - ThA - ThC'$ și urme independente de Tn, ceea ce, cantitativ, poate fi exprimat prin raportul:

$$a = \frac{N_3}{N_3 + N_4}$$

unde

N_3 = număr de stele de tipul $Tn - ThA - ThC'$
N_4 — „ „ „ „ „ $ThX - Tn - ThA - ThC'$

Rezultatele obținute sînt redate în tabelul 2.

Tabelul 2

Lichidul în care a fost ținută placa	N_3	N_4	a
1	2	3	4
alcool etilic	16	37	$0{,}30 \pm 0{,}07$
dioxan	36	19	$0{,}65 \pm 0{,}06$
acetat de etil	17	33	$0{,}34 \pm 0{,}07$
eter etilic	15	44	$0{,}25 \pm 0{,}05$
placă martor	8	47	$0{,}14 \pm 0{,}05$

In tabelul 3 sînt date rezultatele măsurării distanțelor dintre centrele stelelor cu 3 brațe de tipul $Tn - ThA - ThC'$ și cele mai apropiate urme de ThX, adică distanțele probabile de migrare a atomilor de toron.

Tabelul 3

Lichidul în care a fost ținută placa	Număr de atomi de toron care au difuzat pe distanța (μm)			
	0—20	21—40	41—60	>61
1	2	3	4	5
alcool etilic	3	5	4	4
dioxan	11	14	8	3
acetat de etil	5	7	4	1
eter etilic	14	0	1	0
placă martor	8	0	0	0

Rezultă că păstrarea emulsiilor nucleare în lichide pînă la developare favorizează considerabil difuzia atomilor de toron, ceea ce se manifestă atît prin mărirea procentului de stele $Tn - ThA - ThC'$ cît și prin creșterea distanțelor de migrare a atomilor de toron. Fiecare lichid are, din acest punct de vedere, o comportare specifică ceea ce s-ar putea explica admițînd că favorizarea difuziei în emulsiile umede este consecința a două efecte diferite: pe de o parte micșorarea vîscozității, pe de altă parte transformarea gelatinei α în gelatină β, în care coeficientul de difuzie al toronului este mai mare [4].

4. În concluzie se poate afirma că în emulsiile ținute în lichide în tot intervalul de timp cuprins între impresionare și developare se produce o mărire a parcursului particulelor α și o creștere a difuziei atomilor de toron, ambele efecte fiind specifice lichidelor.

Catedra de fizică
Institutul politehnic București

BIBLIOGRAFIE

[1] *T. Kalinkina, L. G. Krivenţova, M. V. Uvarova, K. D. Tolstov* și *N. Dalhajav* — Iadernaia fotografia, Moscova 1962, pag. 171 (Lucrările conferinței III asupra emulsiilor nucleare. Moscova 1960).
Do In Seb, L. G. Krivenţova, C. I. Liubomilov și *M. G. Safronova* — Ibidem pag. 446.
Do In Seb, L. F. Kirilova, Z. F. Korbel și *M. G. Safronova* — Preprint P 1080, Institutul Unificat de Cercetări Nucleare, Dubna 1962.
[2] *A. Bonnetti* și *G. Occhialini* — N. Cim. *8*, 727, 1951.
G. Mignone — N. Cim. *8*, 896, 1951.
[3] *R. D. Evans*, The Atomic Nucleus, New York 1955, pag. 653.
[4] *L. Vigneron, R. Chastel* și *M. Génin*, C. R. Paris, *240*, 1423, 1955.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC BUCUREȘTI
Tomul XXVI — 1964, Fascicola 2

ELECTROCHIMIE

C.Z. 661.471 : 615.79

EXTRAGEREA ELECTROLITICĂ A IODULUI DIN APELE MINERALE ȘI APELE DE ZĂCĂMÎNT *)

ION ATANASIU, LYA BLUM LAZĂR ȘI MARIA CONSTANTINESCU

Apele minerale și apele de zăcămînt, deși foarte diluate în ioduri alcaline, au ajuns pe plan mondial principala materie primă pentru extragerea iodului.

Indiferent de metoda de extragere folosită, chimică sau electrochimică, dificultățile cele mai importante în extragere sînt: cantitatea mare de cloruri și uneori bromuri care însoțesc iodurile, concentrația redusă în ioduri a apelor de zăcămînt (0,02—0,07‰ iod).

Metoda electrochimică prezintă unele avantaje față de metoda chimică: poate elibera direct iod elementar, nu folosește reactivi scumpi, numărul fazelor în procesul tehnologic este mai mic și nu fololosește cantități mari de reactiv.

Extragerea electrolitică este ajutată mult și de faptul că valoarea potențialului de descărcare al iodului este mică și depărtată de valorile potențialelor de descărcare ale celorlalți halogeni.

Electroliza soluțiilor de ioduri din soluții neutre are loc fără supratensiune, atît cu electrozi de platină platinată cît și lustruită [1] la un potențial puțin superior potențialului reversibil. Potențialul standard al ionului Br^- (1,0 volți) și al ionului Cl^- (1,36 volți) arată că într-un domeniu foarte larg al potențialului anodic descărcarea iodului nu este tulburată de descărcarea concomitentă de brom sau clor.

Deoarece potențialul oxigenului este 1,68 V în soluție acidă, 1,27 V în soluție neutră și 0,88 V în soluție alcalină, posibilitatea descărcării concomitente de I_2 și O_2 poate avea loc numai în soluție alcalină.

În soluție alcalină, ionii OH^- pot produce un efect secundar de depolarizare prin formare de poliioduri, datorită acțiunii iodului asupra iodurii alcaline [2]. Curba de polarizare arată că în acest caz electrodul nu este polarizabil.

---

* Lucrare comunicată la sesiunea științifică a cadrelor didactice din Institutul politehnic București, 22—23 februarie 1964.

În fig. 1 se văd curbele de polarizare ale iodului pentru diferite concentrații în comparație cu curba de polarizare a oxigenului (mediu acid).

Prima încercare de obținere electrolitică a iodului a fost făcută de Steinberg [3]; ulterior numărul cercetărilor a crescut [4—25] și a luat amploare în special de cînd apele de zăcămînt au devenit sursă principală de extragere a iodului.

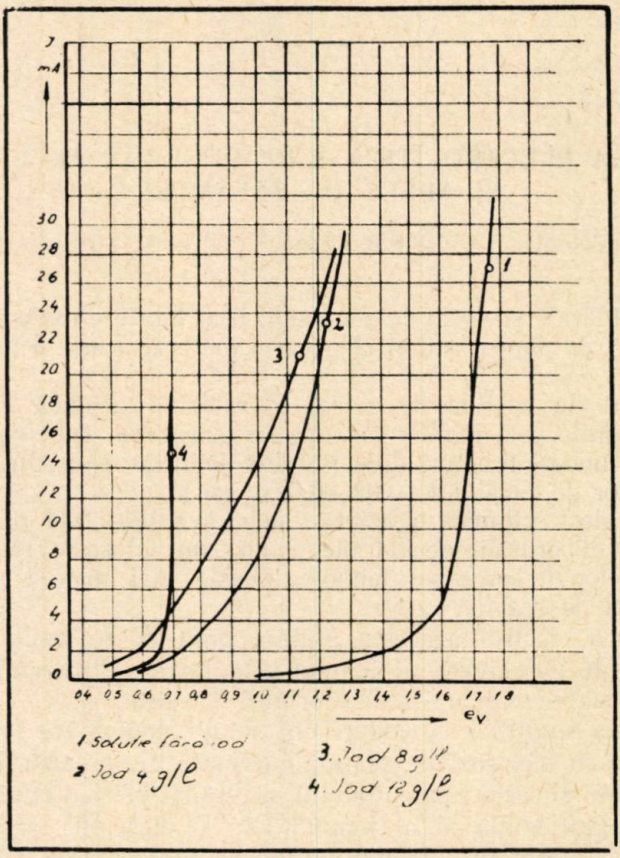


Fig. 1

Deoarece solubilitatea iodului este 0,30 g/litru, iar conținutul acestor ape în iod este aproximativ 0,02—0,07 g/litru, urmează că iodul care se descarcă prin electroliză rămîne în soluție. Pentru recuperarea acestui iod s-au propus mai multe procedee:

Reținerea iodului obținut prin electroliză pe anozi de cărbune activ [14—21].

Extragerea iodului obținut prin electroliză, dar rămas solvit în soluția apoasă, prin tratare cu solvenți organici [9—12].

Concentrarea apelor de zăcămînt, adsorbind iodul sau iodura pe un mediu potrivit și extragerea iodului din soluția concentrată printr-o

metodă chimică sau electrochimică. In scopul concentrării apei s-a întrebuințat: rumeguș de lemn [36], turba din mușchiul sphagnum [22], dar în special schimbătorii de ioni, care au fost studiați într-o serie de cercetări [26—35].

Metoda de cercetare cu schimbători de ioni pare să fie metoda cea mai potrivită industrial.

In încercările prezentate dăm rezultatele obținute de noi la extragerea iodului din ape de zăcămînt și ape minerale prin electroliza soluțiilor concentrate cu schimbători de ioni.

Principiul metodei. Operația de extragere cuprinde următoarele faze:

a) Preelectroliza. O cantitate din apa de zăcămînt separată de impurități și filtrată este acidulată și oxidată anodic la HIO_3.

b) Apa oxidată se amestecă cu 5 părți apă neoxidată. Se pune în libertate iodul:

$$HIO_3 + 5\ HI \rightarrow 3\ I_2 + 3\ H_2O$$

care rămîne în soluție.

c) Concentrarea soluției în iod prin reținerea iodului pe o rășină adsorbantă schimbătoare de ioni.

Iodul adsorbit este eluat cu o soluție de Na_2SO_3:

$$I_2 + Na_2SO_3 = 2\ NaI + SO_2 + \frac{1}{2}O_2$$

d) Soluția concentrată de iodură este supusă la electroliză. Se obține direct iod care se depune la anod.

$$I^- - e \rightarrow \frac{1}{2}\ I_2$$

Preelectroliza. O cantitate de apă, avînd una din compozițiile arătate în tabela 1, este supusă la oxidare anodică într-o celulă de electroliză cu diafragmă, cu anod de grafit și catod de fier. Densitatea anodică optimă 3 A/dm². Se obține HIO_3. Soluția acidulată la un pH = 1,8 — 2 se amestecă cu o cantitate de 5 ori mai mare din apa inițială; precipită iodul:

$$HIO_3 + 5\ HI \rightarrow 3\ I_2 + 3\ H_2O$$

Deoarece cantitatea de iod din apă este mult sub limita de solubilitate a iodului în apă (300 mg/l), iodul liberat rămîne în soluție, de unde urmează a fi extras.

Tabela 1

	Mineralizare totală g‰	Cl g‰	Br g‰	I g‰
1	55 — 44	34 — 28	0,062 — 0,031	0,067 — 0,030
2	55	34	0,062	0,067

Pentru extragere s-a folosit concentrarea soluției foarte diluate în iod cu ajutorul schimbătorilor de ioni (tip anioniți).

Concentrarea soluției cu schimbători de ioni. Apa cuprinzînd iodul dizolvat este trecută printr-o rășină anionică schimbătoare de ioni pe care se adsoarbe iodul pînă la saturarea rășinii. După M. Ziegler [31] și Y. Aveston — D. A. Everest [30] procesul care are loc este formarea unei poliioduri după schema:

$$I^- (R) + 3\ I_2 \rightarrow I_7^- (R)$$

Se adsorb 3 moli iod cu formare de $RI \cdot 3I_2$.

În cercetările făcute s-au folosit pentru studii comparative două rășini anionice schimbătoare de ioni Dowex 1 și Amberlite IRA 400 (20—50 mesh). S-au utilizat coloane de sticlă de 250 mm înălțime și cu diametrul de 12 mm în care s-a introdus 5 g rășină uscată în prealabil și apoi gonflată cu apă distilată. Prin fiecare coloană s-a trecut cîte 60 litri apă cu o viteză de 10—12 ml pe minut.

Iodul reținut a fost eluat cu o soluție de Na_2SO_3 2N. Prin eluare în soluție se formează NaI:

$$I_2 + Na_2SO_3 = 2\ NaI + SO_2 + \frac{1}{2} O_2$$

În tabela 2 se dau rezultatele obținute prin eluarea iodului adsorbit pe rășina Dowex 1 cît și pe rășina Amberlite IRA 400.

Pentru fiecare rășină se dă: 1) procentual cantitatea de iod eluată în diferite porțiuni pînă la 250 ml soluție, care a fost volumul maxim de soluție folosit la eluare; 2) concentrația ionului I^- în diversele etape ale eluării.

Se vede că pentru coloana și cantitatea de rășină folosită volumul de 250 ml eluat este suficient ca să extragă aproape toată cantitatea de iod din rășina Dowex (99%) și 96% din rășina Amberlite IRA 400. Din acest punct de vedere rășina Dowex este cu puțin superioară rășinii Amberlite IRA 400. Se vede de asemenea că concentrația în ioni I^- prezintă un maxim la începutul eluării și scade cu cît conținutul în iod al rășinii se micșorează.

Tabela 2

Anionit	Dowex 1		Amberlite IRA 400	
V eluat ml	I eluat, %	Conc. I^- în eluat g/100 ml	I eluat, %	Conc. I^- în eluat g/100 ml
5	1,80	0,72	1,71	0,68
15	57,27	7,63	54,41	7,25
25	79,99	6,39	76,00	6,08
35	81,86	4,67	77,77	4,44
45	83,66	3,71	79,48	3,53
55	85,26	3,10	81,00	2,94
65	86,66	2,66	82,33	2,53
75	87,86	2,34	83,47	2,22
100	90,53	1,81	86,01	1,72
125	92,87	1,48	88,23	1,41
150	94,87	1,26	90,13	1,20
200	98,37	0,98	93,46	0,93
250	99,00	0,75	95,90	0,73

Deși folosirea soluțiilor concentrate de ioduri este desigur mai bună pentru electroliza ulterioară, utilizarea exclusivă a fracțiunilor foarte

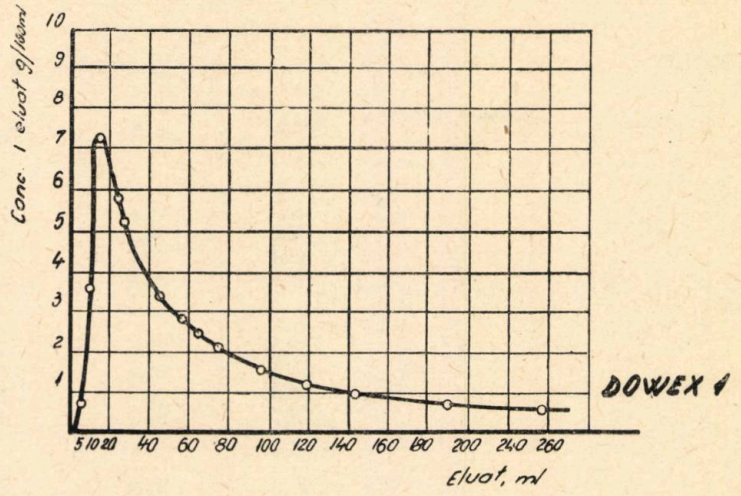


Fig. 2

concentrate duce la abandonarea unei părți din iodul adsorbit. De altfel concentrația în ioni I^- a soluției de eluat finală de 7,5 g/l, este foarte bună pentru ca electroliza să decurgă în condiții normale.

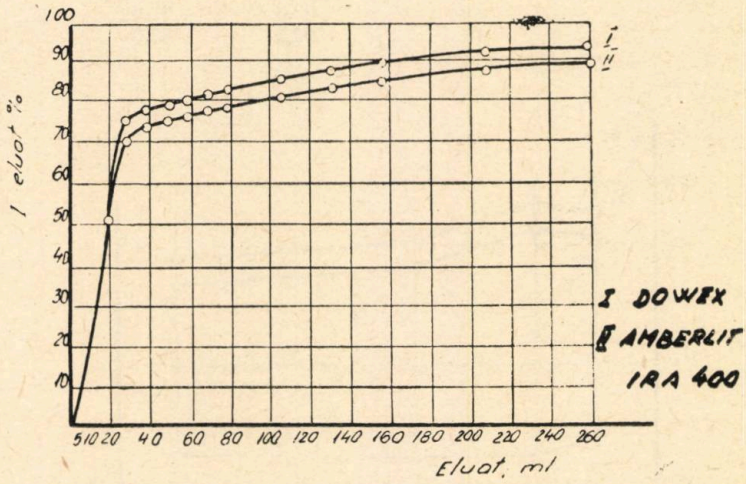


Fig. 3

Fig. 2 și fig. 3 arată concentrația ionului I^- în eluat și iodul eluat % în timpul operației de eluare.

Dozarea iodului în eluat. S-a făcut prin metoda potențiometrică, folosind ca reactiv o soluție $AgNO_3$ în prezența unui adaos de $Ba(NO_3)_2$.

Ca electrod indicator s-a utilizat un fir de argint, ca electrod de comparație — electrodul de calomel saturat.

Tabela 3

Temp. 22°C		$S_{anod} = 0{,}8$ dm²		$U_b = 4{,}5 - 7{,}5$ V	
Nr.	D_c A/dm²	Concentrația I g/l	η_c %	η_s %	$W_{kWh/kg}$
1	2	6	90,7	95,2	1,15
2		12	92,3	96,9	1,09
3		24	86,4	90,7	1,09
4		48	84,2	88,4	1,12
5	3	6	85,5	89,8	1,49
6		12	86,5	90,8	1,36
7		24	89,6	94,0	1,31
8		48	88,7	93,1	1,30
9	4	6	77,3	81,2	1,84
10		12	79,5	83,5	1,64
11		24	93,7	98,4	1,39
12		48	93,4	98,0	1,35
13	5	6	71,7	75,3	2,19
14		12	79,0	82,9	1,87
15		24	93,0	97,6	1,58
16		48	92,5	97,0	1,55

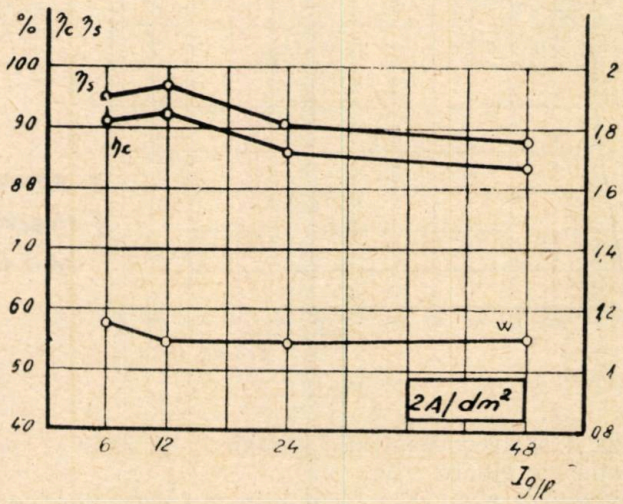


Fig. 4

Extragerea electrolitică a iodului în eluat. După cum se vede din tabela 2 concentrația în ioni I^- în eluat este indiferent de rășina schimbătoare de ioni folosită în jur de 7,5 g/l, concentrație ridicată și favorabilă unei extrageri ușoare a iodului.

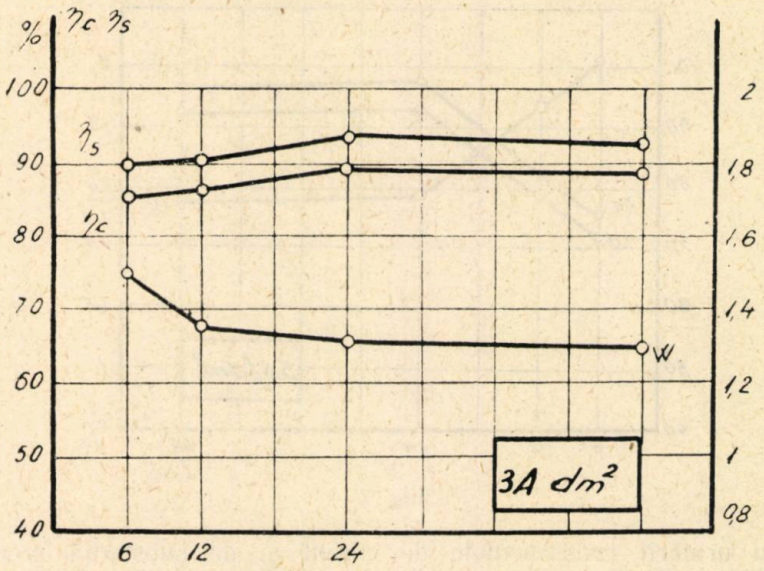


Fig. 5

S-au supus la electroliză soluții de iodură de sodiu la concentrații de substanță și densități de curent diferite, în celule de electroliză cu diafragmă poroasă. Iodul se depune la anod sub formă de cristale care cad la fundul celulei. Iodul separat prin electroliză se filtrează, pe pîlnie

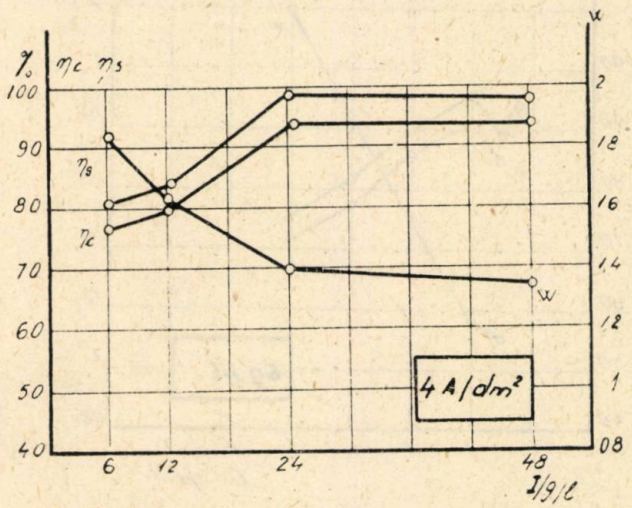


Fig. 6

filtrantă în vid, iar iodul rămas dizolvat este reciclat prin trecerea soluției prin coloana cu rășină schimbătoare de ioni.

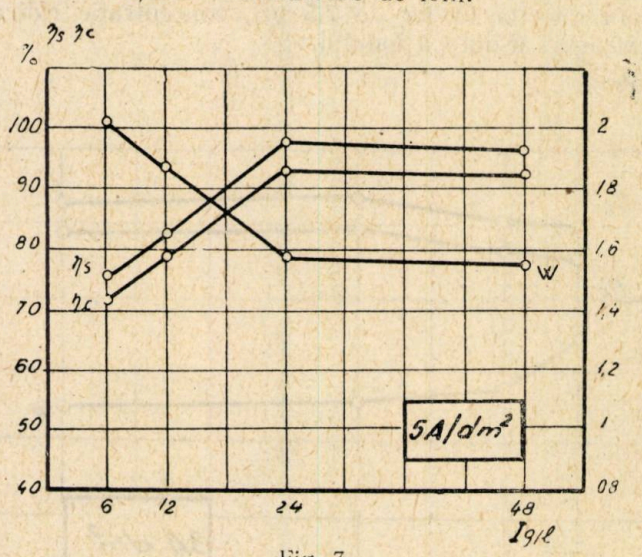


Fig. 7

S-au urmărit randamentele de curent și de substanță precum și consumul specific de energie electrică în diferite condiții de lucru.

In tabela 3 (fig. 4—7) se dau rezultatele obținute la electroliză folosind soluții de KI de concentrații variabile (6—48 g I/l), iar în tabela 4

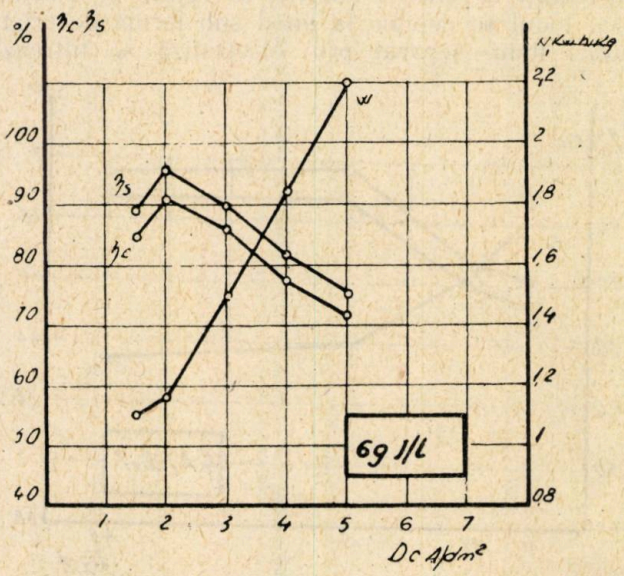


Fig. 8

(fig. 8—11) se prezintă rezultatele obținute la densități de curent variabile cuprinse între 1,5—6 A/dm². S-a întrebuințat în toate cazurile anozi de grafit și catozi de fier. Suprafața anodică utilă 0,8 dm², iar temperatura de lucru 22°C (temperatura joasă dă rezultate mult mai bune).

Tabela 4

Temperatura = 22°C		S_{anod} = 0,8 dm²			U_b = 4,5 — 8 V	
Nr.	Concentrația I g/l	D_c A/dm²	I_A	η_c %	η_s %	$W_{kWh/kg}$
1	6	1,5	1,2	84,6	88,9	1,11
2		2	1,6	90,7	95,2	1,15
3		3	2,4	85,5	89,8	1,49
4		4	3,2	77,3	81,2	1,84
5		5	4,0	71,7	75,3	2,19
6	12	1,5	1,2	86,0	90,3	1,03
7		2	1,6	92,3	96,9	1,09
8		3	2,4	86,5	90,8	1,36
9		4	3,2	79,5	83,5	1,64
10		5	4,0	79,0	82,9	1,87
11	24	2	1,6	86,4	90,7	1,09
12		3	2,4	89,6	94,0	1,31
13		4	3,2	93,7	98,4	1,39
14		5	4,0	93,0	97,6	1,58
15		6	4,8	92,7	97,3	1,82
16	48	2	1,6	84,2	88,4	1,12
17		3	2,4	88,7	93,1	1,30
18		4	3,2	93,4	98,0	1,35
19		5	4,0	92,5	97,0	1,55
20		6	4,8	91,0	95,4	1,81

O comparație a valorilor obținute pentru randamentul de curent (η_c) randamentul de substanță (η_s) și consumul specific de energie electrică (W) arată că: pentru soluțiile mai puțin concentrate (6 g ioni I^-/l) densitățile de curent mai mici sînt cele mai indicate (2 A/dm²), iar pentru soluțiile concentrate randamentele de curent și substanță sînt cu atît mai mari cu cît densitatea de curent crește; maximul curbei se deplasează în jurul valorii de 4 A/dm². Consumul specific de energie electrică este cu atît mai mic cu cît soluția este mai concentrată și densitatea de curent mai mică.

La concentrații ridicate în iodură și densități mari de curent se pot obține randamente de substanță foarte apropiate de randamentul teoretic.

Dozarea iodului extras electrolitic. Pentru stabilirea randamentelor s-a dozat iodul obținut electrolitic în modul următor: iodul cristalizat se

filtrează pe pîlnie filtrantă în vid, iar cristalele sînt trecute sub formă de iodură solubilă cu ajutorul sulfitului de sodiu. Soluția este adusă la

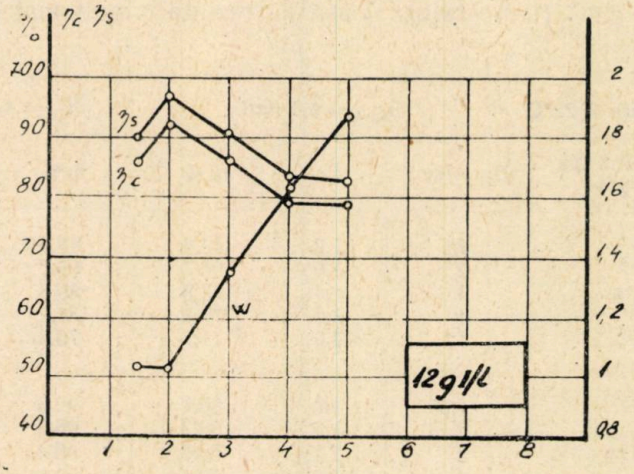


Fig. 9

balon cotat; iodul este dozat potențiometric cu $AgNO_3$. Iodul rămas dizolvat în filtrat se dozează cu tiosulfat de sodiu.

Mersul operațiilor la extragerea electrolitică a iodului se poate vedea în fig. 12.

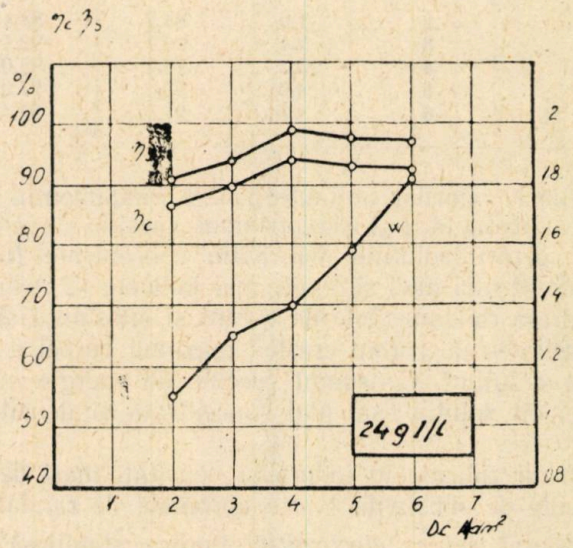


Fig. 10

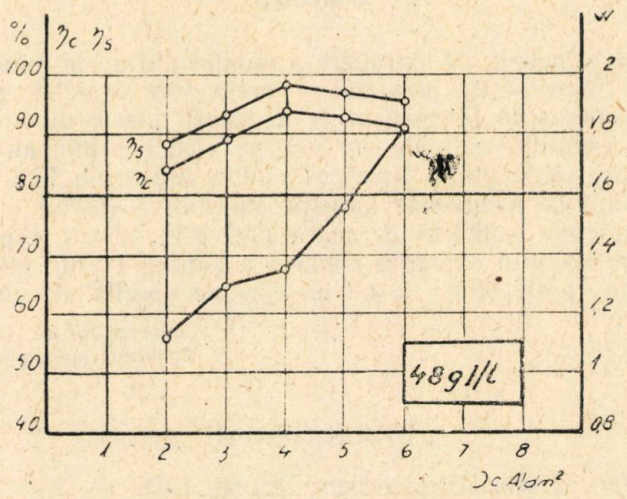

%
ηc ηs
100
90
80
70
60
50
40
ηs
ηc
4891/l
1 2 3 4 5 6 7 8
Dc A/dm²
W
2
1,8
1,6
1,4
1,2
1
0,8

Fig. 11

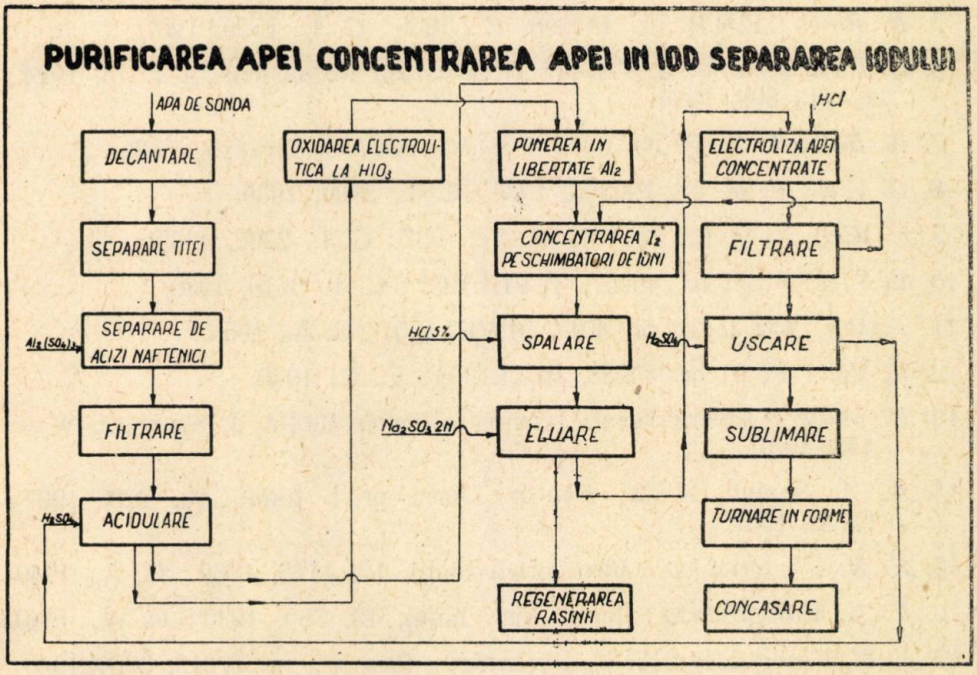

PURIFICAREA APEI CONCENTRAREA APEI IN IOD SEPARAREA IODULUI
APA DE SONDA
DECANTARE
SEPARARE TITEI
SEPARARE DE ACIZI NAFTENICI
FILTRARE
ACIDULARE
OXIDAREA ELECTROLITICA LA HIO3
PUNEREA IN LIBERTATE I2
CONCENTRAREA I2 PE SCHIMBATORI DE IONI
SPALARE
ELUARE
REGENERAREA RASINII
HCl
ELECTROLIZA APEI CONCENTRATE
FILTRARE
USCARE
SUBLIMARE
TURNARE IN FORME
CONCASARE
HCl 5%
Na2SO3 2N
H2SO4

Fig. 12

Concluzii.

Se indică o metodă de extragere a iodului din apele minerale și apele de zăcământ folosind în prealabil o preoxidare anodică a ionului I^- la IO_3^- și punerea în libertate a I_2 în soluții foarte diluate, urmată de concentrarea soluțiilor diluate în iod pe rășini schimbătoare de ioni. Rășina Dowex 1 este puțin superioră rășinii Amberlite IRA 400. Eluarea iodului cu sulfit de sodiu este aproape cantitativă (99%) și concentrația iodului I^- în eluat suficient de mare (7,5 g/l) pentru a permite extragerea electrolitică prin oxidarea anodică a ionului I^- din eluat cu randamente ridicate (peste 90%) și cu un consum specific de energie scăzut.

Laboratorul de electrochimie
Institutul politehnic București

BIBLIOGRAFIE

1. *F. Foerster:* Ztschr. Elektrochem. 22, 89, 1916.
2. *R. Luther, F. J. Brislee:* Ztschr. physikal. Chem. 45, 216, 1903.
3. *Steinberg:* Journ. prakt. Chem. 25, 387, 1842.
4. *F. Foerster, K. Gyr:* Ztschr. f. Elektrochem. 9, 215; C. I., 862, 1903.
5. *B. Rinck:* D.R.P. nr. 182298, 17.I.1906; C. I., 1559, 1907.
6. *L. Pissarshewski, S. Telnyi:* Himiceskaia Promîșlennost 1, 13, 1924; C. II., 809, 1926.
7. *A. Hollard:* F. P. nr. 631634, 24.VI.1926; C. I., 1415, 1928.
8. *E. Viel:* F. P. nr. 790396, 1935; C. I., 2990, 1936.
9. *E. Viel:* F. P. nr. 835171, 31. VII.1937; C. I., 2266, 1939.
10. *E. Viel:* F. P. nr. 49257, 31.VIII.1937; C. I., 3610, 1939.
11. *Masaji Yto:* Japan nr. 4917, 31.VIII.1951; C. A., 1953.
12. *E. Viel:* F. P. nr. 50038, 10.XI.1939; C. A., 1940.
13. *R. Müller:* Elektrochemie nichtmetallischer Stoffe, J. Springer, Wien, 153, 1937.
14. *A. A. Shmuk, A. N. Kharin:* Jurn. pricl. himii, 10, 223, 1937; C. A., 1937.
15. *E. N. Vinogradova:* Jurn. pricl. himii, 12, 1115, 1939; C. A., 1940.
16. *E. N. Vinogradova:* Jurn. pricl. himii, 13, 390, 1940; C. A., 1940.
17. *E. N. Vinogradova, S. V. Gorbachev:* Russ P., nr. 57913, 30.IX.1940; C. A., 1944.

18. *S. P. Tevosov, O. V. Andreiko:* USSR nr. 100967, 25.IX.1955; C. A., 11893, 1957.

19. *Kintaro Takenchi:* Japan nr. 3066, 13.VI.1951; C. A. 1953.

20. *Kintaro Takenchi:* Japan nr. 6460, 19.X.1951; C. A., 1953.

21. *M. F. Ohman:* A. P. nr. 2144119, 17.XII.1936; C. I., 2844, 1939.

22. *Ya. I. Gamzulov:* Jurn. pricl. himii, 32, 104, 1959.

23. *O. Schachter, S. Reznik:* Ger. nr. 1010954, 27.VI.1957; C. A., 2053 e, 1960.

24. *O. Schachter, S. Reznik:* U.S. nr. 2825685, 4.III.1958; C. A., 2317b, 1961.

25. *S. P. Tevosov, M. Gasanova:* Tr. Inst. Himii Akad. Nauk Azber. SSR, 19, 81, 1961; C. A., 1962.

26. *Masaichi Sekino:* Japan nr. 1511, 2.V.1952; C. A., 1953.

27. *Masaichi Sekino:* Japan nr. 4464, 31.X.1954; C. A. 1954.

28. *Masakazu Sekino:* Repts. Research. Lab., Asahi Glass Co. 3, 217, 1953; C. A., 1956.

29. *Takashi Kawanami:* Japan nr. 418, 24.I.1956; C. A., 4178, 1957.

30. *J. Aveston, D. A. Everest:* Chem. & Ind. 1238, 1957.

31. *M. Ziegler:* Angew. Chem. 71, 283, 1959.

32. *Hiroshi Shimizu, Yoshinosi Arai, Akira Sato, Yu Dochi:* Japan nr. 58, 17.I.1959; C. A. 1959.

33. *M. L. Good, M. B. Purdy, Th. Hoering:* J. Inorg. & Nuclear Chem., 6, 73, 1958.

34. *B. Sansoni:* Angew. Chem. 73, 493, 1961.

35. *T. Ionescu:* Schimbători de ioni, București, Ed. Tehnică, 1961.

36. *C. N. Ionescu, C. Anițescu:* Comunicări Acad., R.P.R. nr. 2, Tom., VIII, 1958.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC BUCUREȘTI
Tomul XXVI — 1964. Fascicola 2

MECANICĂ

C.Z. 518.3 : 621—7

UNELE NOMOGRAME UTILE REFERITOARE LA PROTECȚIA MAȘINILOR ÎMPOTRIVA VIBRAȚIILOR *

AURELIAN STAN

Prin interpunerea între agregatul care vibrează și suportul lui, a unor structuri sau materiale elastice, se elimină legătura rigidă dintre sursă și elementele de construcții înconjurătoare, realizîndu-se o protecție a acestora împotriva vibrațiilor.

Structurile sau materialele folosite, pot acționa în cazul protecției împotriva vibrațiilor, fie printr-o izolare, fie printr-o amortizare a vibrațiilor. Izolarea mașinilor constă în menținerea unui raport convenabil $f > \sqrt{2} \cdot f_0$ între frecvențele vibrației perturbatoare și frecvența proprie f_0 a agregatului, stratul izolator acționînd doar prin elasticitatea lui. Amortizarea vibrațiilor constă în disiparea energiei vibratorii ca urmare a frecărilor interne și transformarea acesteia în alte categorii de energii: calorică, de deformație etc. In anumite situații speciale de exemplu la turație constantă, se pot folosi amortizori dinamici.

Se știe că între greutatea P a agregatului împreună cu stratul izolator, rigiditatea k a stratului izolator și deformația statică x_{st} există relația

$$P = k \cdot x_{st}. \tag{1}$$

Ținînd seama de expresia deformației statice, frecvența proprie a agregatului se exprimă prin una din relațiile (2)

$$f_0 = \frac{1}{2\pi} \cdot \sqrt{\frac{k}{m}} = \frac{\sqrt{g}}{2\pi} \cdot \sqrt{\frac{k}{P}} = \frac{\sqrt{981}}{2\pi} \cdot \sqrt{\frac{1}{x_{st}}} \approx \frac{5}{\sqrt{x_{st}}}, \tag{2}$$

iar frecvența perturbatoare în funcție de turație prin relația (3)

$$f = \frac{n}{60}. \tag{3}$$

* Lucrare comunicată la sesiunea științifică a cadrelor didactice din Institutul politehnic București, 22—23 februarie 1964.

Relația (2) permite determinarea cu ușurință a frecvenței proprii a unui agregat printr-o simplă măsurare experimentală a deformației statice a acestuia.

Un alt factor important în studiul protecției contra vibrațiilor este coeficientul de transmisibilitate c_T care este raportul dintre forța elastică maximă F_T transmisă fundației de către sistemul vibrator și forța maximă perturbatoare F_0, în cazul unei forțe exterioare sinusoidale $F_0 \cdot \sin \omega t$. Coeficientul de transmisibilitate se poate scrie.

$$c_T = \frac{|F_r|}{|F_0|} = \frac{\frac{\dot{x}_0}{\omega}\sqrt{k^2 + r^2\omega^2}}{\dot{x}_0\sqrt{\left(m\omega - \frac{k}{\omega}\right)^2 + r^2}} = \frac{\sqrt{1 + 4\beta^2\gamma^2}}{\sqrt{(1-\gamma^2)^2 + 4\beta^2\gamma^2}}, \tag{4}$$

unde β și γ sînt respectiv amortizarea relativă și frecvența relativă definiți de (5)

$$\beta = \frac{r}{r_{cr}}, \quad \gamma = \frac{f}{f_0}, \tag{5}$$

iar

$$r_{cr} = 2m\,\omega_0 = 2\sqrt{m \cdot k} = 4\pi m f_0.$$

Pentru valori mici ale amortizării relative, coeficientul de transmisibilitate este maxim și are valoarea

$$|c_T| \approx \frac{1}{\gamma^2 - 1}, \tag{4'}$$

La valori ale frecvenței relative $\gamma = \frac{f}{f_0} > 3$ se obține

$$|c_T| \approx \frac{f_0^2}{f^2},$$

și amortizarea respectivă este

$$\Delta L = 20 \lg \frac{1}{c_T} \approx 20 \lg \frac{f^2}{f_0^2}.$$

O problemă importantă pentru practică se referă la analizarea în mod rapid a eficacității unei izolări date și invers găsirea căilor pentru realizarea unei izolări care să aibă o eficiență (amortizare) dinainte fixată. Acest lucru poate fi realizat dacă se exprimă deformația statică în funcție de coeficientul de transmisibilitate c_T.

Din relația 2 și 4′ se deduce

$$x_{st} = \frac{25}{f^2}\left(1 + \frac{1}{c_T}\right) = \frac{9 \times 10^4}{n^2}\left(1 + \frac{1}{c_T}\right). \tag{6}$$

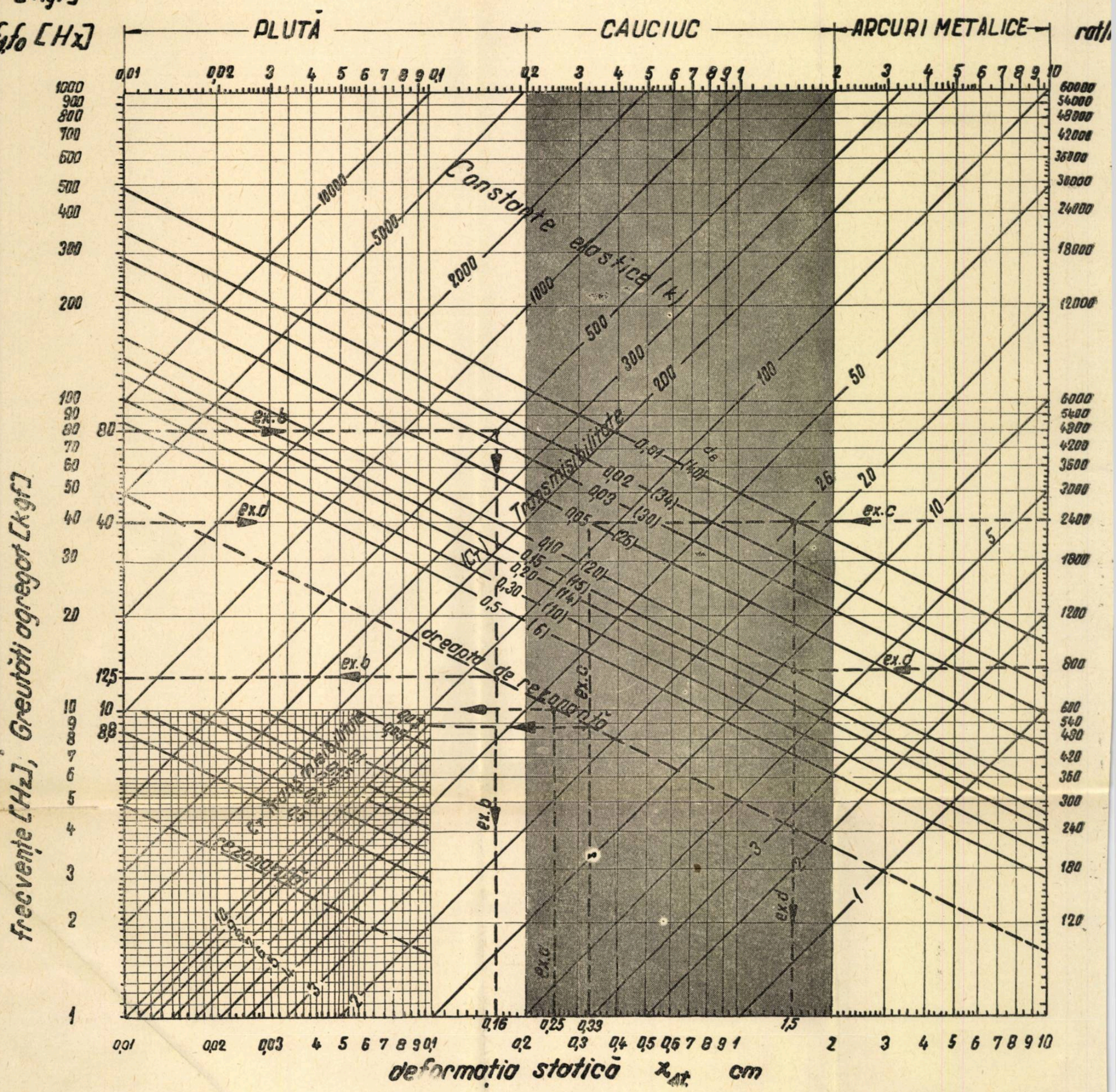


Fig. 1 Nomogramă pentru calculul elementelor vibrației. Constanta elastică, coeficientul de transmisibilitate și frecvența proprie a unui agregat în funcție de deformația statică.

Pentru ușurința calculului practic, în fig. 1 s-au reprezentat sub formă de nomograme relațiile 1, 2, 3, 6. Nomograma este construită la scări logaritmice, în abscisă fiind reprezentate deformațiile statice cuprinse între 0,01 și 10 cm, iar ordonata reprezentînd după caz, frecvența, greutatea agregatului, sau turația mașinii în rotații pe minut. Au fost trasate în afară de rețeaua carteziană la scară logaritmică și o serie de familii de drepte. Dreapta punctată înclinată reprezintă dreapta de rezonanță, cu ajutorul căreia se determină frecvența proprie în raport de deformația statică [1]. Familia de drepte paralele cu dreapta de rezonanță reprezintă curbele de egală transmibilitate [4]. Au fost alese valori uzuale pentru transmisibilitate, valori cuprinse între 0,01 și 0,5.

Altă familie de drepte paralele cu bisectoarea întîia a axelor de coordonate reprezintă drepte de egală constantă elastică. În colțul din stînga al nomogramei s-a reprezentat un pătrat care poate servi pentru interpolarea rezultatelor tuturor parametrilor. Mai jos se arată unele exemple privitoare la folosirea nomogramei.

Exemplul 1. a) Să se determine frecvența proprie a unui agregat care, sub acțiunea greutății proprii, are o deformație statică de 0,25 cm. Pe grafic se duce abscisa 0,25 ce reprezintă deformația statică, pînă se intersectează dreapta de rezonanță, iar pe scara din stînga se citește frecvența proprie $f_0 = 10$ Hz.

b) Să se determine care este deformația statică a unui agregat care are o greutate totală $P = 320$ kgf, așezat pe patru arcuri identice avînd fiecare o constantă elastică $k = 500$ kgf/cm, precum și frecvența proprie corespunzătoare.

Se ia pe grafic, ordonata 80, corespunzătoare sarcinii pe care o va suporta fiecare arc, pînă la intersecția cu dreapta $k = 500$ kgf/cm ce reprezintă constanta elastică a fiecărui arc. Abscisa punctului de intersecție ne arată deformația statică corespunzătoare $x_{st} = 0{,}16$ cm, iar ordonata punctului de intersecție cu dreapta de rezonanță, citită pe axa ordonatelor arată o frecvență proprie $f_0 = 12{,}5$ Hz.

c) O pompă centrifugă care are o turație 2400 rot/min, trebuie să asigure o transmisibilitate c_T de maximum 0,05. Se cere săgeata statică și frecvența proprie a agregatului.

Se duce pe grafic, pe scara din dreapta, ordonata corespunzătoare turației de 2400 rot/min pînă intersectează dreapta de transmisibilitate $T = 0{,}05$. Abscisa punctului de intersecție ne arată deformația statică corespunzătoare $x_{st} = 0{,}32$ cm, iar la intersecția acestei ordonate cu dreapta de rezonanță se citește frecvența proprie $f_0 = 8{,}8$ Hz.

d) Un ventilator, avînd o turație de $n = 800$ rot/min, este cuplat cu un motor electric avînd o turație de $n_1 = 1200$ rot/min, iar întreg grupul are greutatea totală $P = 120$ kgf. Să se determine deplasarea statică, și constanta elastică a unuia din cele 4 arcuri folosite pentru suspensie, coeficientul de transmisibilitate fiind $c_T = 0{,}1$.

Intrînd în nomogramă cu ordonata ce reprezintă turația cea mai joasă $n = 800$ rot/min, pînă la intersecția cu $c_T = 0{,}1$, se obține $x_{st} = 1{,}5$ cm. Abscisa deformației statice 1,5 cm, intersectează ordonata de 40 kgf,

corespunzătoare greutății pe care o suportă un singur arc, în punctul ce corespunde unei constante elastice, $k=26$ kgf/cm ; frecvența proprie este $f_0=4$ Hz și se verifică

$$c_T=\left(\frac{f_0}{f}\right)^2=\left(\frac{4}{12,5}\right)^2\approx 0,1.$$

Din examinarea nomogramei rezultă o serie de consecințe practice importante referitoare la izolarea vibrațiilor.

a) Pentru o *aceeași turație*, transmisibilitatea este cu atît mai mică deci gradul de amortizare a vibrațiilor, este cu atît mai ridicat cu cît deformația statică este mai mare și cu cît constanta elastică este mai mică, deci cu cît suportul este mai elastic.

b) La o *aceeași deformație statică*, atenuarea și constanta elastică a elementului izolator scad o dată cu frecvența perturbatoare. Ca urmare, vibrațiile de frecvență joasă sînt mai greu de amortizat și necesită elemente foarte elastice, care fac adeseori ca instalația să fie nestabilă, în special arcurile metalice.

c) Pentru *o aceeași constantă elastică*, gradul de amortizare a vibrațiilor și deformația statică cresc cu turația. Deci un anumit strat elastic nu izolează în condiții identice toate tipurile de mașini și agregate.

d) La o aceeași *transmisibilitate (același grad de amortizare)* deformația statică scade, iar rigiditatea crește odată cu creșterea turației. Prin calcul și din examinarea nomogramei se constată că o aceeași amortizare poate fi obținută, fie în zona deformațiilor statice mici, corespunzătoare la greutăți mari ale agregatului și rigidității ridicate, fie în zona deformațiilor statice mari dar folosind materiale cu mare elasticitate.

De aici rezultă că deși forța transmisă de o mașină sau agregat se exprimă numai în funcție de raportul frecvențelor, aceasta diferă atît în raport cu greutatea mașinii sau a agregatului cît și cu puterea acestora. Practica confirmă această ultimă concluzie. In tabela 1 se arată valorile factorului de transmisibilitate, respectiv gradul de amortizare, necesare a fi obținute în cazul diferitelor tipuri de mașini și agregate în raport de turația și puterea acestora.

Nomograma din fig. 1 mai poate indica și cel mai potrivit material ce trebuie ales, la amortizarea vibrațiilor într-o situație concretă dată. In acest scop graficul a fost împărțit în trei zone corespunzătoare principalelor materiale întrebuințate la amortizarea vibrațiilor (plută, cauciuc, arcuri metalice), zone separate de dreptele ce reprezintă transmisibilitatea de 0,5 și o serie de drepte paralele cu axa y-cilor și trecînd prin punctele de deformație statică 0,2 cm și 2 cm. Pentru o mai ușoară alegere a materialului aceste zone au fost colorate diferit. Din examinarea graficului se observă că pentru un anumit factor de transmisibilitate sînt indicate să se folosească materiale diferite în raport de săgeata statică.

Exemplul 2. Realizarea unui coeficient de transmisibilitate c_T de 0,05 pentru pompe centrifuge, indicat în tabela 1, necesită pentru amortizare materiale diferite în raport de turația *agregatului*. Astfel, din exami-

narea nomogramei, rezultă că pentru asemenea agregate cu turații mici sub 1000 rot/minut, sînt indicate arcurile din oțel, de la 1000 la 2000 rot/min., trebuie folosite amortizoarele din cauciuc, iar la turații mai mari trebuie folosită pluta.

Tabela 1

Tipul mașinii sau agregatului	Coeficient de transmisibilitate	Grad de amortizare a vibrațiilor (dB)
1. Aparate mici de condiționat aerul	0,10	20
2. Cazane cu abur	0,05	26
3. Condensatoare	0,2	14
4. Compresoare		
a) alternative, de puteri:		
sub 15 CP	0,15	15
între 20—60 CP	0,10	20
între 75—150 CP	0,05	26
b) centrifuge	0,02	34
5. Pompe centrifuge	0,05	26
6. Ventilatoare centrifuge		
$200 < n < 350$	0,3—0,2	10—14
$350 < n < 800$	0,2—0,1	14—20
$n > 800$	0,1—0,05	20—26

La limita de separare a zonelor diferitelor materiale, este evident că pot fi folosite oricare dintre acele materiale alegîndu-se de la caz la caz unul sau altul ținînd seama de alți parametri, sau de materialul de care se dispune.

2. O altă nomogramă se referă la calculul elementelor de cauciuc ce lucrează la compresiune. Se știe că datorită faptului că acestea nu urmează legea lui Hooke, calculul unor astfel de amortizări necesită un studiu mai atent.

Drept parametru de bază în studiul folosirii cauciucului ca amortizor se ia duritatea acestuia raportată la unități Shore (0—100). La combaterea vibrațiilor se folosesc elemente din cauciuc cu o duritate cuprinsă între 30—70 U.Ș. În raport de duritate variază parametrii de calcul ai cauciucului, modulele de elasticitate static și dinamic, rezistența și deformația statică.

Deformația statică a cauciucului variază cu duritatea (fig. 2) fiind mult mai mică pentru durități ce depășesc 46—48 U.Ș., valori pentru care cauciucul devine mult mai rigid. Proprietățile de amortizare ale cauciucului cresc cu duritatea.

Pentru stabilirea nomogramei elementelor de cauciuc care lucrează la compresiune s-a notat:

Q greutatea totală a întregului ansamblu suportat de elementul amortizor de vibrații

h grosimea stratului amortizor cm

$\Delta h = x_{st}$ deformația statică sub sarcină cm

E_d, E_{st} modulele de elasticitate dinamic și static kgf/cm²

A aria întregii secțiuni ce suportă sarcina Q, cm²

σ_a rezistența admisibilă a cauciucului, kgf/cm²

$c_1 = \frac{E_d}{E_{st}}$ raportul modulelor de elasticitate

$c_2 = \frac{E_{st}}{\sigma_a}$ raportul dintre modulul de elasticitate static și rezistența admisibilă.

În domeniul elastic cauciucul ascultă de legea lui Hooke iar în domeniul plastic trebuie să se țină seamă de influența modulului elasticitate dinamic.

Ca urmare se pot scrie relațiile :

$$h_{st} = \frac{E_{st}}{\sigma_a} \cdot \Delta h = C_2 x_{st}\,;\; h_{din} = \frac{E_d}{\sigma_a} \cdot \Delta h = C_1 C_2 x_{st},$$

cu ajutorul cărora se pot efectua dimensionarea elementelor de cauciuc care lucrează la compresiune.

Grosimea elementului amortizor $h = c_1 \cdot c_2 \cdot x_{st}$, cm.

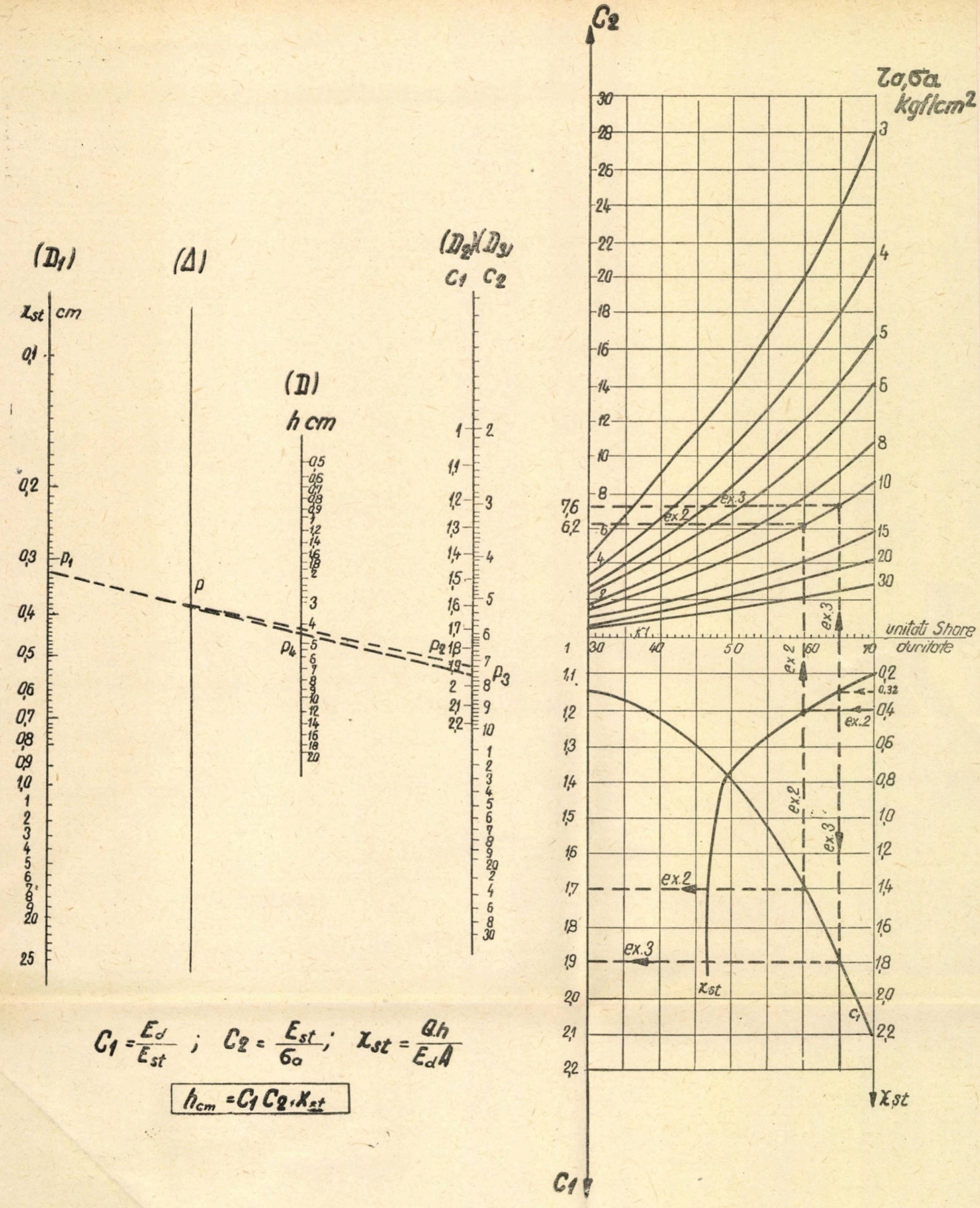
Secțiunea elementului $A_{nec} = \frac{Q}{\sigma_a}$, cm².

Valorile rezistențelor admisibile pentru diferite solicitări simple în cazul cauciucului sînt înscrise în tabela 2.

Tabela 2

Solicitarea	Condiții de folosire	Rezistențe admisibile	
		Static	Dinamic
a) compresiune	sarcini mari ; înălțime limitată la 4—5 cm pentru evitarea flambajului	30—50	10—15
b) întindere	utilizarea limitată la sarcini foarte mici	10—20	5—10
c) forfecare	folosită în special pentru joase frecvențe. Cauciucul să adere bine pe metal	10—20	3— 5
d) încovoiere	se folosește la sarcini mici și deformații mari	20	3—10

Grosimea stratului elastic nu trebuie să depășească cîțiva centimetri. Aceasta pe de o parte pentru ca garniturile elastice să-și poată păstra stabilitatea laterală, iar pe de altă parte pentru a nu apare în garnituri fenomenul de rezonanță. Pentru evitarea acestui fenomen trebuie



$$C_1 = \frac{E_d}{E_{st}} \; ; \quad C_2 = \frac{E_{st}}{\sigma_a} \; ; \quad x_{st} = \frac{Q h}{E_d A}$$

$$h_{cm} = C_1 C_2 x_{st}$$

Fig. 2. Nomogramă de calcul a stratului amortizor din cauciuc în cazul solicitării la compresiune în funcție de duritatea Shore și deformația statică.

ca grosimea garniturilor elastice să fie mai mică decît jumătate din lungimea undei sonore a materialului respectiv.

Pentru o bună funcționare deformația statică trebuie să fie mai mică decît 20% din înălțimea amortizorului.

In graficul din fig. 2-a s-au reprezentat variațiile coeficienților c_1, c_2. Coeficintul c_1 crește cu duritatea cauciucului și are o valoare maximă de 2,2 pentru 70 unități Shore. Pentru diferite valori ale rezistenței admisibile a cauciucului, reprezentat prin familia de curbe din cadranul întîi a graficului luînd în abscisă duritatea cauciucului, în ordonată se citesc coeficienții c_2.

Exemplul 2. Să se afle coeficienții c_1, c_2 și duritatea cauciucului pentru o rezistență admisibilă de 10 kgf/cm² și o deformație statică $x_{st} = 0{,}4$ cm.

Ducînd pe graficul din figura 2-a prin ordonata $x_{st} = 0{,}40$ o orizontală pînă taie curba săgeții statice în punctul P, se citește pe curba coeficientului c_1 valoarea $c_1 = 1{,}7$, iar pe axa absciselor duritatea de 60 unități Shore. Abscisa intersectează curba de rezistență admisibilă $\sigma_a = 10$ kgf/cm² într-un punct P_2 a cărui ordonată este $c_2 = 6{,}2$.

Exemplul 3. Să se amortizeze împotriva vibrațiilor o pompă centrifugă cuplată cu un motor electric de 12 kw, la o turație $n = 2\,400$ rot/min, acestea fiind montate împreună pe un același postament. Greutatea totală a întregului agregat aflat deasupra stratului izolator compus din centrifugă, agregat și postament este de 380 kgf.

Pentru pompe centrifuge, din tabela 1 rezultă un coeficient de transmisibilitate $c_T = 0{,}05$. Alegînd patru amortizoare, fiecare va suporta o sarcină de $Q = 95$ kgf. Folosind nomograma din fig. 1 se obține (exemplul 1 c) pentru deformația statică și frecvența proprie valorile

$$x_{st} = 0{,}32 \text{ cm}; \quad f_0 = 8{,}8 \text{ Hz},$$

Odată determinată deformația statică, din fig. 2 rezultă că pentru $x_{st} = 0{,}32$ trebuie să se folosească un cauciuc avînd o duritate de 65 unități Shore, căreia îi corespunde un coeficient $c_1 = 1{,}9$. Pentru calcularea coeficientului c_2 necesar determinării amortizorului, din tabela 2, se va alege, pentru solicitarea la compresiune, ca rezistență admisibilă valoarea $\sigma_a = 10$ kgf/cm², corespunzătoare minimului prevăzut. Cu ajutorul nomogramei din fig. 2, pentru curba $\sigma_a = 10$ kgf/cm², rezultă coeficientul $c_2 = 7{,}6$.

Condiția unei bune stabilități este îndeplinită, căci $x_{st} \leqslant 0{,}2$ h.

Pentru ușurința calculului s-a întocmit o nomogramă cu aliniamente de puncte reprezentată în partea stîngă a fig. 2. Aceasta servește la calculul grafic al grosimii stratului de cauciuc. Pe dreptele $D_1D_2D_3D$ sînt reprezentate respectiv deformarea statică x_{st}, coeficienții c_1, c_2 și înălțimea stratului de cauciuc. Dreapta Δ reprezintă doar un suport auxiliar, care servește la folosirea graficului.

Folosirea nomogramei este simplă. Pentru aflarea înălțimii rondelei din exemplul precedent, se unește punctul P_1 ce reprezintă deformația statică 0,32 (marcat pe dreapta D_1), cu punctul P_2 ce reprezintă coefi-

cientul $c_1 = 1{,}9$ marcat pe dreapta D_2. Această dreaptă taie suportul auxiliar Δ într-un punct P, care unit cu punctul P_3, ce reprezintă coeficientul $c_2 = 7{,}6$ și marcat pe suportul D_3, taie suportul D în P_4 unde se citește grosimea stratului amortizor care este $h = 4{,}6$ cm.

Nomogramele calculate și prezentate, sînt foarte utile pentru proiectarea dispozitivelor de amortizare și izolare a vibrațiilor produse de mașini și agregate.

Catedra de mecanică teoretică
Institutul politehnic București

BIBLIOGRAFIE

1. *J. P. Den Hartog.* Vibrations mécaniques. Dunod Paris, 1960.
2. *I. I. Slavin.* Zgomotul industrial și combaterea lui. Editura tehnică Buc., 1957. (Traducere din limba rusă).
3. *S. Elonka.* Metode de izolare a vibrațiilor. Power, 1960 nr. 8 august.
4. *E. Grede.* Vibration and Shock Isolation. John Wiley-Sons Inc, New York, 1951.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC BUCUREȘTI
Tomul XXVI — 1964, Fascicola 2

C.Z. 513.8 : 531

UNELE PROPRIETĂȚI TOPOLOGICE ALE SISTEMELOR DE CORPURI

MIHAIL ATANASIU

În topologie se studiază cele mai generale proprietăți ale unei mulțimi de elemente, proprietăți care rezultă din interconexiunea și condiționarea reciprocă a acestor elemente, indiferent de natura lor (proprietățile invariante la transformările topologice). Aceste proprietăți caracterizează cel mai bine natura intimă a proceselor care au loc într-un sistem, indiferent de natura acestor procese. Luarea în considerare a acestor proprietăți în cazul sistemelor de corpuri între care apar interacțiuni de natură mecanică, împreună cu alte proprietăți specifice acestor sisteme, ne-a condus la o serie de rezultate interesante și la unele metode de calcul care aduc simplificări apreciabile și o mare reducere a volumului de lucru față de metodele existente actualmente.

În acest capitol se expun cele mai importante noțiuni de topologie care interesează domeniul de cercetare al Mecanicii teoretice arătîndu-se totodată semnificația lor concretă în cadrul sistemelor de corpuri între care apar interacțiuni de natură mecanică.

1. Generalități

Sistemele materiale cu care operează diferitele domenii ale tehnicii sînt alcătuite în general dintr-o serie de „elemente" care își transmit unele altora acțiuni fizice reciproce rezultînd din interacțiunea și condiționarea lor mutuală în interiorul sistemului respectiv și din interacțiunea sistemului considerat cu alte elemente sau sisteme exterioare. Astfel, spre exemplu, mulțimea elementelor care alcătuiesc sistemele mecanice întîlnite în Mecanica teoretică, Rezistența materialelor, Teoria mecanismelor și în Statica construcțiilor este alcătuită din totalitatea corpurilor care formează sistemul respectiv; elementele de conexiune dintre corpurile din care se compune un asemenea sistem sînt alcătuite din legăturile mecanice (cuplele) dintre corpurile sistemului, iar interacțiunile

reciproce transmise între corpurile sistemului sînt interacțiuni de natură mecanică (forțe și cupluri). În Electrotehnică elementele care alcătuiesc un sistem sînt formate din rezistențe, condensatori, tuburi electronice, surse de curent, ș.a. conectate între ele într-un anumit mod; interacțiunile transmise între elementele care alcătuiesc un sistem electric sînt interacțiuni de natură electrică sau magnetică. Prin generalizarea acestor noțiuni s-a ajuns la extinderea lor într-o serie de domenii în care s-a crezut la început că ele nu pot avea aplicații: astfel de exemplu întîlnim astăzi sisteme de orașe interconectate prin căi de comunicație și între care există interacțiuni de diferite naturi reprezentate prin „relațiile" care pot apare între orașele care alcătuiesc sistemul.

Încă de multă vreme s-a observat faptul remarcabil că discipline cu preocupări foarte variate folosesc teoreme analoge pentru analiza fenomenelor care iau naștere în asemenea sisteme. Nu este vorba aici despre analogia formală care apare în partea matematică ce descrie fenomenele respective (analogii mecanice, electrice, termice, hidraulice) ci despre o serie de teoreme rezultînd numai din interconexiunea elementelor care alcătuiesc sistemul respectiv, fără a ține seama de natura fizică a elementelor care alcătuiesc sistemul și de natura fizică a interacțiunii transmise între diferitele elemente ale sistemului. S-a ajuns astfel la definirea abstractă a unor concepte fundamentale care caracterizează natura intimă a acestor sisteme reprezentate printr-o schemă, sisteme care se întîlnesc astăzi în cele mai diferite domenii și sub cele mai diferite nume (moleculele din Chimie, sociogramele din Psihologie, circuitele electrice din Electrotehnică, diagramele de organizare din Economie, schemele de joc din Teoria jocurilor, schemele de transport din Teoria rețelelor de transport ș.a.). O asemenea schemă formată din puncte care reprezintă elementele sistemului considerat, indiferent de natura lor fizică și din linii care unesc aceste puncte (linii orientate sau nu) și care reprezintă în mod simbolic interacțiunile dintre elementele sistemului considerat indiferent de natura lor fizică poartă în topologie denumirea de *graf*. Studiul proprietăților intrinseci ale acestor scheme rezultînd exclusiv din interacțiunea elementelor care alcătuiesc sistemul pe care îl reprezintă schema respectivă este prezentat într-o ramură modernă a topologiei denumită *Teoria grafurilor*. Pentru a putea fi aplicată într-o serie de domenii atît de variate, Teoria grafurilor face uz de noțiuni și teoreme abstracte și formalizate; cu ajutorul acestor noțiuni și teoreme se pot pune în evidență o serie de proprietăți determinante pentru caracterizarea naturii intime a proceselor care au loc în sistemul considerat. După cum se va dovedi în cele ce urmează, luarea în considerare a acestor proprietăți este esențială pentru caracterizarea proceselor care au loc în sistemele mecanice.

În cele ce urmează vom prezenta după literatura de specialitate [2], [3] într-o formulare adecuată, principalele noțiuni și teoreme din Teoria grafurilor precum și modul de aplicare al acestor noțiuni și teoreme la analiza topologică a sistemelor de corpuri.

2. Noțiuni elementare din teoria grafurilor

Se definește drept *graf* o schemă alcătuită dintr-o mulțime de puncte unite între ele printr-o serie de linii sau orice segmente orientate. Se spune că este dat un graf atunci cînd se dau o mulțime de puncte X și o aplicație Γ a mulțimii X în ea însăși. Un graf se notează $G = (X, \Gamma)$, fiind alcătuit din cuplul format de mulțimea X și aplicația Γ. Punctele grafului reprezintă elementele sistemului considerat (corpuri în Mecanică, condensatori, rezistențe în Electrotehnică) iar segmentele orientate sau neorientate care simbolizează aplicația mulțimii punctelor în ea însăși reprezintă relațiile de interdependență dintre elementele sistemului inițial (de ex. cuplele dintre corpurile unui sistem mecanic, regulile unui joc, conexiunile unui sistem electric, conductele unei rețele de transport).

Un graf se zice că este *simetric* dacă oricare două vîrfuri ale sale sînt legate prin două arce de orientări opuse; pentru a simplifica reprezentarea unui asemenea graf se convine ca vîrfurile adiacente să fie unite printr-un segment de dreaptă fără săgeată.

Grafurile sistemelor de corpuri sînt grafuri simetrice în baza principiului reciprocității: dacă corpul A este legat cu corpul B atunci și corpul B este legat cu corpul A.

Se zice că un graf este *antisimetric* dacă orice cuplu de vîrfuri adiacente este unit într-o singură direcție.

Se zice că un graf este *complet* dacă orice cuplu de vîrfuri este legat cel puțin într-una din cele două direcții.

La un graf întîlnim — după cum s-a mai arătat — laturi (segmente neorientate) și *arce* (segmente neorientate); un graf format din laturi este denumit *graf neorientat* spre deosebire de graful format din arce care este denumit *graf orientat*.

Un *lanț* este o secvență de laturi astfel încît fiecare latură este legată de precedenta printr-una din extremitățile sale și de următoarea prin cealaltă extremitate; un lanț este *simplu* dacă laturile folosite sînt toate diferite între ele sau *compus* în caz contrar.

Un ciclu este un lanț finit care pleacă dintr-un vîrf și ajunge în același vîrf; un ciclu este *simplu* dacă laturile folosite sînt toate diferite între ele sau *compus* în caz contrar; un ciclu este *elementar* dacă orice vîrf care se află pe acest ciclu nu este întîlnit decît o singură dată.

Noțiunile atașate unui graf neorientat sînt deci *latură*, *lanț* și *ciclu*. Noțiunile corespunzătoare pentru un graf orientat sînt *arc*, *drum*, *circuit*.

Un arc are o extremitate inițială și una terminală; el este incident cu un vîrf spre exterior dacă vîrful considerat este extremitatea inițială a arcului și spre interior dacă acest vîrf este extremitatea terminală.

Se numește *drum* pe un graf orientat, o secvență de arce astfel încît extremitatea terminală a fiecărui arc coincide cu extremitatea inițială a arcului următor. Un drum este simplu dacă el nu folosește de două ori același arc și *compus* în caz contrar. Un drum care nu întîlnește de două ori același vîrf este numit *elementar*; un drum poate fi *finit* sau *infinit*.

Un *circuit* este un drum finit în care vîrful inițial coincide cu vîrful terminal; un circuit este numit *elementar* dacă toate vîrfurile care îl întîlnesc sînt distincte cu excepția vîrfului inițial și terminal care coincid.

Lungimea unui drum este prin definiție numărul arcelor secvenței care îl alcătuiește. Un circuit de lungime 1 este constituit într-un singur arc care pleacă și intră în același vîrf; el este denumit *buclă*.

Un graf orientat este numit *conex forte* dacă pentru oricare două vîrfuri există un drum între ele; un graf neorientat este *conex* dacă pentru orice cuplu de două vîrfuri distincte există un lanț mergînd de la unul la celălalt. Un graf conex forte este conex dar reciproca nu este adevărată.

Un *arbore* este un graf finit conex fără cicluri; dacă arborele conține toate nodurile unui graf el se numește *arbore complet*. Dacă se notează cu n numărul de noduri ale grafului, atunci un arbore complet al acestui graf conține $n-1$ laturi. Un graf poate avea în general mai mulți arbori complet distincți.

Orice latură care nu face parte dintr-un arbore complet se numește *coardă*; mulțimea laturilor unui graf care sînt complimentare unui arbore complet al acestui graf formează *subgraful coardelor* corespunzător arborelui considerat. Dacă se notează cu l numărul laturilor unui graf, atunci subgraful coardelor conține $l-n+1$ laturi.

Descrierea proprietăților fundamentale ale unui graf se face prin folosirea a patru numere fundamentale denumite respectiv *numărul ciclomatic, numărul cromatic, numărul de stabilitate internă* și *numărul de stabilitate externă*. Pentru cele ce urmează vom reține numai primul dintre aceste numere, adică numărul ciclomatic sau *numărul lui Betti*. Acest număr este definit pentru grafuri neorientate sau mai general pentru *multi-grafuri* (un multi-graf este un graf la care două vîrfuri distincte pot fi unite prin mai multe laturi distincte).

În teoria grafurilor se demonstrează următoarea teoremă: *numărul ciclomatic al unui multi-graf este egal cu numărul maxim de cicluri independente.*

Numărul maxim de cicluri independente al grafului atașat unui sistem de corpuri joacă un rol deosebit în expunerea care urmează, deoarece el caracterizează natura topologică a sistemului considerat. Datorită acestui fapt prezintă importanță nu numai determinarea numărului ciclomatic ci și identificarea unei baze de cicluri topologic independente.

Pentru un graf dat numărul ciclomatic are valoarea:

$$n_c = n_1 - n_0 + 1 \tag{1}$$

unde prin n_1 s-a notat numărul laturilor iar prin n_0 s-a notat numărul nodurilor grafului considerat.

Un procedeu simplu de găsire a unei baze de cicluri independente este următorul: se consideră un ciclu oarecare al grafului și se suprimă una din laturi; obținem astfel un subgraf al grafului inițial. Se consideră în continuare un ciclu oarecare al acestui subgraf și i se suprimă o latură. Obținem un alt subgraf al grafului inițial. Se procedează analog pînă ce,

în cele din urmă se ajunge la un subgraf al grafului inițial care nu mai are nici un ciclu, adică la un arbore al grafului inițial. Laturile suprimate formează subgraful coardelor. Ciclurile considerate succesiv formează o bază de cicluri independente. Din procedeul descris mai sus rezultă că pentru un graf dat există în general mai multe baze de cicluri independente. În teoria grafurilor se demonstrează însă că oricare ar fi baza de cicluri independente ale unui graf, numărul lor n_c este întotdeauna același egal cu cel al coardelor și anume numărul ciclomatic dat de relația (1).

Se spune că un graf sau un multi-graf este *planar* dacă el poate fi reprezentat pe un plan, astfel încît vîrfurile sale să fie puncte distincte, laturile să poată fi reprezentate prin curbe simple și dacă două laturi nu se întîlnesc excepînd extremitățile lor. Reprezentarea unui graf pe un plan cu respectarea condițiilor de mai sus conduce la noțiunea de *graf planar topologic*; două grafuri planare topologice care pot fi aduse în coincidența prin deformarea elastică a planului nu sînt considerate ca fiind distincte.

În legătură cu noțiunea de graf planar topologic avem următoarele două definiții:

— se definește ca fiind o *față* a unui graf planar topologic o regiune a planului limitat de laturi care nu conține nici vîrfuri nici laturi în interiorul său;

— se definește ca fiind *conturul* unei fețe ciclul format de laturile situate pe frontiera feței considerate;

— se spune că două fețe sînt *adiacente* dacă contururile lor au cel puțin o latură comună; două fețe care vin în contact într-un punct nu sînt considerate ca fiind adiacente;

— orice graf planar are o față nelimitată și numai una; această față se numește *față infinită*; celelalte fețe sînt denumite *fețe finite*.

În teoria grafurilor planare se demonstrează următoarele două teoreme care interesează expunerea ce urmează:

— într-un graf planar topologic contururile fețelor finite formează o bază fundamentală de cicluri independente;

— între numărul de noduri n_0, numărul de laturi n_1 și numărul de fețe f ale unui graf planar topologic conex există relația lui Euler:

$$n_0 - n_1 + f = 2 \qquad (2)$$

Din această relație rezultă că numărul de fețe finite, care este egal cu numărul total de fețe mai puțin fața infinită, este egal cu numărul ciclomatic dat de relația (1). Din aceste două teoreme rezultă un procedeu foarte simplu pentru identificarea unei baze de cicluri independente a unui graf: frontierele domeniilor interioare disjuncte în care graful împarte planul formează o bază de cicluri independente a grafului considerat. Aceste cicluri se bucură de proprietatea importantă că fiecare latură a grafului aparține numai la două conture și pentru o orientare arbitrară, aceeași pentru toate fețele — ele sînt parcurse fiecare de cîte două ori în sensuri opuse.

Reprezentînd fiecare față a grafului prin cîte un punct și fiecare lanț simplu comun la două fețe prin cîte o latură care unește cele două puncte ce reprezintă fețe delimitate de lanțul considerat se obține un nou graf denumit *graful conturelor*; acest nou graf joacă un rol important în analiza structurii topologice a sistemului reprezentat de graful inițial.

In general graful conturelor este un multigraf; uneori se obișnuiește ca lanțul simplu comun la două conture să fie reprezentat în graful conturelor printr-o singură latură, căreia i se atașează un număr reprezentînd numărul laturilor comune celor două conture considerate.

In cele de mai sus am prezentat o serie de noțiuni și teoreme din teoria grafurilor de care vom face uz în expunerea care urmează.

3. Aplicațiile Teoriei grafurilor la analiza topologică a sistemelor de corpuri

Cu ajutorul teoriei grafurilor se pot pune cel mai bine în evidență proprietățile topologice ale unui sistem de corpuri rigide sau elastice indiferent dacă acest sistem este un cadru, o structură sau un mecanism. In acest mod apare foarte clar repartiția legăturilor între corpurile sistemului considerat, repartiție care reprezintă — după cum am mai arătat — unul dintre factorii importanți care trebuie avuți în vedere la analiza cinetostatică a sistemului respectiv. Pentru precizarea ideilor să considerăm sistemul de corpuri reprezentat în fig. 1. El este alcătuit din patru grinzi notate prin 1, 2, 3 și 4 conectate între ele și la batiu prin legăturile *A*, *F* (încastrări plane), *B*, *D* (articulații plane), și *C*, *E* (reazime simple). In fig. 2 *a* este reprezentat graful sistemului de corpuri din fig. 1; în acest graf s-au reprezentat prin puncte (noduri) corpurile 1, 2, 3 și 4 care alcătuiesc sistemul și batiul 0 și prin segmente de dreaptă care unesc noduri (laturile grafului) legăturile sistemului. Astfel latura 0—1 a grafului reprezintă legătura *A* dintre corpul 1 și batiul 0, latura 1—2 a grafului reprezintă legătura *B* dintre corpul 1 și corpul 2

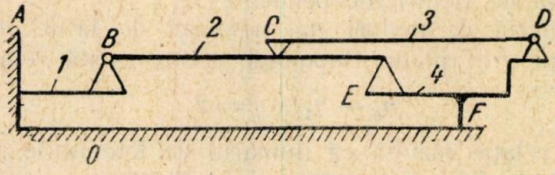


Fig. 1

al sistemului ș.a.m.d. Fiecărei laturi a grafului i s-a atașat un număr reprezentînd numărul necunoscutelor scalare introduse de legătura pe care o reprezintă latura respectivă; astfel latura 3—4 reprezintă articulația plană *D* care leagă între ele aceste corpuri și care introduce două necunoscute scalare. Pe acest graf se pot recunoaște imediat domeniile disjuncte în care este împărțit planul topologic de către ciclurile grafului (fețele grafului); acestea sînt I și II (fețele finite) precum și *E* (fața

infinită a grafului). Sistemul de corpuri din fig. 1 este deci un sistem *dublu conex* deoarece numărul ciclurilor independente al grafului atașat este egal cu două (numărul fețelor finite ale grafului).

Dacă în loc să reprezentăm totalitatea legăturilor unui corp al sistemului printr-o singură latură vom reprezenta fiecare legătură simplă printr-o latură, graful asociat sistemului respectiv devine un multigraf; în acest caz numărul laturilor care unește două vîrfuri ale multigrafului

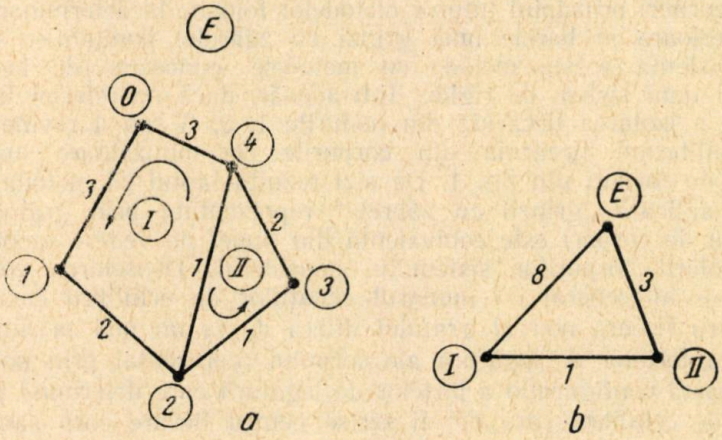


Fig. 2

este egal cu numărul necunoscutelor sçalare înscrise pe fiecare din laturile grafului reprezentat în fig. 2, a. Pentru cele ce urmează considerăm însă că o asemenea reprezentare constitue o complicație inutilă.

Dacă se orientează în același sens atît fețele finite ale grafului cît și fața sa infinită, fiecare latură a grafului va fi parcursă în două sensuri corespunzătoare parcurgerii efectuate pe cele două lanțuri care sînt adiacente laturii considerate; dacă se orientează numai fețele finite ale grafului, atunci numai laturile sale comune fețelor finite vor fi parcurse în ambele sensuri în timp ce laturile comune cu fața infinită vor fi parcurse numai într-un singur sens. Pe fig. 2, a s-a ales drept sens de orientare al fețelor finite sensul trigonometric.

In fig. 2, b s-a reprezentat graful conturelor pentru același sistem de corpuri. El are trei vîrfuri I, II și E legate între ele prin trei segmente de dreaptă (laturile grafurilor) reprezentînd lanțurile comune fețelor grafului din fig. 2, a. Fiecăruia dintre laturile grafului conturelor i s-a atașat un număr reprezentînd lungimea lanțurilor reprezentate prin cele două extremități ale laturei respective a grafului conturelor.

Grafului atașat unui sistem de corpuri i se poate da o interpretare remarcabilă din punct de vedere mecanic; el poate fi considerat ca o „grindă cu zăbrele" ale cărei noduri care reprezintă corpurile sistemului considerat sînt legate între ele printr-un număr de „bare" egal cu numă-

rul necunoscutelor scalare introduse de legătura dintre cele două corpuri care reprezintă extremitățile „barei" respective „Eforturile" din aceste bare sînt necunoscute scalare introduse de legăturile sistemului considerat.

Este evident faptul că această „grindă cu zăbrele" reprezintă o imagine topologică a legăturilor dintre corpurile sistemului considerat, deoarece direcțiile „eforturilor" în barele acestei grinzi nu coincid din punctul de vedere al configurației cu reacțiunile legăturilor sistemului.

Pe baza acestei interpretări se poate regăsi pe graful atașat unui sistem de corpuri principiul tuturor metodelor folosite la determinarea eforturilor interioare în barele unei grinzi cu zăbrele, punîndu-se totodată în corespondență aceste metode cu metodele cunoscute de la studiul echilibrului unui sistem de rigide. Intr-adevăr, dacă ne referim la graful din fig. 2, a izolarea fiecăruia din nodurile 1, 2, 3 sau 4 revine la studierea echilibrului fiecăruia din corpurile corespunzătoare aparținînd sistemului de corpuri din fig. 1. De aici rezultă faptul că metoda izolării corpurilor aplicată „grinzii cu zăbrele" reprezentată prin graful atașat unui sistem de corpuri este echivalentă din punct de vedere topologic cu metoda izolării corpurilor sistemului considerat. Deosebirea constă în aceea că — în general — numărul ecuațiilor de echilibru care pot fi scrise pentru fiecare nod al grafului diferă de la un nod la altul după configurația forțelor de legătură ale corpului reprezentat prin nodul respectiv. Această configurație a forțelor de legătură care determină numărul ecuațiilor de echilibru care pot fi scrise pentru fiecare corp sau pentru fiecare subsistem de corpuri aparținînd sistemului considerat constituie o altă caracteristică fundamentală a sistemelor de corpuri.

Izolarea nodului O de pe graf — nod care reprezintă batiul sistemului de corpuri — corespunde din punct de vedere topologic metodei de studiu a echilibrului întregului sistem de corpuri. In fine după cum se poate ușor constata, metodei solidificării (echilibrului părților) aplicată sistemului de corpuri îi corespunde pe „grinda cu zăbrele" formată din graful atașat sistemului considerat metoda secțiunilor (metoda Ritter).

Însemnînd pe fiecare nod al grafului numărul ecuațiilor de echilibru liniar independente care pot fi scrise pentru nodul respectiv (acest număr poate fi determinat din examinarea configurației forțelor de legătură ale corpului căruia îi corespunde nodul respectiv de pe graf) și adunînd pe de o parte numărul acestor ecuații iar pe de altă parte adunînd numerele atașate fiecărei laturi a grafului (numărul necunoscutelor scalare introduse de reacțiuni) putem decide dacă sistemul de corpuri considerat este sau nu static determinat sau dacă între forțele exterioare trebuie să existe anumite relații pentru echilibru.

Metoda izolării nodurilor permite în anumite cazuri o rezolvare foarte comodă a problemei determinării eforturilor interioare în barele unei grinzi cu zăbrele; într-adevăr dacă numărul necunoscutelor introduse de fiecare nod este egal cu numărul ecuațiilor de echilibru liniar independente care pot fi scrise pentru nodul respectiv (două în plan sau trei în spațiu) atunci determinarea eforturilor interioare în barele unei grinzi cu zăbrele

se poate face din aproape în aproape rezolvînd pentru fiecare nod sisteme de cîte două ecuații în plan sau trei ecuații în spațiu, avînd drept necunoscute eforturile interioare care apar în nodul respectiv (forțele exterioare aplicate nodului respectiv precum și eforturile interioare din barele care leagă nodul considerat cu alte noduri pentru care s-au scris ecuațiile de echilibru sînt considerate cunoscute). Acestei metode îi corespunde în statica sistemelor de corpuri metoda izolării fiecărui corp în parte, pentru care numărul reacțiunilor introduse de legăturile corpului considerat este egal cu numărul ecuațiilor de echilibru liniar independente care pot fi scrise pentru corpul respectiv. O problemă care aduce o mare simplificare în calcule este aceea de a evita scrierea întregului sistem al ecuațiilor de echilibru prin izolarea nodurilor de pe graf pentru care numărul necunoscutelor înscrise pe laturile incidente cu nodul respectiv depășește numărul ecuațiilor ce se pot scrie pentru fiecare nod, deși numărul ecuațiilor este egal cu numărul necunoscutelor scalare introduse de legăturile sistemului (pentru fiecare din corpurile sistemului reprezentat în fig. 1 se pot scrie cîte trei ecuații de echilibru liniar independente). O ordine de parcurgere a nodurilor grafului respectiv pentru scrierea ecuațiilor de echilibru ale fiecărui corp aparținînd sistemului din fig. 2 care să satisfacă acestei cerințe este 3—4—2—1. Urmărind în acest mod determinarea reacțiunilor din legăturile sistemului reprezentat în fig. 2 va trebui să rezolvăm în locul unui sistem de 12 ecuații cu 12 necunoscute, patru sisteme a cîte trei ecuații cu 3 necunoscute, fapt care reprezintă o simplificare apreciabilă a calculului.

La sisteme de corpuri complexe este necesar uneori să se aleagă inițial una, două sau chiar mai multe „eforturi" (reacțiuni din legăturile sistemului) în funcție de care să se exprime celelalte necunoscute. Se obține în cele din urmă un sistem de ecuații cu aceste necunoscute alese inițial ; se rezolvă acest sistem și apoi se determină și celelalte forțe de legătură necunoscute.

Continuînd comparația cu grinda cu zăbrele reprezentată prin graful atașat sistemului de corpuri considerat, se recunoaște cu ușurință în metoda de mai sus, metoda „înlocuirii barelor" folosită la determinarea eforturilor interioare în barele grinzilor cu zăbrele.

Concluziile prezentate mai sus rămîn valabile oricare ar fi forțele exterioare cunoscute aplicate corpurilor sistemului ; se știe că sistemul forțelor exterioare trebuie să satisfacă anumite condiții de configurație pentru a asigura echilibrul sistemului de corpuri considerat.

Analogia principală dintre metodele folosite la determinarea eforturilor în barele grinzilor cu zăbrele și cele folosite la studiul echilibrului sistemelor de corpuri, pusă în evidență cu ajutorul grafului atașat unui sistem de corpuri, prezintă o importanță deosebită din punct de vedere practic.

Asemănarea din punct de vedere principial a acestor trei categorii de metode atrage după sine simplificări remarcabile ale calculului în toate domeniile citate.

4. Clasificarea topologică a sistemelor de corpuri

Una din clasificările importante ale sistemelor de corpuri care este determinantă pentru metodica de analiză cinetostatică este clasificarea acestora pe criteriul ordinului de conexiune.

Prin conexiunea unui sistem de corpuri, vom înțelege conexiunea domeniului ocupat de corpurile și legăturile sistemului considerat; vom

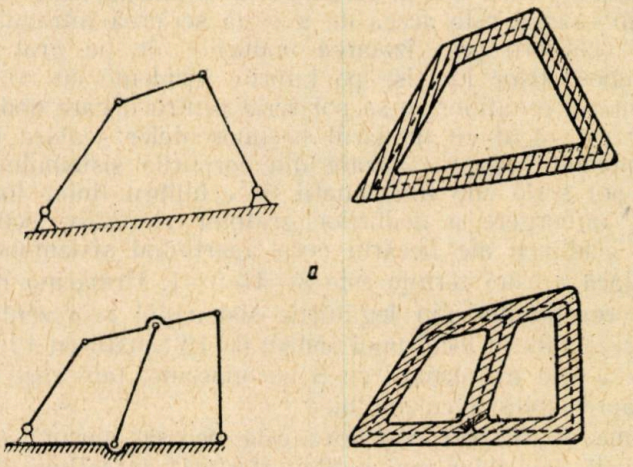


Fig. 3

considera totodată că fiecare corp al sistemului ocupă un domeniu simplu conex.

Dacă conexiunea unui sistem de corpuri este c atunci printr-un punct oarecare al domeniului obținut ca mai sus trec c curbe închise ireductibile una la cealaltă prin transformări topologice; una dintre aceste curbe este reductibilă la un punct. In fig. 3, a este arătat un sistem de corpuri dublu conex iar în fig. 3, b un sistem de corpuri triplu conex. Pe aceste figuri sînt arătate și curbele ireductibile una la cealaltă prin transformări topologice, exclusiv curba reductibilă la un punct.

Clasificarea sistemelor de corpuri pe criteriul conexiunii pune în evidență următoarele tipuri de sisteme sau lanțuri cinematice.

a) sistem de corpuri (lanț cinematic) simplu conex ($c = 1$); el este reprezentat în fig. 4. Vom denumi un asemenea sistem de corpuri *lanț cinematic deschis* (L.D.). Corpurile care intră în compunerea unui asemenea sistem pot avea una sau mai multe legături comune cu alte corpuri ale sistemului;

b) sistem de corpuri (lanț cinematic) dublu conex ($c = 2$); el este reprezentat în fig. 5. Vom denumi un asemenea sistem de corpuri *lanț*

cinematic simplu închis (L.S.I.). In compunerea unui asemenea lanț cinematic pot intra și lanțuri cinematice deschise.

c) sistem de corpuri (lanț cinematic) multiplu conex ($c > 2$) pentru care curbele închise ireductibile una la cealaltă prin transformări topo-

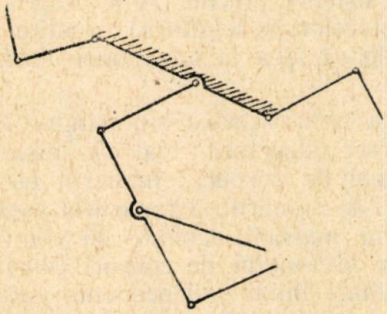


Fig. 4

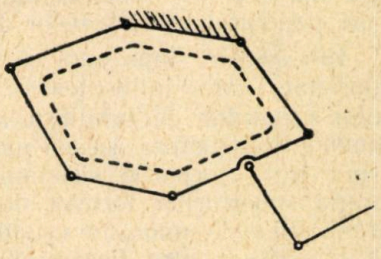


Fig. 5

logice nu au în comun legături ale sistemului; el este reprezentat în fig. 6; vom denumi un asemenea sistem de corpuri *lanț cinematic multiplu închis* (L.M.I.). In compunerea unui asemenea lanț cinematic intră și lanțuri cinematice simple închise și lanțuri cinematice deschise.

d) sistem de corpuri (lanț cinematic) multiplu conex ($c > 2$) pentru care cel puțin două curbe închise ireductibile una la cealaltă prin transformări topologice au în comun legături ale sistemului; el este repre-

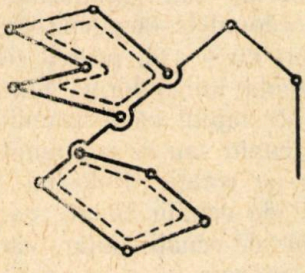


Fig. 6

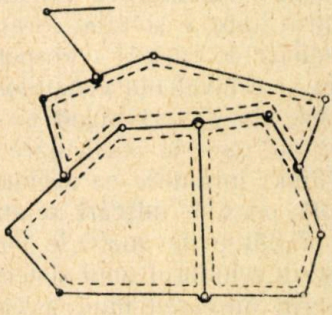


Fig. 7

zentat în fig. 7. Vom denumi un asemenea sistem de corpuri *lanț cinematic complex* (L.C.C.). In compunerea unui asemenea lanț cinematic pot intra și lanțuri cinematice deschise, simplu închise și multiplu închise.

Această clasificare pune în evidență tipurile de sisteme de corpuri distincte din punct de vedere topologic, care sînt totodată ireductibile din punct de vedere al metodicii de analiză cinematică a sistemelor.

5. Considerații cu privire la clasificarea structurală a sistemelor de corpuri

Luarea în considerare a proprietăților topologice ale unui sistem de corpuri (conexiunea domeniului ocupat de sistem) precum și a proprietăților proiective (configurația suporturilor forțelor de legătură) constituie după noi criteriile fundamentale care trebuie să stea la baza unei clasificări structurale a sistemelor de corpuri.

Într-adevăr, după cum se poate observa ușor, acestea sînt singurele proprietăți care influențează în mod direct structura matricii sistemului ecuațiilor de echilibru ale unui sistem de corpuri: numărul elementelor și structura acestei matrici depinde de numărul și repartiția legăturilor între corpurile sistemului, iar rangul matricii depinde de configurația suporturilor forțelor de legătură ale sistemului de corpuri considerat, adică de numărul ecuațiilor de echilibru liniar independente care pot fi scrise pentru fiecare din corpurile sistemului. O asemenea clasificare ar permite cuprinderea într-o serie de scheme structurale a unui foarte mare număr de sisteme de corpuri aparent distincte dar care, în fond, se bucură de aceleași proprietăți topologice și proiective. O dată cu aceasta s-ar putea indica pentru fiecare dintre sistemele de corpuri cărora le corespunde aceeași schemă structurală cea mai potrivită metodă de rezolvare a sistemului ecuațiilor de echilibru sau se pot alcătui chiar tabele de rezultate prin rezolvarea dinainte a sistemului ecuațiilor de echilibru care corespunde unei anumite scheme, rămînînd ca ulterior în soluțiile astfel obținute să fie introduse numai valorile numerice care caracterizează sistemul studiat. Pentru aceasta este suficient să se alcătuiască schema structurală a sistemului de corpuri considerat iar apoi să se ia dintr-o tabelă soluția corespunzătoare acestei scheme sau „programul" (ordinea de calcul) corespunzătoare. Folosind coordonatele omogene precum și echivalența ecuațiilor de momente în raport cu o axă, pentru sistemele de vectori avînd torsorul nul se pot prezenta într-o formă unică anumite aspecte particulare legate spre exemplu de faptul că o anumită legătură introduce ca necunoscută o forță sau un cuplu sau că o anumită cuplă permite mișcări relative de translație sau de rotație. Folosind și proprietățile de analogie formală dintre sistemele de ecuații liniare care descriu echilibrul unui sistem de corpuri și sistemele de ecuații liniare care descriu mișcarea unui mecanism se ajunge la concluzia că o asemenea clasificare prezintă un caracter de generalitate și o utilitate practică incontestabilă.

Avînd în vedere cadrul și destinația prezentei lucrări apreciem că nu este cazul de a prezenta în detaliu o asemenea clasificare; vom prezenta totuși unele aspecte generale precum și ideea de bază a unei asemenea clasificări.

Să considerăm un număr oarecare de sisteme fizice S_k ($k = 1, 2, \ldots, n$) alcătuite cu elementele unei mulțimi M (fig. 8). Asemenea

sisteme pot fi spre exemplu în mecanică, solide rigide sau sisteme de solide rigide, în electrotehnică circuite electrice etc.

Să presupunem că în interiorul acestor sisteme au loc procese fizice, care sînt descrise de mărimi scalare ce diferă ca număr de la un sistem la altul și care pot fi determinate dintr-un sistem de ecuații liniare care diferă deasemeni ca număr de la un sistem la altul; acțiunile exterioare

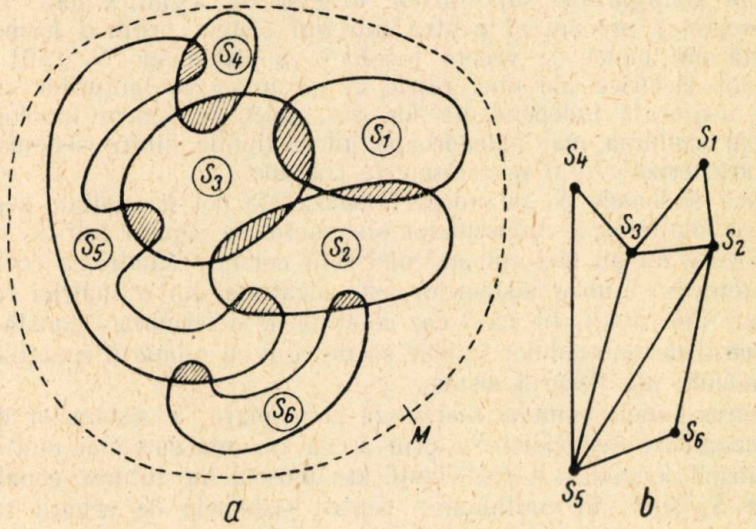


Fig. 8

cunoscute transmise sistemelor considerate apar ca termeni liberi ai acestor ecuații. Astfel în cazul sistemelor mecanice mărimile scalare menționate mai sus sînt proiecțiile reacțiunilor (forțe sau cupluri) iar în cazul sistemelor electrice ele sînt curenții care circulă în circuitele unei rețele electrice. Acțiunile exterioare cunoscute sînt în primul caz forțe și cupluri cunoscute, iar în cel de al doilea caz forțe electromotoare cunoscute. Sistemul de ecuații liniare care descrie procesele ce au loc în sistemele mecanice este sistemul ecuațiilor de echilibru iar în electrotehnică sistemul ecuațiilor lui Kirchoff.

Între sistemele S_k se exercită un număr de acțiuni reciproce, caracterizate prin aceea că un număr oarecare de variabile care descriu procesele ce au loc în două sisteme S_k și S_m sînt comune sistemelor de ecuații respective (ele sînt reprezentate în mod simbolic pe fig. 8, a prin porțiunile haşurate). Această egalitate are la bază în mecanică principiul acțiunii și reacțiunii *.

* În fig. 8, a s-au considerat numai necunoscutele comune la maximum două sisteme, caz specific pentru sistemele mecanice. În electrotehnică se operează și cu mărimi comune la mai mult de două sisteme.

Condiția de determinare a sistemului cere ca :

— numărul necunoscutelor să fie egal cu numărul ecuațiilor liniare scrise pentru toate sistemele S_k.

— ecuațiile sistemului să fie liniar independente.

Independența ecuațiilor sistemului este asigurată pentru fiecare sistem în parte (în mecanică numărul ecuațiilor liniar independente care se pot scrie pentru fiecare sistem S_k este *determinat de proprietățile proiective adică de configurația suporturilor* forțelor de legătură care reprezintă necunoscutele) precum și pentru întregul sistem printr-o formare independentă din punct de vedere topologic a sistemelor S_k (atît în cazul circuitelor electrice ale unei rețele cît și în cazul lanțurilor cinematice trebuie asigurată independența lor din punct de vedere topologic).

Vom examina mai îndeaproape interacțiunile dintre sistemele mecanice, caracterizate prin necunoscutele comune.

Dacă sistemele S_k nu interacționează ele pot fi studiate separat ; în acest caz matricea necunoscutelor sistemului se separă într-un număr de matrici care nu au nici coloane nici linii comune (matricea coeficienților necunoscutelor tuturor sistemelor este alcătuită din n matrici restul elementelor fiind nule). În acest caz condiția de determinare constă în aceea că numărul necunoscutelor trebuie să fie egal cu numărul ecuațiilor liniare independente ale fiecărui sistem.

Necunoscutele comune realizează „o cuplare" a sistemelor de ecuații corespunzătoare sistemelor S_k, prin aceea că, una sau mai multe coloane ale matricii formată cu coeficienții necunoscutelor tuturor ecuațiilor sistemelor S_k sînt „în continuare" pentru sistemele de ecuații respective. „Cuplarea" maximă a sistemelor de ecuații se realizează atunci cînd matricea coeficienților necunoscutelor tuturor sistemelor are toate elementele nenule.

In figura 8, b este reprezentat graful sistemelor din figura 8, a ; aici sistemele sînt reprezentate prin nodurile grafului, iar laturile reprezintă necunoscutele comune sistemelor. Pe laturile acestui graf se scrie de regulă numărul necunoscutelor comune, iar la noduri se scrie numărul ecuațiilor liniar independente ale fiecărui sistem și numărul necunoscutelor scalare ale sistemului respectiv.

Clasificarea sistemelor de corpuri se poate face numai după structura acestui graf care indică totodată și ordinea de rezolvare a ecuațiilor sistemului în vederea determinării necunoscutelor scalare respective. În acest mod apare ca evidentă dependența matricii sistemului de ecuații liniare a mulțimii sistemelor S_k de proprietățile topologice și proiective ale acestei mulțimi.

Dacă necunoscutele exterioare se consideră ca aparținînd unui sistem S_{k+1} conectat cu toate sistemele S_k, apar ca necunoscute comune între sistemul S_k și sistemul S_{k+1}. Pentru sistemele mecanice sistemul S_{k+1} este *batiul* care se consideră acționat de reacțiunile exterioare corpurilor S_k și de forțele și cuplurile exterioare cunoscute, aplicate corpurilor S_k luate cu semn schimbat.

In acest caz nu mai există necunoscute necomune; suma necunoscutelor înscrise pe laturile grafului trebuie să fie egală — pentru ca mulțimea sistemelor S_k să fie determinată — cu suma numerelor ecuațiilor corespunzătoare sistemelor $S_1, \ldots, S_n$; ecuațiile scrise pentru sistemul S_{n+1} nu sînt independente de ecuațiile scrise pentru sistemele $S_1, \ldots, S_n$, deoarece ele corespund metodei echilibrului mulțimii, alcătuită din sistemele $S_1, \ldots, S_n$.

Să considerăm pentru fixarea ideilor că avem două sisteme de corpuri sau două rigide S_1 și S_2 și sistemul $S_{k+1} = E$ (batiul) care sînt sisteme plane acționate de sarcini normale pe planul lor * Pentru fiecare sistem

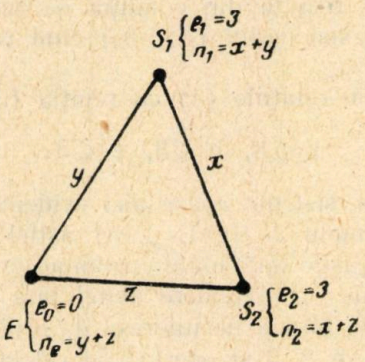


Fig. 9

S_1 și S_2 se pot scrie cîte trei ecuații independente deoarece rangul mulțimii reacțiunilor este $r = 3$, paralele în spațiu). Intre sistemele S_1, S_2 și E se exercită o serie de interacțiuni care sînt reprezentate prin necunoscutele scalare comune, reprezentînd proiecțiile forțelor de legătură pe normala comună planului în care se află sistemele S_1, S_2 și E; numărul acestor necunoscute este x pentru sistemele S_1 și S_2, y pentru sistemele S_1 și E și z pentru sistemele S_2 și E, numărul ecuațiilor scalare independente este de trei pentru sistemele S_1 și S_2 ($\Sigma Z_i = 0$, $\Sigma M_{ix} = 0$, $\Sigma M_{iz} = 0$; axele x și y se află în planul sistemelor iar axa oz este normală pe acest plan) adică $e_1 = e_2 = 3$. Pentru sistemul E avem $e_0 = 0$ deoarece ecuațiile corespunzătoare acestui sistem nu sînt independente față de ecuațiile scrise pentru sistemele S_1 și S_2. Numărul necunoscutelor pentru fiecare din sistemele S_1, S_2 și E este respectiv $n_1 = x + y$, $n_2 = x + z$ și $n_e = y + z$. Graful corespunzător acestor sisteme este reprezentat în figura 9.

Condiția de determinare a sistemului este

$$x + y + z = e_1 + e_2 = 6 \tag{3}$$

* Acest caz este des întîlnit în Statica construcțiilor sub forma grinzilor plane acționate de sarcini normale pe planul lor și în Teoria mecanismelor sub forma mecanismelor plane.

adică numărul necunoscutelor să fie egal cu numărul ecuațiilor de echilibru liniar independente.

Deoarece sistemul forțelor exterioare este arbitrar (forțe paralele în spațiu); pentru a nu apare relații suplimentare între modulele acestor forțe trebuie să avem îndeplinite condițiile:

$$\begin{aligned} x+y &\leqslant 3 \\ x+z &\leqslant 3 \\ y+z &\leqslant 3 \end{aligned} \tag{4}$$

Ultima relație (4) rezultă din condiția de echilibru a sistemului în ansamblu său adică a sistemului (S_1+S_2) cînd rangul mulțimii reacțiunilor rămîne $r=3$.

Combinînd între ele relațiile (4) cu relația (3) rezultă:

$$x \leqslant 3,\ y \leqslant 3,\ z \leqslant 3.$$

Clasificarea acestor sisteme apare aici evidentă: numărul legăturilor comune poate fi maximum 3 (0, 1, 2, 3) astfel încît suma lor să fie egală cu 6. Trebuiesc găsite deci toate combinațiile acestor numere supuse la condițiile de mai sus: trei numere avînd una din valorile 0, 1, 2, 3 a căror sumă să facă 6, fără a ne interesa de ordinea lor. Fixînd pe rînd fiecare din numerele 0, 1, 2, 3 și operînd cu celelalte rezultă următoarele combinații care satisfac condițiile de mai sus:

$$\begin{aligned} 0+3+3 \\ 1+2+3 \\ 2+2+2 \end{aligned}$$

Există deci numai trei tipuri distincte de asemenea sisteme; grafurile respective sînt reprezentate în fig. 10. Alăturat fiecărui graf s-au reprezentat matricile coeficienților necunoscutelor alegînd acele noduri pentru care numărul necunoscutelor este cel mai mic. Coeficienții acestor necunoscute sînt marcate prin puncte, restul elementelor fiind nule. Astfel la primul graf s-au luat în ordine nodurile avînd 3,3 necunoscute la cel de-al doilea 3,4 iar la cel de-al treilea oricare două noduri 4,4 (numărul de necunoscute este trecut la fiecare nod).

Din examinarea acestor grafuri rezultă că primele două tipuri de sisteme pot fi rezolvate prin descompunerea matricii în două matrici distincte; la primul tip nu interesează ordinea de rezolvare în timp ce la cel de-al doilea trebuie rezolvat mai întîi „nodul" cu trei necunoscute și apoi cel cu patru necunoscute.

Ultimul tip nu poate fi rezolvat decît folosind întregul sistem de șase ecuații cu șase necunoscute, sau alegînd o necunoscută suplimentară în funcție de care se exprimă toate celelalte necunoscute, această necu-

noscută se determină din ecuația de închidere. Ea constituie o măsură a complexității sistemului respectiv.

Pe fig. 10 se poate urmări sugestiv și gradul de „cuplare" al sistemelor.

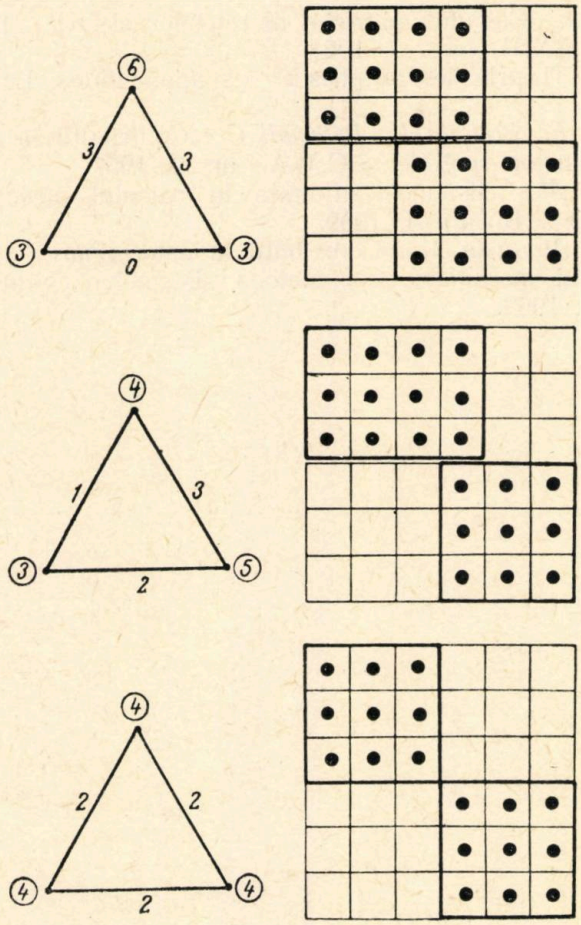


Fig. 10

Considerăm că ideile prezentate mai sus sînt determinante pentru o clasificare rațională a sistemelor de corpuri; pe baza unei asemenea clasificări se pot da soluții complete ale tuturor tipurilor de probleme întîlnite sau, cel puțin, indicații privind ordinea cea mai eficace de rezolvare a acestor probleme.

Catedra de mecanică teoretică
Institutul politehnic București

BIBLIOGRAFIE

1. *Atanasiu M.:* Mecanica Tehnică, Statica, Editura Tehnică, București, 1963.
2. *Bercovici M.:* Calculul matricial al rețelelor electrice, Buletinul I.P.B., Tom XXIII, fasc. 2, 1961.
3. *Berge Cl.:* Théorie des graphes et ses applications, Ed. Dunod, Paris, 1963.
4. *Bugaievski E., Bogdan R., Pelecudi C.:* Contribuții la clasificarea mecanismelor spațiale, S.C.M.A., nr. 2, 1957.
5. *Gheorghiu Al.:* Sisteme conjugate în calculul structurilor, Editura Tehnică, București, 1959.
6. *Voinea R., Atanasiu M.:* Contribuții la determinarea stării cinematice a unui mecanism prin metoda sistemelor conjugate, S.C.M.A., nr. 1, 1963.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC BUCUREȘTI
Tomul XXVI — 1964, Fascicola 2

TERMOTEHNICĂ

C.Z. 621.1 : 531.3

CICLURILE TERMO-GAZO-DINAMICE ALE MAȘINILOR DE FORȚĂ

de ALEXANDRU SELEȘTEANU

Progresul tehnic în construcția de mașini se manifestă și prin realizarea mașinilor rapide, la care efectele dinamice nu pot fi neglijate față de cele statice. In cazul mașinilor de forță termice efectele gazo-dinamice încep să aibă o pondere din ce în ce mai mare, astfel că considerarea lor aproximativă nu poate fi apreciată ca satisfăcătoare.

Dacă la vitezele gazului de 10 m/s energia cinetică este de 0,01 $\frac{\text{kca}}{\text{kg}}$ deci practic neglijabilă, la vitezele de 1 000 m/s aceasta atinge valori de 100 $\frac{\text{kcal}}{\text{kg}}$, fiind mai mare decît schimburile de căldură din ciclul mașinii. In consecință, se impune o metodă de calcul care acordă aceeași importanță fenomenelor gazo-dinamice, ca și celor termodinamice.

I. Bazele teoretice

Calculul complet al mașinilor de forță termice folosește relațiile general valabile.

Bilanțul energetic . . . . $d(Q + AL) = d\left(i + \frac{AC^2}{2g}\right)$

Legea entropiei . . . . $Tds = d(Q + Q') = di - Avdp$

Ecuația continuității . . . $Gv = fC$

Ecuațiile de stare . . . . $v(p, T) = \frac{RT}{p}$; $i = CpT$

In aceste relații s-au introdus următoarele notații:

p — presiunea statică în $\left[\frac{\text{kgf}}{\text{m}^2}\right]$

v — volumul specific în $\left[\frac{m^3}{kgf}\right]$

T — temperatura absolută în [°k]

i — entalpia în $\left[\frac{kcal}{kgf}\right]$

s — eutropia în $\left[\frac{kcal}{kgf\,°k}\right]$

Cp — căldura specifică în $\left[\frac{kcal}{kgf\,°k}\right]$

R — constanta gazului în $\left[\frac{kgf\,m}{kgf\,°k}\right]$

C — viteza în $\left[\frac{m}{s}\right]$

Q — căldura introdusă din exterior în circuit în $\left[\frac{kcal}{kgf}\right]$

Q' — căldura dezvoltată în interiorul ciclului, datorită pierderilor în $\left[\frac{kcal}{kgf}\right]$

L — lucrul mecanic consumat în $\left[\frac{kgf\,m}{kgf}\right]$

G — debitul de fluid în $\left[\frac{kgf}{s}\right]$

f — secțiunea perpendiculară pe direcția vitezei în [m^2]

$A = \frac{1}{427}$ echivalentul termo-mecanic în $\left[\frac{kcal}{kgf\,m}\right]$

$g = 9{,}81$ constanta de gravitație în $\left[\frac{m}{s^2}\right]$

Primele două relații permit separarea efectelor mecanice și termice în forma

$$dQ = di - Avdp - dQ'$$

$$AdL - d\frac{AC^2}{2g} + Avdp + dQ'$$

Eliminarea valorilor termice din ultimele trei relații permite întocmirea formulei :

$$Avdp = \frac{k-1}{k} i\left(\frac{di}{i} - \frac{dC}{C} - \frac{df}{f}\right)$$

Pentru ciclul fără pierderi, relațiile de bază pot fi scrise sub forma :

$$dQ = \frac{k-1}{k} i \left(\frac{1}{k-1} \frac{di}{i} + \frac{dC}{C} + \frac{df}{f} \right)$$

$$AdL = d\frac{AC^2}{2g} + \frac{k-1}{k} i \left(\frac{di}{i} - \frac{dC}{C} - \frac{df}{f} \right)$$

Se remarcă faptul că atît pentru ciclul cu pierderi cît și pentru cel fără pierderi se menține relația :

$$d\,(Q + AL) = d\left(i + \frac{AC^2}{2g} \right)$$

ceea ce impune folosirea diagramei de calcul în coordonatele $i - \frac{AC^2}{2g}$ în care se combină aspectele termce (i) cu cele gazo-dinamice $\left(\frac{AC^2}{2g} \right)$

II. **Aplicații**

Simplificarea formulelor de bază poate fi obținută prin introducerea notației pentru energia cinetică

$$z \equiv \frac{AC^2}{2g}$$

Cu aceasta, relațiile de calcul pot fi scrise în forma :

$$d\,(Q + AL) = d\,(i + z)$$

$$dQ = \frac{k-1}{k} i \left(\frac{1}{k-1} \frac{di}{i} + \frac{1}{2} \frac{dz}{z} + \frac{df}{f} \right)$$

$$AdL = dz + \frac{k+1}{k} i \left(\frac{di}{i} - \frac{1}{2} \frac{dz}{z} - \frac{df}{f} \right)$$

iar ciclul instalației poate fi reprezentat grafic în diagrama i/z

Deoarece ciclurile instalațiilor cu turbine cu gaze, reactoarelor și rachetelor se compun din evoluții elementare, nu este nevoie de rezolvarea generală a relațiilor, ci este mai rațional să se facă o analiză a evoluțiilor elementare :

1) $i \rightleftharpoons z$ . . difuzoarele compresoarelor, ajutajele turbinelor ;
2) $AL \rightleftharpoons z$ . . paletele compresoarelor și turbinelor ;
3) $Q \rightleftharpoons i$ . . camerele de ardere ale instalațiilor termice.

În ceea ce privește pierderile din ciclul (dQ'), pentru aceasta trebuie introdusă o premisă de calcul nouă. Se pare că cea mai rațională presupunere poate fi considerată cea din gazo-dinamică:

$$-Avdp = \frac{\lambda}{d_h} \cdot z \cdot dl$$

unde:

d_h . . . diametrul hidraulic al secțiunii în [m]
l . . . lungimea de-alungul canalului de curgere, în [m]
λ . . . coeficientul de pierderi.

III. Curgerea prin canale

Curgerea prin canalele turbo-mașinilor (ajutaje, difuzoare), este caracterizată prin condițiile: $Q=0$; $L=0$ iar transformarea ce se realizează prin schema $i \rightleftharpoons z$.

Ecuațiile de calcul pentru acest caz devin:

$$i + z = i_0 + z_0$$

$$\frac{1}{k-1}\frac{di}{i} + \frac{1}{2}\frac{dz}{z} + \frac{df}{f} = 0 \text{ sau}$$

$$\frac{f}{f} = \left(\frac{i_0}{i}\right)^{\frac{1}{k-1}} \cdot \left(\frac{z_0}{z}\right)^{\frac{1}{2}}$$

Reprezentarea grafică în diagrama i/z permite o analiză plastică a fenomenelor ce se petrec în canalele de curgere.

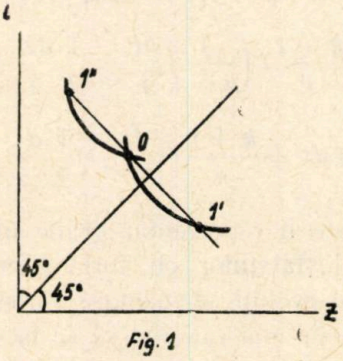


Fig. 1

Evoluția este reprezentată printr-o dreaptă, (indiferent dacă se consideră cazul fără sau cu pierderi), perpendiculară pe bisectoarea unghiului axelor de coordonate, iar punctul final depinde de raportul secțiunilor la intrare și la ieșirea din canal.

Pentru secțiunea minimă $\frac{df}{di}=0$ se obțin următoarele condiții:

$$i=\frac{2}{k+1}(i_0+z_0)$$

$$z-\frac{k-1}{k+1}(i_0+z_0)$$

$$\frac{z_0}{i_0}<\frac{k-1}{2}$$

Ultima condiție este echivalenta faptului că viteza la intrare să fie mai mică decît cea critică: $z_0<z_{cr}$.

IV. **Paletele turbo-mașinilor**

Curgerea prin palete este caracterizată prin $Q=0$. In acest caz, din relațiile de bază se obține:

$$AL=i+z-(i_0+z_0)$$

$$i^{\frac{2}{k-1}}\cdot z\cdot f^2=i_0^{\frac{2}{k-1}}\cdot z_0\cdot f_0^2$$

Cazul particular $i=i_0$ este dirijat de ecuații mai simple:

$$AL=z-z_0$$

$$zf^2=z_0f_0^2, \text{ sau}$$

$$AL=z_0\left[\left(\frac{f_0}{f}\right)^2-1\right]$$

și poate fi reprezentat în diagrama i/z printr-o dreaptă orizontală:

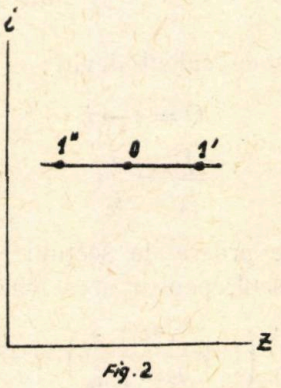


Fig. 2

Determinarea lucrului mecanic maxim, ce poate fi obținut într-o turbină se obține prin $\frac{\partial(-AL)}{\partial i}=0$ ceea ce duce la rezultatul:

$$\left(\frac{i}{i_0}\right)^{\frac{k+1}{k-1}}=\frac{2}{k-1}\frac{z_0}{i_0}\left(\frac{f_0}{f}\right)^2$$

$$\left(\frac{z}{z_0}\right)^{\frac{k+1}{k-1}}=\frac{(f_0/f)^2}{\left(\frac{2}{k-1}\cdot\frac{z_0}{i_0}\right)^{\frac{2}{k-1}}}$$

V. Camera de ardere

Evoluția în camera de ardere este caracterizată prin condiția $L=0$, ceea ce duce la următoarele relații de calcul:

$$Q=i-i_0+z-z_0$$

$$\frac{di}{dz}=i\left(\frac{1}{2z}+\frac{d\ln f}{dz}\right)-\frac{k}{k-1}$$

Din a doua relație se obține după integrare:

$$i=z^{1/2}f\left[\frac{i_0}{z^{1/2}f_0}-\frac{k}{k-1}\int_{z_0}^{z}\frac{dz}{z^{1/2}f}\right]$$

Apare evident că creșterea entalpiei în camera de ardere depinde de forma constructivă a acesteia (variația secțiunii).

Instructive sînt două cazuri particulare:

1. $dz=0$... menținerea vitezei constante de-a lungul camerei de ardere;

In acest caz, relațiile de calcul devin:

$$Q=i-i_0$$

$$\frac{f}{f_0}=\frac{i}{i_0}$$

2. $df=0$... camera de ardere de secțiune constantă.

A doua relație de calcul, pentru acest caz, devine:

$$\frac{i}{i_0}=\left(\frac{z}{z_0}\right)^{1/2}\left(1+\frac{2k}{k-1}\frac{z_0}{i_0}\right)-\frac{2k}{k-1}\frac{z_0}{i_0}\cdot\frac{z}{z_0}$$

Creșterea maximă de entalpie ce poate fi obținută în acest caz se determină din condiția $\frac{\partial\left(\frac{i}{i_0}\right)}{\partial\left(\frac{z}{z_0}\right)}$ ceea ce duce la rezultatul:

$$\left(\frac{z}{z_0}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{1+\frac{k+1}{2k}\cdot\frac{i_0}{z_0}}{2}$$

$$\left(\frac{i}{i_0}\right)_{man} = \frac{\left(1+\frac{2k}{k-1}\frac{z_0}{i_0}\right)^2}{4\frac{2k}{k-1}\frac{z_0}{i_0}}$$

Se remarcă, în consecință, că realizarea unei camere de ardere de secțiune constantă limitează posibilitățile de dezvoltare a regimului termic.

VI. Treapta mașinii rotative

In cazul unei trepte de turbine, relațiile de calcul pot fi redate în forma:

	Ajutaje	Palete
Conservarea energiei	$i_1 + z_1 = i_0 + z_0$	$AL = i_1 + z_1 - (i_2 + z_2)$
Continuitatea	$\left(\frac{i_1}{i_0}\right)^{\frac{2}{k-1}} \frac{z_1}{z_0} = \left(\frac{f_0}{f_1}\right)^2$	$\left(\frac{i_2}{i_1}\right)^{\frac{2}{k-1}} \frac{z_2}{z_1} = \left(\frac{f_1}{f_2}\right)^2$
Condiții geometrice	$\left(\frac{f_1}{f_0}\right)^2 = \sin^2\alpha_1$	$\left(\frac{f_2}{f_1}\right)^2 = \frac{1}{\sin^2\alpha_1}$

Din aceste relații se pot elimina valorile referitoare la stare între ajutaje și palete (1), obținîndu-se:

$$AL = i_0 + z_0 - (i_2 + z_2)$$

$$\left(\frac{i_2}{i_0}\right)^{\frac{2}{k-1}} \cdot \frac{z_2}{z_2} = 1$$

Deoarece două ecuații cu trei necunoscute (i_1, z_2, AL) nu sînt suficiente pentru definitivarea soluției, este nevoie de o privire asupra con-

diţiilor de curgere prin ajutaje şi palete, redate în forma triunghiurilor de viteze :

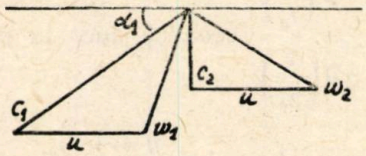


Fig. 3

Schema redată caracterizează curgerea cu pierderi minime ($C_{2\,min}$) şi permite întocmirea a două ecuaţii suplimentare :

$$i_1 + \frac{Aw_1^2}{2g} = i_2 + \frac{Aw_1^2}{2g}$$

$$w_2^2 - w_1^2 = 2uc_1 \cos\alpha_1 - (c_1^2 - c_2^2)$$

din care, prin eliminarea vitezelor relative, rezultă :

$$i_1 + z_1 - (i_2 + z_2) = \frac{A}{2g} 2uc_1 \cos\alpha_1 = AL$$

Pentru concretizarea problemei se poate introduce noţiunea gradului de reacţiune :

$$\varrho = \frac{i_1 - i_2}{i_0 - i_2}$$

întrebuinţată frecvent în calculele clasice.

Lăsînd laoparte analiza amănunţită a problemelor ce decurg din relaţiile de mai sus, ne vom limita numai la determinarea condiţiilor de optimizare pentru o treaptă. Se obţine :

$$\varrho = \frac{\frac{u}{c_1} \cdot 2z_1 \cos\alpha_1 - z_1 + z_2}{\frac{u}{c_1} \cdot 2z_1 \cos\alpha_1 - z_0 + z_2}$$

respectiv pentru raportul adimensional $\frac{u}{c_1}$

$$\frac{u \cos\alpha_1}{c_1} = \frac{1}{2(1-\varrho)} - \frac{z_2 + \frac{\varrho}{1-\varrho} z_0}{2z_1}$$

Cazul particular $Z_2 = Z_0$ este caracterizat prin condiţiile de optimizare :

$$\frac{u}{c_1 \cos\alpha_1} = \frac{1}{2(1-\varrho)}$$

$$AL = \frac{\cos^2\alpha_1}{1-\varrho} z_1$$

VII. **Mașina (turbină, compresor) cu Z trepte**

Reprezentarea evoluției în diagrama *i/s* nu redă în suficientă măsură

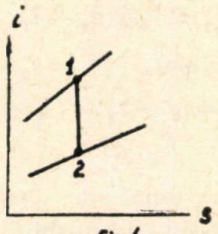


Fig. 4

fenomenele interne care se petrec în mașină.

Reprezentarea fenomenului în diagrama *i/z* este mult mai concludentă :

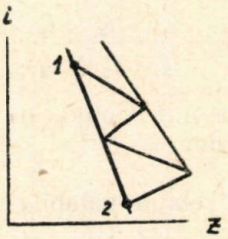


Fig. 5

deoarece indică atît aspectul termic (variația i), cît și cel gazodinomic (variația *z*), permițînd în consecință a se trage concluzii asupra problemelor de dimensionare, legate de viteză (*c*) de energia cinetică (*z*).

VIII. **Instalația cu turbină cu gaze** (itg)

Din reprezentarea comparativă a ciclului itg în diagramele *i/s* și *i/z*

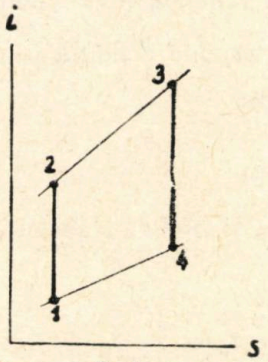


Fig 6

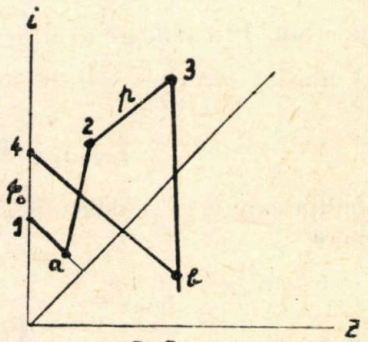


Fig 7

se observă influenţa energiei cinetice (z) asupra fenomenelor din ciclul ideal.

Elementele de calcul pentru ciclu sînt:

$$AL_1 = i_2 + z_2 - i_1$$

$$AL_2 = i_3 + z_3 - i_4$$

$$Q = i_3 + z_3 - (i_2 + z_3)$$

unde s-a notat:

AL_1 ... lucrul mecanic consumat de compresor;

AL_2 ... lucrul mecanic produs în turbină.

Pentru randamentul ciclului ideal rezultă:

$$\eta = \frac{AL_2 - AL_1}{Q}, \text{ respectiv}$$

$$\eta = 1 - \frac{i_4 - i_1}{i_3 - i_2 + z_3 - z_2}$$

se remarcă faptul că randamentul depinde nu numai de entalpiile punctelor caracteristice ($i_1 \ldots i_4$) dar şi de vitezele gazului înainte şi după camera de ardere (Z_2, Z_3).

Dacă se ţine seama de relaţia valabilă pentru foarte multe cazuri:

$$i_1 i_3 = i_2 i_4$$

care poate fi dedusă cînd $i = \varphi(p) \cdot \psi(s)$ expresia pentru randament va avea forma:

$$\eta = 1 - \frac{i_1/i_2}{1 + \dfrac{z_3 - z_2}{i_3 - i_2}}$$

Atunci cînd $z_3 = z_2$; $\eta = 1 - \dfrac{i_1}{i_2}$ forma clasică a randamentului ciclului ideal fără recuperare. In cazul general se poate determina condiţia pentru randamentul maxim din $\dfrac{\partial \eta}{\partial' _2} = 0$ de unde rezultă

$$i_3 - i_2 = \sqrt{i_3 (z_2 - z_3)}$$

adică condiţia care este satisfăcută cînd $z_3 < z_2$ şi cînd randamentul maxim are valoarea

$$\eta_{max} = 1 - \frac{i_1/i_3}{\left(1 - \sqrt{\dfrac{z_2 - z_3}{i_3}}\right)^2}$$

În legătură cu *itg* se pot face următoarele observații :

1. Limitele constructive de funcționare ale *itg* sînt date de T_{max} care influențează i_3 , f_{max} care afectează z_a, z_2, z_3, z_t și σ_{max} care cu u_{dat} și $\frac{c}{u}$ determinat pentru condițiile optime îngrădește valorile z_{max} .

2. Se pot introduce în mod formal randamentele compresorului (η_1), turbinei (η_2) și camerei de ardere (η_3), care includ în ele pierderile în mașină prin conducte și în recuperator, și cu ajutorul cărora se poate optimiza ciclul *itg* real.

3. Remarcînd că în ciclu se produc transformările energetice duble :

$$\underbrace{c \longrightarrow p}_{\text{compresor}} \underbrace{\longrightarrow c}_{\text{turbină}}$$

care sînt legate de pierderi, se poate preconiza eleminarea sau micșorarea acestor pierderi prin folosirea camerelor de ardere tangențiale, care folosesc direct viteza de ieșire a aerului din compresor și debitează gazul cu energia cinetică ridicată din camera de ardere direct pe paletele turbinei.

IX. Racheta

Notînd cu u viteza rachetei, iar cu w viteza relativă de curgere a fluidului prin rachetă, bilanțul energetic poate fi exprimat sub forma :

$$\frac{Au^2}{2g} + Q = AL + \underbrace{\frac{A(u-w)^2}{2g} + i}_{\text{pierderi}} \quad \underbrace{\qquad\qquad}_{\text{mecanice termice}}$$

cu completarea pentru mișcarea relativă :

$$Q = i + \frac{Aw^2}{2g}$$

Definiția randamentului în acest mod devine simplă :

$$\eta = \frac{AL}{\frac{Au^2}{2g} + Q}$$

iar lucrul mecanic util produs de 1 kg de fluid precum și forța de impuls se calculează automat din relațiile energetice :

$$L = \frac{uw}{g}$$

$$F = \frac{w}{g}$$

Reprezentarea grafică a fenomenului din rachetă în diagrama *i/z* este simplă

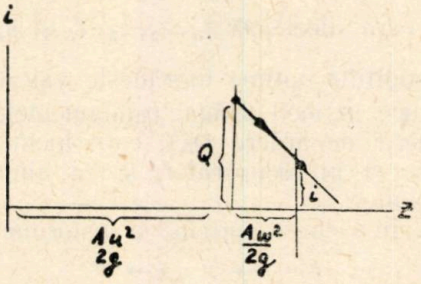


Fig. 8

Mişcarea rachetei este dirijată de relaţia :

$$m\frac{du}{dt} = F' = -\frac{dm}{dt}\cdot w$$

respectiv :

$$mdv + wdm = 0$$

ceea ce ,în forma integrală, duce la :

$$u = w\ ln\frac{m_0}{m}$$

unde m_0 este masa iniţială a rachetei.

Randamentul se poate scrie în mod explicit sub forma :

$$\eta = \frac{2\frac{w}{u}}{\left(\frac{w}{u}\right)^2 + 1 + \frac{2gi}{Au^2}}$$

Variaţia randamentului cu viteza relativă w, respectiv cu raportul $\frac{w}{u}$ este redată în diagrama :

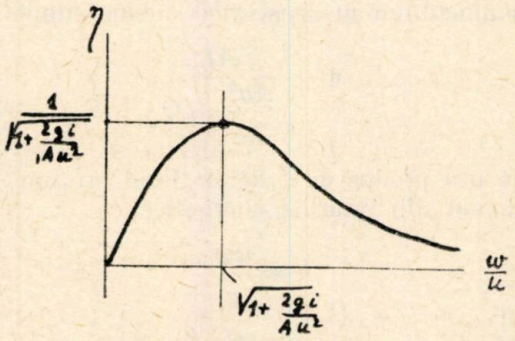


Fig. 9

cu condiția ca pentru randamentul maxim:

$$\frac{w}{u} = \sqrt{1 + \frac{2gi}{Au^2}}$$

iar randamentul maxim va fi:

$$\eta = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{2gi}{Au^2}}}$$

Pornind de la ideia limitărilor constructive (w), se poate exprima variația randamentului cu viteza de deplasare (u):

$$\eta = \frac{2\frac{u}{w}}{\left(\frac{u}{w}\right)^2 + 1 + \frac{2gi}{Aw^2}}$$

În acest caz condițiile de optimizare sînt:

$$\frac{u}{w} = \sqrt{1 + \frac{2gi}{Aw^2}}$$

$$\eta = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{2gi}{Aw^2}}}$$

X. **Pierderile gazo-dinamice**

Pentru a cuprinde pierderile provocate de curgere se poate introduce forma clasică:

$$-Av\frac{dp}{dl} = \frac{\lambda}{d_h} \cdot z$$

ceea ce însă este de combinat cu condițiile suplimentare:

$$dQ' = di - Avdp$$

$$di + dz = 0$$

$$Avdp = \frac{k-1}{k} i\left(\frac{di}{i} - \frac{1}{2}\frac{dz}{z} - \frac{df}{f}\right)$$

Se obțin următoarele rezultate:

$$\frac{dQ'}{dl} = \frac{\lambda}{d_h} z - \frac{dz}{dl}$$

$$\frac{di}{ez} = i\left(\frac{1}{2z}\frac{dz}{dl} + \frac{1}{f}\frac{df}{dl}\right) + \frac{k}{k-1}\frac{\lambda}{d_h} z$$

Automat, apare o pierdere mai mare la curgerea frînată $\left(\frac{dz}{dl}<0\right)$ față de cea accelerată $\left(\frac{dz}{dl}>0\right)$ ceea ce explică randamentele mai scăzute ale compresoarelor față de turbine.

Notînd $\frac{dz}{dl}=\alpha$ rezultatul poate fi scris în forma:

$$i=(z^{1/2}f)^{\alpha}\left[C+\frac{k}{k-1}\frac{\lambda}{d_h}\int\frac{zdz}{(z^{1/2}f)^{\alpha}}\right]$$

Cazurile particulare $df=0$, $\alpha=0$ duc la următoarele rezultate:

$$i=c_1 z^{\alpha/2}+\frac{1}{2-\frac{\alpha}{2}}\frac{k}{k-1}\frac{\lambda}{d_h}z^2$$

$$i=c_2+\frac{1}{2}\frac{k}{k-1}\frac{\lambda}{d_h}z^2,$$

unde c, c_1, c_2 sînt constante de integrare.

Ținînd seama de fenomenele termice și gazo-dinamice, se obțin o serie de rezultate, care permit o analiză mai clară a mașinilor termice. Aplicațiile cercetate duc la cîteva consecințe importante în ceea ce privește îmbunătățirea randamentului mașinilor rotative. Folosirea diagramei de calcul i/z lărgește posibilitățile de perfecționare a ciclurilor instalațiilor cu mașini termice.

Catedra de cazane și mașini termice
Institutul politehnic București

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC BUCUREȘTI
Tomul XXVI — 1964, Fascicola 2

C.Z. 621.43.043

ASPECTUL POLISTADIAL AL PERIOADEI DE ÎNTÎRZIERE LA AUTOAPRINDERE, CU REFERIRE LA EXPERIMENTĂRI FĂCUTE PE MOTOARE CU APRINDERE PRIN COMPRIMARE CU CAMERA SEPARATĂ DE TURBULENȚĂ

MIRCEA NĂSTASE

1. În perioada de întîrziere la autoaprindere au loc o serie de procese fizice: pulverizarea, vaporizarea și amestecarea combustibilului cu aerul din camera de ardere și de procese chimice legate de autoaprinderea amestecului de combustibil și aer. Toate aceste procese se suprapun, acționează unul asupra altuia și constitue în esență un proces unic.

Rolul proceselor fizice și al proceselor chimice și modul cum au loc în perioada de întîrziere la autoaprindere au fost probleme foarte controversate, încă de la începutul studierii funcționării motoarelor cu aprindere prin compresiune. Există păreri contradictorii asupra importanței proceselor fizice sau chimice și asupra mecanismului lor de desfășurare în perioada de întîrziere la autoaprindere.

În ultimul deceniu, pe baza studiilor făcute, mai ales, în condiții experimentale deosebite: bombe, motoare cu compresie rapidă, monocilindrii special amenajați, s-a cercetat natura proceselor din perioada de întîrziere la autoaprindere.

O largă răspîndire o are astăzi teoria polistadială a autoaprinderii. Această teorie a fost elaborată în condițiile unor medii omogene.

Experiențele făcute de Semenov, Basevici, Voinov, Gardner, Levedahl și alții, au arătat că, în cazul amestecurilor omogene, procesul de autoaprindere este o suită de procese chimice, cu formare de produși intermediari, care la rîndul lor reacționează. S-au distins în timpul întîrzierii la autoaprindere, arderea cu flacără rece, arderea cu flacără albastră și, în fine, arderea cu flacără caldă.

În cadrul reacțiilor care au loc în camerele de ardere ale motoarelor cu aprindere prin compresiune, această teorie trebuie extinsă și în același timp localizată.

Autoaprinderea unui combustibil injectat într-un mediu comprimat și încălzit, are loc după ce în prealabil s-au parcurs o serie de etape, ce con-

diționează perioada de întîrziere la autoaprindere. O primă etapă a perioadei de întîrziere la autoaprindere, o considerăm crearea unui amestec omogen-aer-combustibil, într-o anumită regiune a camerei de ardere, cu un dozaj corespunzător, pentru declanșarea primelor reacții chimice. Durata acestei faze depinde de timpul necesar ca o anumită cantitate de combustibil să ajungă fin pulverizată în regiunea respectivă și de timpul necesar evaporării și amestecării combustibilului cu aerul înconjurător. A doua fază a procesului de autoaprindere o constitue reacțiile de ardere, care conduc la formarea așa numitei flăcări reci. În fine, ultima fază este determinată de arderea cu flacără rece în zona sau în zonele respective din camera de ardere și de formarea produșilor chimici capabili, ca în noile condiții de dozaj, să reacționeze și să ia naștere reacția propriu-zisă, cu flacără caldă.

2. Cu ajutorul unei instalații electronice de oscilografiere s-a determinat perioada de întîrziere la autoaprindere, în condițiile unui motor cu cameră separată de turbulență, pentru diferite condiții de funcționare ale motorului.

Pentru concretizarea rolului diferitelor procese din perioada de întîrziere la autoaprindere, este interesant de urmărit influența temperaturii și turbulenței din camera separată de turbulență și a naturii combustibilului.

Influența temperaturii din camera de ardere a fost determinată, luînd în considerare: influența modificării sarcinii, (a cantității de combustibil injectate) — a avansului la injecție și a temperaturii aerului aspirat în motor [3].

Se știe că temperatura din camera de turbulență variază în timpul ciclului, după o lege similară legii de variație a presiunii.

Într-un punct al ciclului de funcționare a motorului se constată o repartizare foarte neuniformă a temperaturii, datorită turbulenței existente în camera separată de turbulență, prezenței unor surse de încălzire sau de răcire a amestecului etc.

Astfel, temperatura este foarte diferită, în camera de ardere, atît în timp, cît și în volumul camerei.

In aceste condiții s-a determinat pe cale analitică, pornind de la presiunea determinată pe curba oscilografiată, temperatura medie din volum, din momentul considerat.

In fig. 1 și 2 sînt date diagramele de variație a perioadei de întîrziere la autoaprindere funcție de temperatura T_1, din momentul cînd începe injecția, în coordonatele τ, T_1 și respectiv $l_g \tau$, $10^{-3}/T$.

Din examinarea diagramelor se observă:

a) Creșterea temperaturii din camera de ardere conduce la scăderea perioadei de întîrziere la autoaprindere.

b) Legea de variație a perioadei de întîrziere la autoaprindere nu poate fi exprimată printr-o lege de tipul $\tau = c_1 \, e^{\frac{c_2}{T}}$ decît pentru anumite regimuri de funcționare ale motorului determinate de regimul de temperatură care domnește în camera de ardere. Există, în regimul de temperatură cercetat, doi coeficienți c_2, unul valabil pentru temperaturi relativ ridicate și altul pentru temperaturi relativ scăzute.

c) Perioada de întîrziere la autoaprindere nu poate fi redusă oricît prin creșterea temperaturii din camera de ardere.

Există o mărime situată în regiunea temperaturilor ridicate sub care nu poate fi coborîtă perioada de întîrziere la autoaprindere.

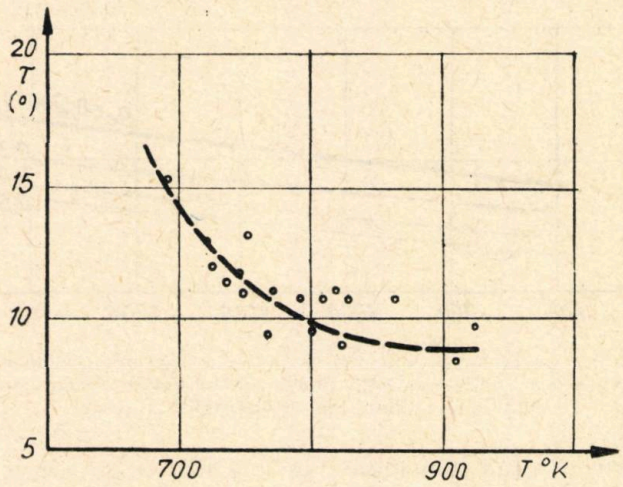


Fig. 1. Dependența perioadei de întîrziere la autoaprindere de temperatura medie din camera de turbulență a motorului D-36 M, din momentul începerii injecției în coordonate τ T.

Temperatura acționează asupra proceselor chimice, întotdeauna într-un singur sens: de a le activa, deci de a reduce perioada de întîrziere la autoaprindere.

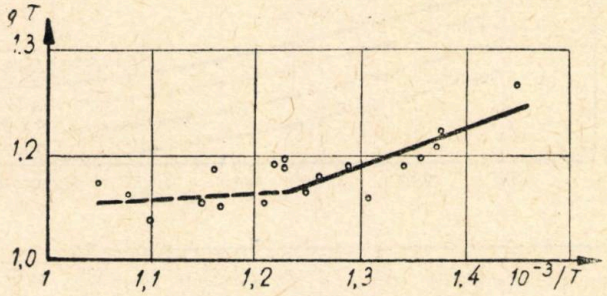


Fig. 2. Dependența perioadei de întîrziere la autoaprindere cu temperatura medie din camera de turbulență a motorului D-36 M, din momentul începerii injecției, în coordonate lg. τ, $10^{-3}/T$.

Procesele fizice premergătoare proceselor chimice sînt mai puțin influențate de temperatură. Există o perioadă de întîrziere la autoaprindere minimă, care nu mai poate fi influențată de temperatură, ca urmare a independenței relative a proceselor fizice de acest factor.

Prin urmare, în procesul de autoaprindere joacă un rol egal, și procesele fizice și procesele chimice. În funcție de condițiile din camera de ardere se poate considera că perioada de întîrziere la autoaprindere este

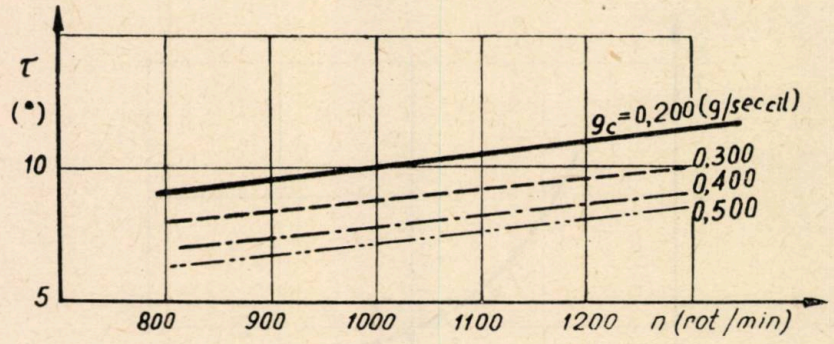


Fig. 3. Dependența perioadei de întîrziere la autoparpindere τ, măsurată în milisecunde, în funcție de turația motorului, pentru diferite cantități de combustibil injectate.

delimitată într-un grad mai mare sau mai mic de procesele fizice sau de procesele chimice, neputîndu-se spune însă că poate fi afectată numai unei categorii de procese.

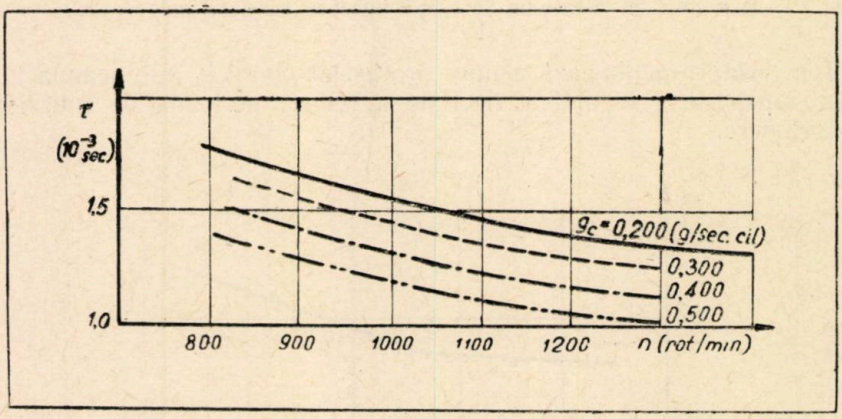


Fig. 4. Dependența perioadei de întîrziere la autoaprindere τ, măsurată în grade de rotație ale arborelui cotit, în funcție de turația motorului *n* pentru diferite cantități de combustibil injectate.

Turbulența aerului din camera separată de turbulență a fost pusă în evidență prin modificarea vitezei de rotație a motorului și a arhitecturii camerei de turbulență.

La o turație mai mare a motorului, turbulența aerului din camera separată de turbulență este mai ridicată, ca urmare a deplasării în uni-

tatea de timp, a unui volum mai mare de aer din camera propriu-zisă în camera separată de turbulență.

In figurile 3 și 4 se prezintă rezultatele obținute pe motor, perioada de întîrziere la autoaprindere fiind măsurată în milisecunde și în grade de rotație ale arborelului cotit.

Se observă, urmărind diagramele trasate, că perioada de întîrziere la autoaprindere măsurată în milisecunde scade cu viteza de rotație a motorului.

Influența turației motorului asupra perioadei de întîrziere la autoaprindere se datorește în afară de modificarea turbulenței din camera separată de turbulență și varierii pierderilor de căldură prin pereții cilindrului și ai camerei separate de turbulență, turației pompei de injecție, presiunii și regimului termic din camera de ardere.

La o turație a motorului mai mare, în camera de ardere se intensifică cedarea de căldură de la fluid la pereții camerei, ca urmare a creșterii turbulenței aerului. In același timp cu mărirea turației motorului, fluidul din camera de ardere este mai puțin timp în contact cu pereții camerei de ardere. Din acest punct de vedere pierderile de căldură sînt mai reduse.

La o turație a motorului mai mare, numărul de cicluri pe unitatea de timp este mai mare. Regimul termic și de presiune din camera de ardere este mai ridicat. Măsurătorile făcute arată o creștere a presiunii din camera separată de turbulență, prin ridicarea turației motorului de la 800 rot/min. la 1335 rot/min., cu 6—7 kgf/cm^2.

Mărirea turației pompei de injecție îmbunătățește finețea de pulverizare.

Analiza parametrilor indicați, care influențează în sensuri contradictorii perioada de întîrziere la autoaprindere, arată că influența lor este limitată, inferioară influenței directe a turbulenței aerului asupra perioadei de întîrziere la autoaprindere și este în general îndreptată în sensul creșterii regimului termic și de presiune din camera de ardere.

Prin modificarea arhitecturii camerei separate de turbulență s-a urmărit de asemenea influența turbulenței asupra perioadei de întîrziere la autoaprindere.

Pentru estimarea turbulenței din camera separată de turbulență, în literatură este definit un parametru „grad de turbulență" care ține seama de influența modificării turației motorului, prin relația :

$$\xi = \frac{\omega_t}{\omega} = \frac{W_t}{\omega R_t}$$

unde :

ξ — gradul de turbulență ;

ω_t, W_t — viteza unghiulară și viteza periferică a aerului în camera separată de turbulență ;

ω — viteza unghiulară a arborelui cotit ;

R_t — raza camerei separate de turbulență, cînd aceasta are o formă sferică.

Pentru explicitarea relației de mai sus, în condițiile experimentale date, s-a determinat mărimea W_t făcîndu-se următoarele ipoteze :

— în camera separată de turbulență mișcarea aerului are loc conform legii vîrtejului turbionar ;

$$WR = W_t R_t = K$$

unde :

W — viteza unei anumite molecule de aer, din camera separată de turbulență,

R — raza la care se găsește molecula de aer de viteză W, față de centrul vîrtejului,

K — constantă.

Cercetări experimentale efectuate și prezentate în literatură [1] arată că ipoteza propusă, pentru formele sferice ale camerelor separate de turbulență și pentru faza de compresiune, — pînă în momentul autoaprinderii combustibilului — exprimă suficient de exact realitatea.

— În camera de ardere, aerul dislocuit de piston, se repartizează uniform în camera din fața pistonului și în camera separată de turbulență. Experimental se constată o diferență de presiune între camera din fața pistonului și camera separată de turbulență de 2—3 atm.

— Momentul cinetic al aerului din camera separată de turbulență M_t este egal cu momentul cinetic M_k al aerului care intră în camera de turbulență pînă la momentul considerat.

Se găsește relația :

$$\xi = \frac{\pi}{720} \frac{r V_k}{f_k} \frac{1}{R_t^2} \int_{\alpha_0}^{\alpha} \Phi^2(\alpha)\, d\alpha.$$

unde :

r — raza camerei separate de turbulență la care este tangent axul canalului de legătură (fig. 5),

V_k — volumul camerei separate de turbulență,

f_k — secțiunea minimă a canalului de legătură.

$$\Phi(\alpha) = \frac{\sin\alpha + \frac{\lambda}{2}\sin 2\alpha}{\frac{1}{\varepsilon - 1} + \frac{1}{2}\left[1 - \cos\alpha + \frac{\lambda}{4}(1 - \cos 2\alpha)\right]}$$

α — unghiul la care se află arborele față de punctul mort superior, în momentul considerat,

α_0 — unghiul corespunzător închiderii supapei de admisie.

În cursul experimentărilor făcute s-au modificat parametrii f_k și r, și forma camerei de turbulență, prin crearea unui prag, în partea inferioară a camerei separate de turbulență [4].

Pe baza experiențelor se prezintă în fig. 6 variația perioadei de întîrziere la autoaprindere în funcție de variația gradului de turbulență, pentru trei excese de aer.

Analizînd diagramele trasate se observă că, odată cu creșterea gradului de turbulență, perioada de întîrziere la autoaprindere ,scade, oricare ar fi coeficientul mediu de exces de aer.

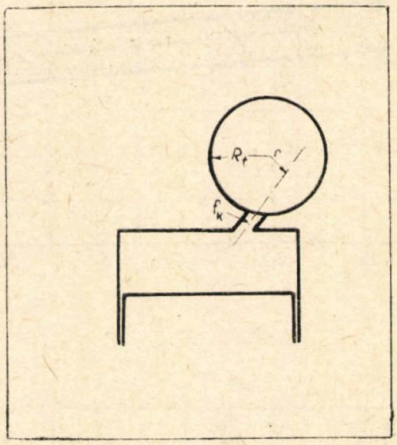


Fig. 5. Schema camerei de ardere a unui motor cu cameră separată de turbulență.

În condițiile funcționării motorului cu camera cu prag, perioada de întîrziere la autoaprindere are o valoare mult inferioară oricărei alte camere — cu aproximativ 20% mai mică decît față de camera care are același grad de turbulență și același număr de canale de legătură, dar nu cu prag.

Pe baza valorilor măsurate, s-a trasat pentru aceste camere separate de turbulență, cu aproximativ același grad de turbulență (29—35), dependența perioadei de întîrziere la autoaprindere funcție de f_k și respectiv r, pentru trei coeficienți de exces de aer, în fig. 7 și 8.

Diagramele prezentate arată că ambii parametri, prin creșterea lor, măresc perioada de întîrziere la autoaprindere.

Influența turbulenței asupra perioadei de întîrziere la autoaprindere se concretizează prin modificarea proceselor fizice, care, după cum s-a arătat, sînt relativ slab influențate de temperatură în regimurile temperaturilor ridicate.

Din cercetarea proceselor fizice: pulverizarea, evaporarea, difuzia și amestecarea vaporilor combustibili cu aerul din mediul înconjurător, se constată, pe baza studiilor prezentate de diferiți autori [2,5] că procesele care durează cel mai mult sînt difuzia și amestecarea vaporilor de combustibil cu aerul.

O turbulență mai puternică a aerului accelerează formarea unor amestecuri locale cu dozaj corespunzător reacțiilor chimice din diferitele stadii de oxidare a hidrocarburilor.

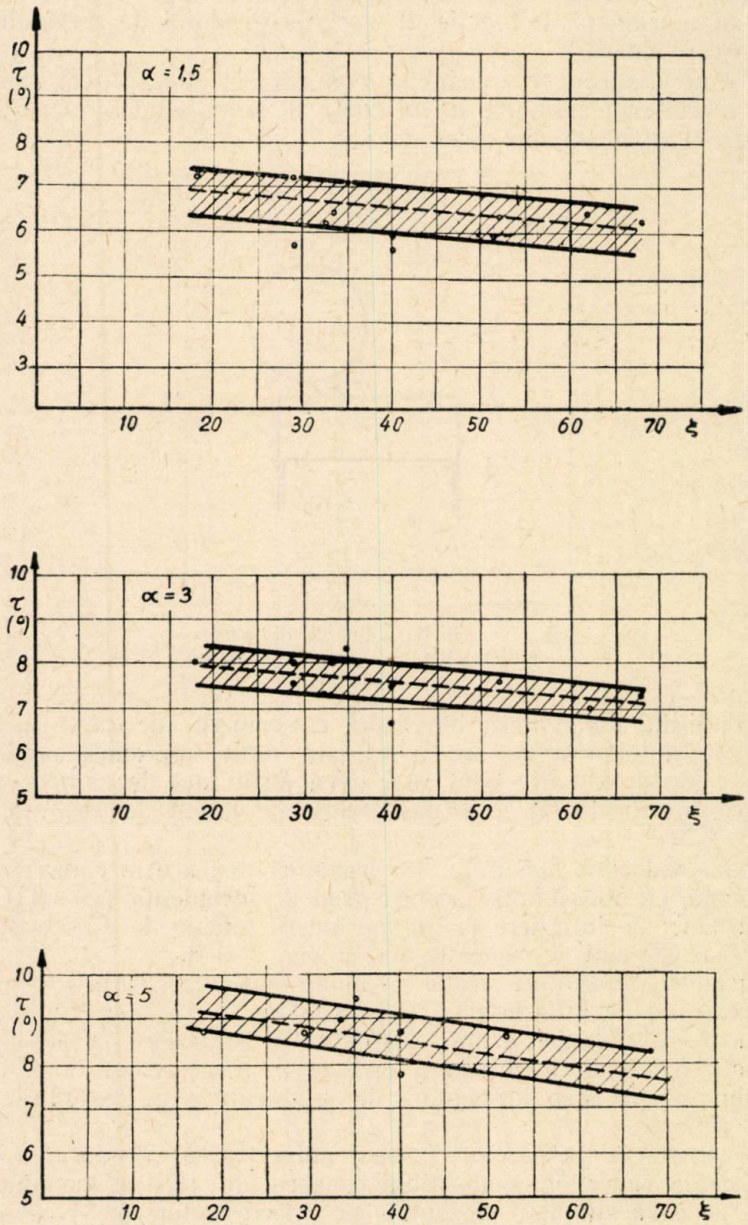


Fig. 6. Dependența perioadei de întîrziere la autoaprindere τ, cu gradul de turbulență ξ pentru 3 coeficienți medii de exces de aer α.

a. coeficientul mediu de exces de aer $\alpha = 1{,}5$
b. coeficientul mediu de exces de aer $\alpha = 3$
c. coeficientul mediu de exces de aer $\alpha = 5$.

În felul acesta se explică influențele constatate ale turației, ale formei și poziției secțiunii de scurgere între cele două părți componente ale camerei de ardere și a formei camerei separate de turbulență.

Astfel, prezența pragului, prin lovirea de el a curentului turbionar, intensifică turbulența aerului din camera separată de turbulență.

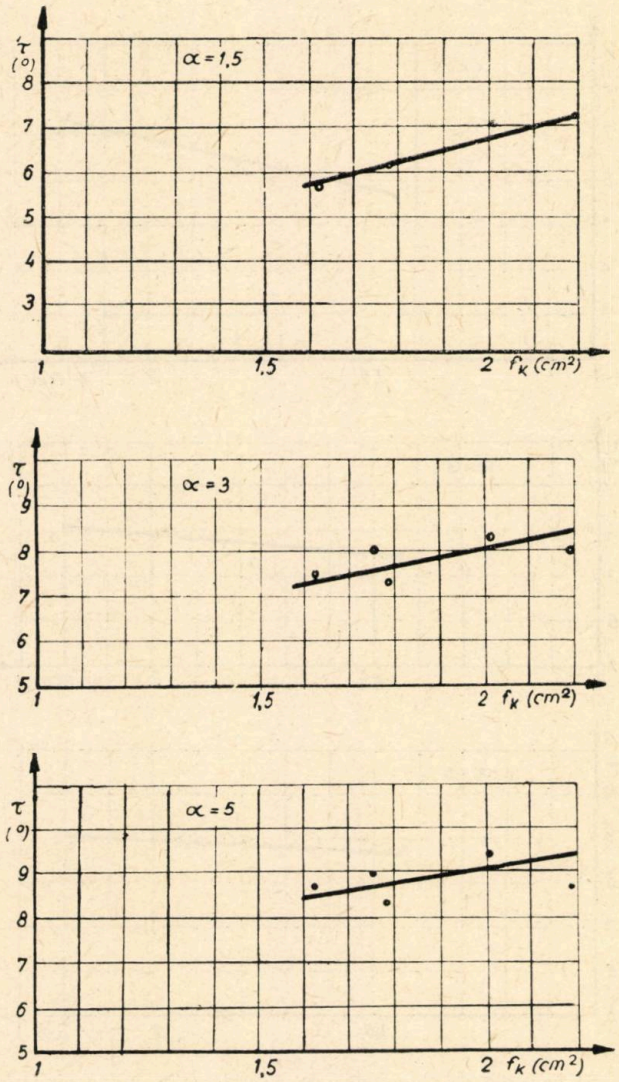


Fig. 7. Dependența perioadei de întîrziere la autoaprindere τ de secțiunea canalului de legătură f_k a camerei separate de turbulență, pentru 3 coeficienți medii de exces de aer α.

a. coeficientul mediu de exces de aer $\alpha = 1{,}5$
b. coeficientul mediu de exces de aer $\alpha = 3$
c. coeficientul mediu de exces de aer $\alpha = 5$.

De asemenea reducerea secțiunii de scurgere între cele două părți ale camerei de ardere, favorizează crearea unei mișcări mai dezordonate, deci mai turbulente a aerului în camera de turbulență.

In fine, dacă aerul intră după raze mai mari în camera separată de turbulență, probabilitatea creării unui vîrtej turbionar, cu o mișcare diri-

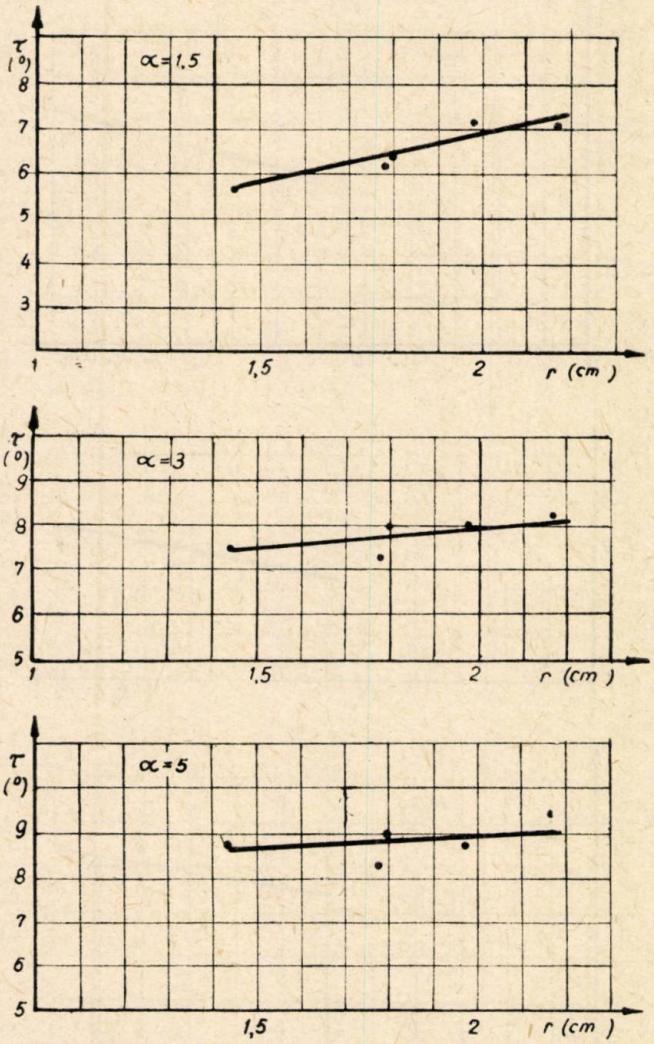


Fig. 8. Dependența perioadei de întîrziere la autoaprindere τ cu raza camerei separate de turbulență *r*, la care este tangent axul canalului de legătură pentru trei coeficienți medii de exces de aer α.

a. coeficientul mediu de exces de aer $\alpha = 1{,}5$
b. coeficientul mediu de exces de aer $\alpha = 3$
c. coeficientul mediu de exces de aer $\alpha = 5$.

jată a curentului de aer, mai puțin turbulentă, în camera separată de turbulență, este mai mare

In fig. 9 sînt prezentate rezultatele obținute pe același motor, în condițiile funcționării lui cu motorină, petrol și combustibil de calorifer.

Analiza chimică a combustibililor arată că motorina are mai multe hidrocarburi parafinice și mai puține aromate decît combustibilul de calo-

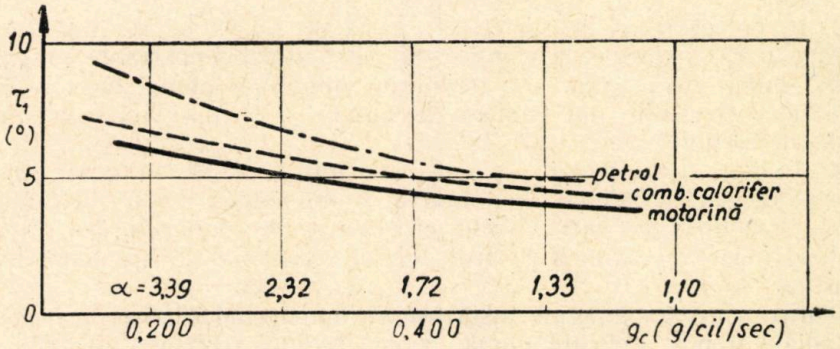


Fig. 9. Influența naturii combustibilului asupra perioadei de întîrziere la autoaprindere τ.

rifer și prin urmare — o cifră cetanică mai ridicată. — Reacțiile au loc cu viteze mari de oxidare, deci perioadele de întîrziere la autoaprindere sînt mai reduse la funcționarea cu motorină decît la funcționarea cu combustibil de calorifer.

Analiza comparativă a hidrocarburilor petrolului față de motorină nu este edificatoare. Se constată că petrolul are mai multe parafine, dar și mai multe naftene decît motorina. Din acest punct de vedere rezultă că vitezele reacțiilor chimice sînt apropiate, sau orientîndu-ne după indicele Diesel-54 în cazul motorinei, 60 în cazul petrolului — petrolul ar trebui să aibă perioade de întîrziere mai mici — contrar rezultatelor experiențelor.

Și în acest caz, rezultatele obținute, arată importanța proceselor fizice în perioada de întîrziere la autoaprindere.

Cercetînd greutatea specifică a combustibililor, se observă că petrolul are o greutate specifică mai mică, deci o penetrație mai scăzută, o finețe și o viteză de vaporizare mai mare decît în cazul motorinei.

Studii prezentate în literatură, [6] în această direcție, au arătat că pentru a realiza o autoaprindere cît mai rapidă nu este necesară o finețe de puverizare cît mai bună. Există un diametru mediu optim al picăturilor de combustibil, care depinde de condițiile de presiune, temperatură și turbulență din camera de ardere, corespunzătoare unei perioade minime de întîrziere la autoaprindere. Un combustibil prea fin vaporizat, cu o viteză de vaporizare ridicată, se transformă imediat în vapori. Aceștia, datorită turbulenței se dispersează și se atinge mai greu concentrația minimă de combustibil, necesară declanșării reacțiilor chimice.

De asemenea fineți prea bune, conduc la penetrații ale jetului de lichid reduse, amestecarea combustibilului cu aerul fiind proastă.

3. Concluzii

1. Se constată, din analiza efectuată, caracterul complex, polistadial, al proceselor fizico-chimice care au loc în perioada de întîrziere la autoaprindere. Aceste procese au viteze diferite, dacă sînt diferite condițiile în care au loc.

2. În procesele de autoaprindere joacă un rol la fel de important și procesele fizice și procesele chimice. Se diferențiază importanța pe care o are un anumit tip de proces — fizic sau chimic — numai dacă se ia în considerare, condițiile din camera de ardere — temperatura, presiunea, turbulența aerului, etc.

3. Analiza dependenței perioadei de întîrziere la autoaprindere de temperatură, de turbulența din cameră și de natura combustibilului, ne duce la concluzia că mecanismul proceselor din perioada de întîrziere la autoaprindere, se explică pe baza teoriei polistadiale a aprinderii hidrocarburilor.

Pentru a avea o imagine justă asupra autoaprinderii, teoria aprinderii polistadiale trebuie aplicată numai pentru regiuni restrînse, în care apar primii nuclei de flacără.

Luînd în considerare întreaga cameră de ardere sau chiar regiuni mai întinse ale camerei de ardere, toate fazele au loc în mod simultan, suprapunîndu-se și influențîndu-se reciproc.

Regiunile cele mai favorabile autoaprinderii, din punct de vedere al formării dozajului corespunzător și necesar declanșării reacțiilor chimice se află în vecinătatea picăturilor de combustibil injectate.

Poziționarea unei anumite regiuni, în interiorul camerei de ardere în care se produce întreaga gamă de reacții fizico-chimice necesare autoaprinderii nu poate fi definită. Aceste regiuni diferă de la un ciclu la altul și practic sînt în orice parte a camerei de ardere.

Catedra de termotehnică
Institutul politehnic București

BIBLIOGRAFIE

1. *H. P. Briling:* Bîstrohodnîe dizeli — Mașghiz 1951, Moscova.
2. *I. Tolstov:* Contribuții la teoria procesului de funcționare a unui motor rapid cu aprindere prin compresiune — Dvigateli c vosplameneniem ot sjatia — Mașghiz 1951.
3. *M. Năstase:* Contribuții la studiul experimental al întîrzierii la autoaprindere prin comprimare. Studii și cercetări de energetică X 2/1960.
4. *M. Năstase:* Contribuții la studiul perioadei de întîrziere la autoaprindere în motoarele cu aprindere prin compresiune. Influența arhitecturii camerei separate de turbulență. Studii și cercetări de energetică Seria B — XII nr. 1/1962.

5. *A. I. Serbinov:* Roli fiziceskih i himiceskih proţessov pri samovos — plamenenii raspîlennogojidkogo topliva (Sgoranie v transportnîh porşnevîh dvigateliax) Izd. Ak. Nauk SSSR Moscova 1951.

6. *F. M. Gardner, G. H. Grigg:* Pre-flame reaction in Diesel engines (IV) J. Institute of Petroleum — 43 (1957) No. 400.

7. *I. I. German:* Vliianie raspîlivania na vosplamenenie i sgoranie dizelinogo topliva. Issledovanie raspîlivania gorenia dizelinogo topliva NAMI 87, Maşghiz, 1959.

8. *W. Lewedahl:* Multistage Autoignition of Engine Fuels-Fifth Symposium on Combustion — Baltimore 1955.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC BUCUREȘTI
Tomul XXVI — 1964, Fascicola 2

C.Z. 621.512 : 621.3.017

CERCETAREA EXPERIMENTALĂ A PALETAJULUI COMPRESORULUI AXIAL, PROFILAT CU CONSIDERAREA PIERDERILOR DE ENERGIE *

GUȚĂ CRACIUN

In ultima vreme problema creerii turbinelor cu gaze staționare, de mare putere, preocupă tot mai intens pe oamenii de știință din diferite țări ale lumii. Astfel numărul turbinelor cu gaze introduse în exploatare, a căror putere instalată depășește 25.000 kW este destul de mare. De remarcat că în Uniunea Sovietică, Elveția, Anglia și S.U.A. se lucrează asiduu la proiectarea și construcția turbinelor cu gaze de puteri instalate depășind 100.000 iar în U.R.S.S. chiar 200.000 kW. Desăvîrșirea unei asemenea instalații conține în sine, cu necesitate, rezolvarea unor probleme tehnice destul de complicate, cum ar fi:

a) Elaborarea de materiale rezistente vreme îndelungată la temperaturi ridicate;

b) Studiul compresoarelor axiale de înaltă presiune, al căror paletaj se preia forțe mari, rezultate din scurgerea aerodinamică în jurul acestuia.

c) Studiul injecției, aprinderii și arderii combustibilului la presiuni înalte de 50 atm. și mai mult.

d) Găsirea schemelor optime de răcire a paletelor și rotorului turbinei cu gaze.

Rezolvarea acestor probleme cere sforțări comune a întregi colective de cercetători, cunoașterea profundă, intimă, a progreselor și fenomenelor gazodinamice ce au loc la trecerea curentului prin paletajul turbinei cu gaze. Este evident că de aici rezultă în egală măsură, necesitatea cercetării teoretice și experimentale a aerodinamicii compresorului axial și turbinei cu gaze.

Existența unei serii de particularități în scurgerea curentului printr-o rețea circulară de profile, face nu numai să avem o deosebită distribuție a vitezelor și presiunilor în lungul paletei, dar, implicit influențează la mărimea pierderilor de energie.

In legătură cu aceasta prezintă interes studiul fenomenului fizic de apariție a pierderilor de energie, structura acestora, cu deosebire în cazul rețelelor de profile cu palete de mică alungire relativă, pentru care pierderea de energie la extremități este destul de intensă.

* Lucrare comunicată la sesiunea științifică a cadrelor didactice din Institutul politehnic București, 22—23 februarie 1964.

În cazul paletelor de mică alungire, curentul nu mai poate fi studiat ca bidimensional, ci trebuie avut în vedere caracterul său spațial.

În creerea compresoarelor axiale de înaltă presiune, prezintă interes studiul paletajelor de mică alungire cu scopul de a perfecta caracteristicile lor aerodinamice și ale aplica practic.

Problema îmbunătățirii regimului de lucru a profilelor în rețea conduce cu necesitate, la studiul multilateral al parametrilor aerodinamici și geometrici ai acestora și mai ales la studiul stratului limită ce se formează pe palete și în zonele de capăt, unde există o interacțiune între acesta și cel format pe pereții înconjurători.

Studiului stratului limită format pe paletele turbomașinilor i-au fost consacrate multe lucrări: [1], [5], [6], [7], [8], [10], [4], [11[și altele.

Lucrarea de față constituie, în felul său, o continuare pe un plan superior a cercetărilor ce se fac cu rețelele plane de profile.

Ea este consacrată studiului influenței asupra caracteristicilor rețelei circulare de profile, a doi factori de bază și anume:

1. Metoda de profilare, și
2. Alungirea paletei.

Pentru aceasta paletele au fost profilate în două ipoteze:

a) După legea constantei circulației [12] pe rază.

$\Gamma = 2\pi C_u r = \text{const}$, unde C_u este componenta tangențială a vitezei, iar r = raza curentă.

b) Profilarea cu considerarea pierderilor de energie pe rază [2].

În cazul ambelor variante de profilare au fost alese trei alungiri relative.

$$\bar{h} = \frac{h}{b} = 0{,}35 \ , \ 0{,}52 \text{ și } 1{,}04$$

h — înălțimea paletei, b — coarda profilului.

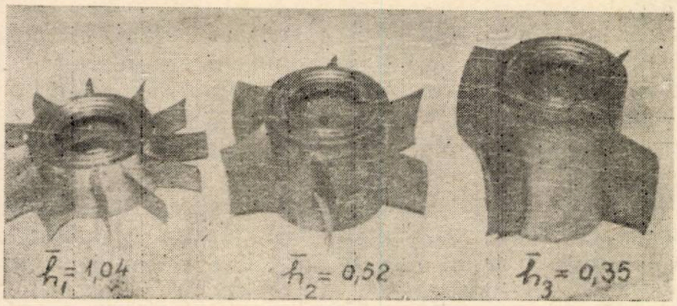


Fig. 1. Rețelele de profile, proiectate după legea $\Gamma = \text{const}$.

Geometria paletajelor profilate după legea constanței circulației se vede în fig. 1, iar a paletelor profilate cu considerarea pierderilor de energie în fig. 2.

Deosebirea de bază între caracteristicile rețelelor plane de profile și circulare constă în mișcarea ce ia naștere în cazul ultimelor, de-alungul paletelor în stratul limită datorită forțelor centrifuge și formării la capete, a zonelor de pierderi secundare mult mai intense. Deoarece alungirea relativă a paletelor compresoarelor axiale de înaltă presiune se preconizează

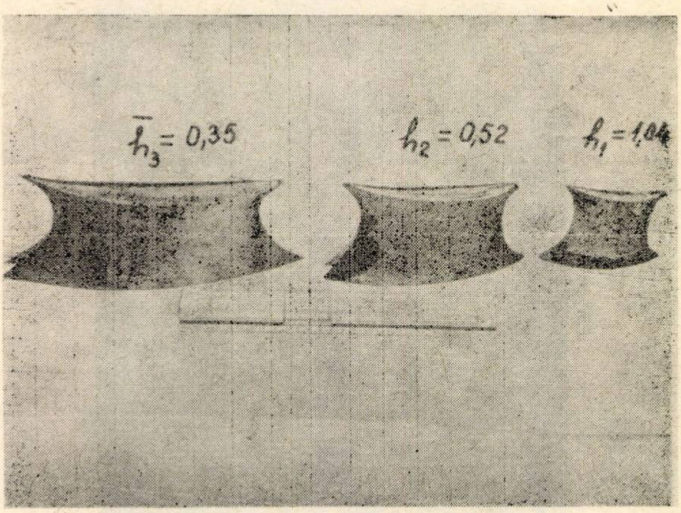


Fig. 2. Palete profilate cu considerarea pierderilor de energie în lungime.

a fi mică, o mare parte din lungimea paletei va fi cuprinsă de zonele de pierderi secundare, care în acest caz depășesc pierderile datorită formei profilului și frecării fluidului de palete (pierderile de bază).

În acest sens folosirea datelor rezultate din experimentarea pachetelor plane de profile este insuficientă și introduce erori în determinarea parametrilor geometrici și aerodinamici ai rețelei circulare de profile. Acești parametri constituie punctul de plecare în alegerea și distribuția pe rază (în lungul paletei) a coeficientului de portanță și deci a unghiului de incidență al curentului, față de profil.

1. Instalația experimentală.

Metoda de experimentare determină în bună parte valoarea practică și teoretică a rezultatelor obținute. În afara compresorului experimental, care reprezintă un mijloc sigur de determinare a caracteristicilor rețelei de profile, un rol important îl are și experimentarea statică a paletajelor circulare. În cazul nostru a fost folosită ultima metodă de cercetare, iar instalația respectivă se vede în fig. 3. Instalația experimentală constă dintr-un tunel aerodinamic cu axă orizontală, unit cu bacul vertical, care are rolul de uniformizare a curentului.

Ca aparate de măsură au fost folosite sonde multiple pentru determinarea vitezei și presiunii în secțiunile alese. Din fig. 4 se vede că aceste secțiuni sînt mai dese către capetele paletei, acolo unde pierderile secundare de energie sînt mai mari.

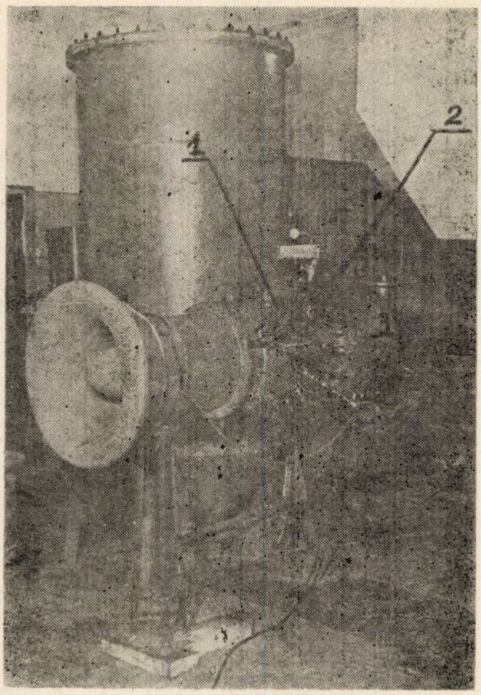


Fig. 3. Instalația pentru experimentarea paletajelor circulare statice.
1. Sondă pentru măsurarea presiunii și vitezei în fața paletajelor.
2. Sondă pentru măsurarea presiunii și vitezei la ieșirea din paletaj.
3, 4. Sonde pentru măsurarea în stratul limită.

Cu alte sonde speciale, fig. 5, dotate cu indicator de coordonate, s-a măsurat parametrii curentului în stratul limită format pe butucul rotorului și pe carcasă.

Sondele au fost tarate, (instalația este arătată în fig. 6) obținîndu-se curbele de tarare în funcție de unghiul de incidență al curentului față de sondă și de viteza acestuia. Curbele de tarare obținute folosesc pentru prelucrarea datelor experimentale, a determinării presiunii totale și statice precum și a vitezei, atît în fața paletajului, cît și după.

Distribuția de presiuni și viteze în canalul dintre două palete, sau pe întreaga periferie a paletajului, ne dă structura acelui curent în secțiunea aleasă (fig. 8—10).

Cunoscînd structura curentului înainte și după o rețea de profile, ne putem da seama de eficacitatea acesteia, de pierderile de energie ce au

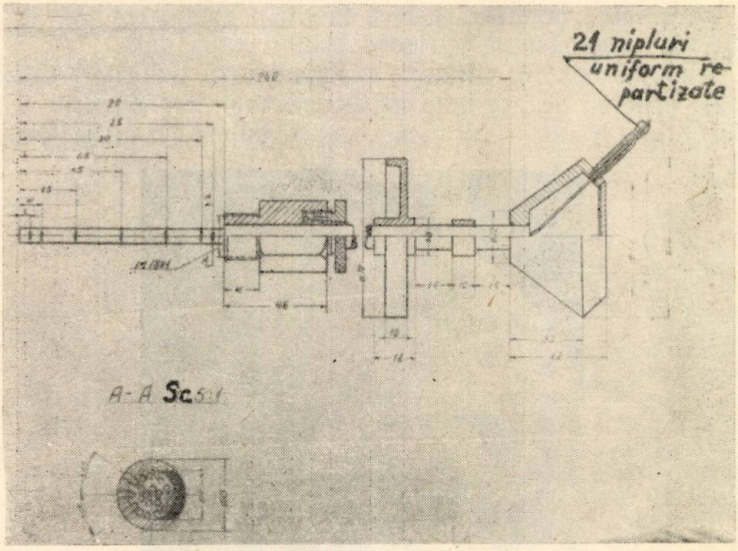


Fig. 4. Sondă multiplă pentru măsurarea parametrilor curentului în spatele paletajului.

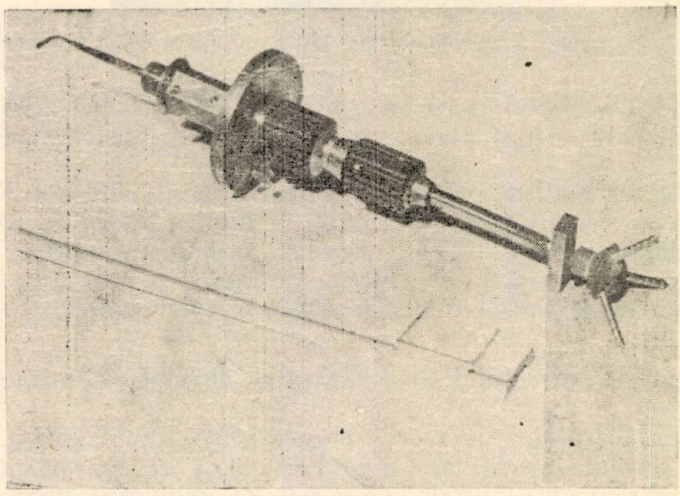


Fig. 5. Sondă pentru măsurarea parametrilor curentului în stratul limită.

loc prin traversarea acesteia și deci, implicit, de finețea profilelor respective, adică de randamentul scurgerii prin rețeaua dată.

De remarcat că în timpul experiențelor, datorită vitezelor mici ($M \leqslant 0{,}12$) căderea de presiune în tuburile multimanometrului diferențial a fost de ordinul (100—150) mm, ceea ce impune o citire foarte precisă

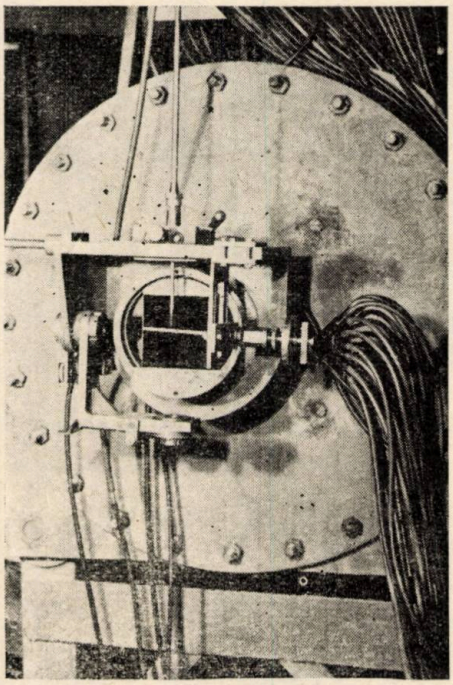


Fig. 6. Instalația de tarare a aparatelor de măsură.

a indicațiilor, cu considerarea grosimii liniei de diviziune a nivelului respectiv al lichidului în tuburi și de asemeni cu considerarea meniscului acestuia.

Aceasta s-a realizat făcînd citirile respective cu ajutorul microscopului universal. De remarcat că indicațiile multimanometrului. (avînd peste 100 de tuburi) au fost ridicate prin fotografiere, asigurînd în acest fel același regim de înregistrare pentru toate aparatele de măsură, precum și un timp minim de funcționare a instalației experimentale.

2. Structura curentului după aparatul director de intrare.

In fața aparatului director scurgerea este axial simetrică. Aparatul director are rolul de a devia curentul astfel ca în fața paletajului mobil, acesta să aibe o direcție dată, de-a asigura unghiurile necesare de incidență ale curentului (față de direcția tangentei la linia scheletului în bordul de atac al profilului).

Aparatul director este format din arce de grosime constantă (3 mm), avînd forma scheletului profilului de bază (NACA—65(15). Curbura scheletului în lungul razei și lungimea corzii au fost determinate din condiții de circulație constantă în lungul paletei.

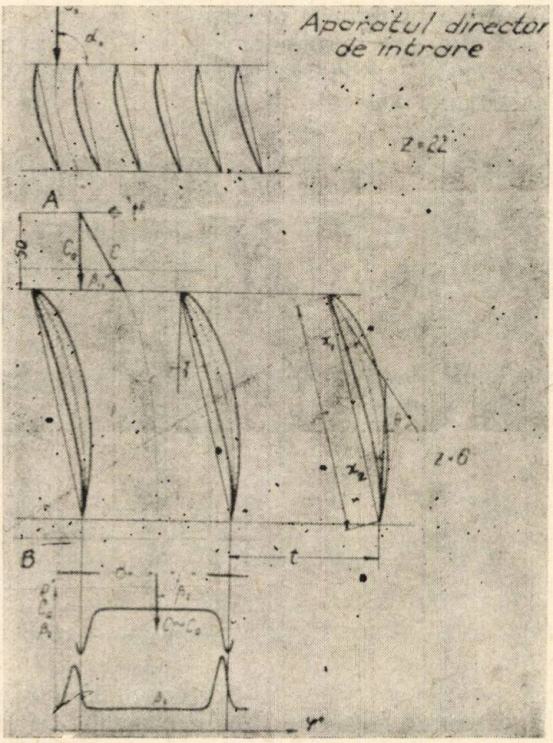


Fig. 7. Schema scurgerii prin rețeaua de profile.

Schema măsurătorilor este arătată în fig. 7.

Prelucrarea datelor experimentale a permis obținerea distribuției de presiuni, viteze (modul și direcție) în fața paletajului sub forma unor curbe asemănătoare celor din fig. (8—10).

Din analiza acestor curbe rezultă marea însemnătate pe care o are în profilarea paletajului compresorului, alegerea unghiului de așezare a profilului în paletaj (unghiul de instalare ξ) și de asemeni unghiul de intrare a curentului în paletaj (β_1).

Astfel, pentru valoarea optimă a pasului relativ $\bar{t} = \frac{t}{b}$ mărimea unghiului de instalare a profilului duce la micșorarea pierderilor datorite lungimii finite a paletelor, deoarece se mărește unghiul de deviere (δ) al curentului la trecerea prin paletaj. Se constată experimental, în cazul paletajelor de mare desime relativă, că cu creșterea unghiului ξ, pier-

derile secundare cresc, din cauza concentrării liniilor de curent care duce la un schimb intens de energie între straturile de fluid în mișcare .

De asemeni prin variația unghiului de intrare β_1 se schimbă esențial distribuția de presiuni pe profil ceea ce duce la o scurgere transversală în stratul limită și prin urmare modificarea gradientului de presiune în canalul dintre două palete. Prezența gradientului radial de presiune atrage după sine schimbări ale caracteristicilor paletajelor circulare statice față de cele plane. De asemeni în cazul paletajelor circulare avem o schimbare continuă a formei canalului cu raza.

3. Structura curentului spațial la ieșirea din paletajul mobil.

A determina structura curentului la ieșirea din paletaj înseamnă a determina în fiecare punct al canalului: presiunea totală, fig. 8 presiunea statică, viteza absolută, fig. 10 cu componentele și direcția sa fig. 10. De aceea țelul principal al experiențelor a constat din determinarea acestora, după două direcții perpendiculare, în secțiunea de ieșire din paletaj (fig. 7).

Cu datele determinate experimental se pot calcula pierderile locale de presiune totală, după formula:

$$\zeta = \frac{p_1^* - p_2^*}{p_1^*} \tag{1}$$

unde

$$p_1^* = \frac{1}{t}\int_0^t p_{01}^*\, dt \quad ; \quad p_2^* = \int_0^t p_{02}^*\, dt \tag{2}$$

iar p_{01}^*, p_{02}^* presiunile totale curente din secțiunile A și B, de măsură (fig. 7).

În baza fig. 8—10 se pot trage cîteva concluzii parțiale :

a) Distribuția presiunii totale în direcția pasului rețelei, se schimbă cu depărtarea de raza medie, unde lățimea urmei aerodinamice și căderea de presiune totală, au valori minime.

b) O mare neuniformitate a unghiurilor de ieșire a curentului din rețea se observă în zona apropiată pereților înconjurători ,unde interacțiunea straturilor limită este maximă, fapt ce se resfrînge asupra mărimii pierderilor locale de sarcină.

Curentul la intrare în paletajul activ s-a obținut omogen, întrucît unghiurile de atac sînt apropiate de valoarea optimă, și ca urmare lățimea urmei aerodinamice este relativ mică.

4. Influiența alungirii relative a paletelor asupra pierderilor în rețeaua circulară de profile.

De remarcat că în cazul paletelor de mică alungire relativă, influența cuplului de vîrtejuri care scapă pe la extremități, duce la modificarea caracterului scurgerii, care nu mai este axial-simetric. In acest caz liniile de curent nu mai au forma unor curbe elicoidale, așezate pe cilindru (deci absența componentei radiale a vitezii) ci au o formă mai

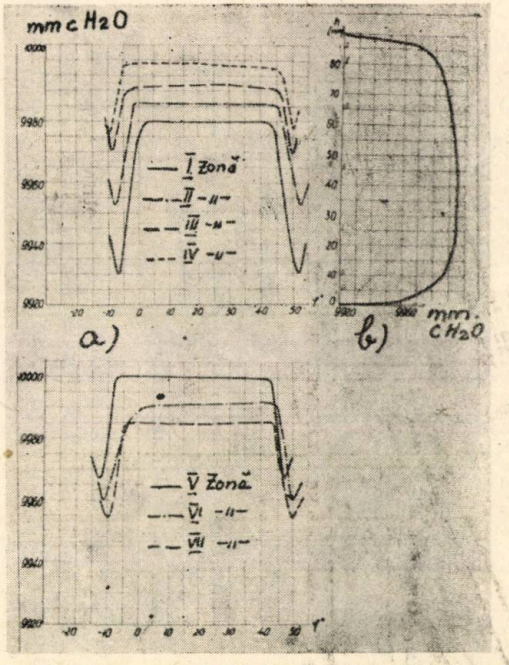


Fig. 8. Distribuția de presiuni în lungul pasului (*a*) și razei (*b*) pentru paletajul de alungire $\bar{h} = 0{,}52$, profilat cu considerarea pierderilor de energie.

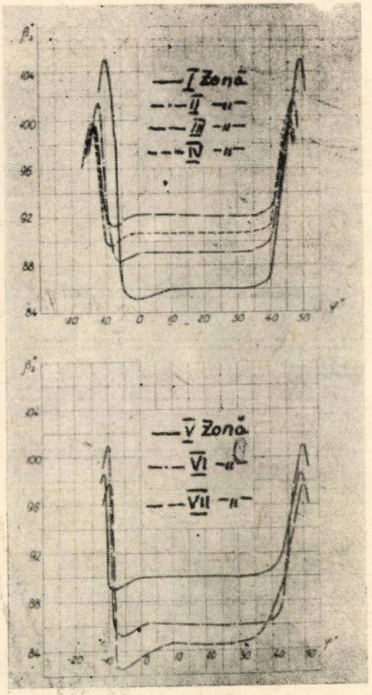


Fig. 9. Distribuția vitezei absolute în lungul pasului pentru același paletaj.

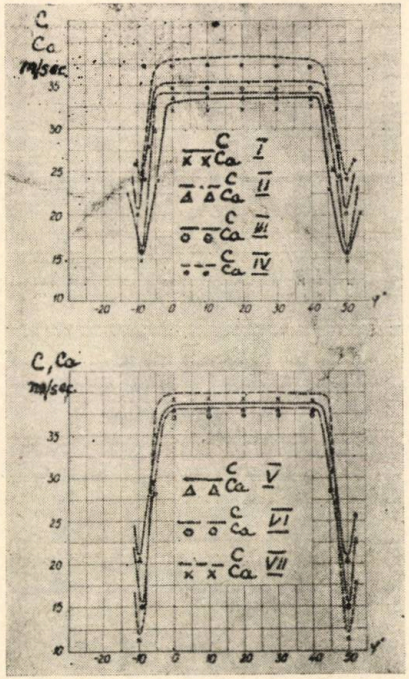


Fig. 10. Distribuția unghiului de ieșire a curentului din paletaj.

complicată. Acest caracter este datorit fenomenelor aerodinamice de interacțiune din apropierea extremităților paletelor.

Se pune problema : care trebuie să fie alungirea relativă minimă astfel ca la raza medie, să avem scurgere axial-simetrică ,sau ceea ce este același lucru, plană ?

Generalizînd multe rezultate experimentale obținute cu paletaje de turbine, cercetătorul sovietic Scnari N. A. (9) din Leningrad, a stabilit următoarea relație :

$$\bar{h}_{min} = 1 - \frac{2}{3} E_{u2} \tag{3}$$

unde :

$E_{u2} = \dfrac{\Delta p}{\frac{\varrho}{2} C^2}$ este numărul lui Euler la ieșirea din paletaj.

Pentru valori ale numărului Mach, $M \leqslant 0{,}3$ valoarea numărului Euler se exprimă prin formula :

$$E_{u2} = 1 - \left(\frac{\sin \beta_2}{\sin \beta_1}\right)^2 \tag{4}$$

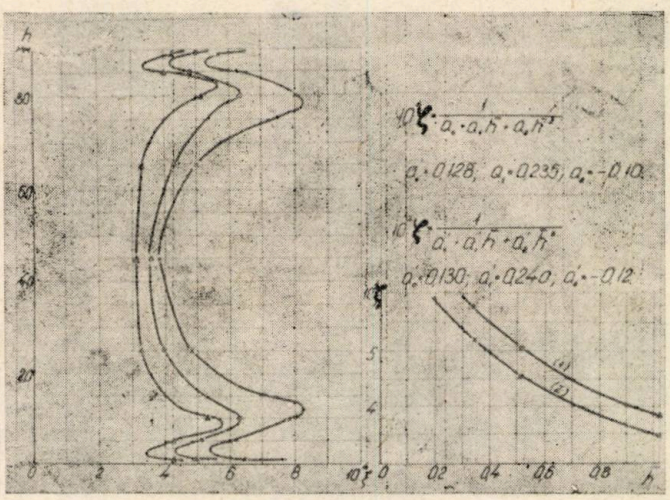


Fig. 11. Distribuția pierderilor de energie pentru paletajele proiectate după legea $\Gamma = \text{const.}$

Δ — $\bar{h} = 1{,}04$ Curba (1) reprezintă $\xi = f(h)$ pentru $\Gamma = \text{const.}$

o — $\bar{h} = 0{,}52$ Curba (2) în cazul considerării

x — $\bar{h} = 035$ pierderilor de energie.

In cazul rețelelor de profile studiate, se obține $\bar{h}_{min} = 1{,}22$ ceea ce arată că toate paletajele studiate vor fi influiențate la raza medie, de caracterul spațial al scurgerii, care se propagă dinspre periferie și butuc, spre centru.

În fig. 11 se vede că cu cît alungirea relativă este mai mică, cu atît zona centrală a paletelor este afectată mai mult de caracterul spațial al scurgerii care se materializează prin creșterea pierderilor de energie.

Judecînd după curbele din fig. 11 se vede că avem patru zone caracteristice ale scurgerii spațiale și anume:

a) Zona pierderilor mari (prin frecare) din apropierea pereților.

b) Zona pierderilor relativ mici, condiționată printre altele de o depresiune ce ia naștere din interacțiunea celor două straturi limită, formate pe pereți și palete.

c) Zona pierderilor mari, care, în general, cu mici deplasări, corespunde cu nucleul cuplului de vîrtejuri ce ia naștere și care, ca și în cazul aripii de anvergură finită, se deplasează spre infinit aval.

d) Zona micilor pierderi situată la mijlocul paletelor.

În fig. 11 sînt reprezentate curbele de pierderi de energie pentru cazul profilării paletelor după legea constanței circulației și alungirile relative 0,35, 0,52 și 1,04. În dreapta, prin curba (1) sînt reprezentate valorile medii ale acestor pierderi în funcție de alungire.

Curba (2) reprezintă pierderile, pentru aceleași alungiri, însă paletele profilate cu considerarea pierderilor de energie pe înălțime. Se vede că în acest caz, pentru aceeași alungire pierderile sînt mai mici.

Prin generalizarea rezultatelor obținute se stabilește relația funcțională care ne dă dependența dintre pierderile de energie și alungire, sub forma:

$$\zeta = \frac{1}{a_0 + a_1 \bar{h} + a_2 \bar{h}^2} \tag{5}$$

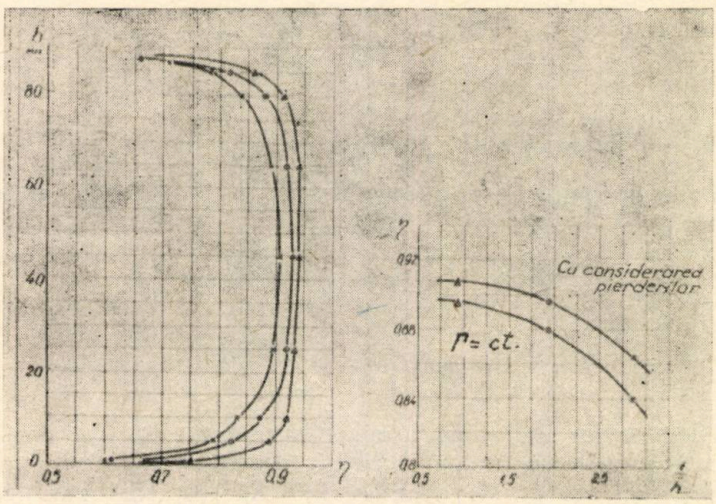


Fig. 12. Distribuția randamentului paletajelor profilate după legea constanței circulației.

$\Delta - \bar{h} = 1{,}04$ $\quad o - \bar{h} = 0{,}52$ $\quad x - \bar{h} = 0{,}35$

Aceasta arată că în cazul paletajelor circulare, pierderile nu mai sînt date de o formulă de tipul:

$$\zeta = \frac{1}{a + d\bar{h}} \tag{6}$$

stabilită de Bunimovici A. I. [3] pentru paletaje plane, în care ζ este invers proporțional cu $\bar{h}$ ci de o formulă în care dependența este dată de o curbă de ordin superior (5).

In fig. 12 sînt reprezentate randamentele acelorași palete pentru care au fost determinate pierderile din fig. 11.

Se vede că randamentul paletajelor proiectate cu considerarea pierderilor pe rază este mai ridicat, ceea ce era și de așteptat, pierderile corespunzătoare (fig. 11) dreapta, fiind mai mici.

Astfel se vede de exemplu, că este mai avantajos a întrebuința asemenea palete cu alungirea relativă 0,5 decît palete profilate după legea constanței circulației, cu alungirea 1,0.

Aceasta înseamnă că obținem randamente comparabile pentru alungiri mult mai mici, ceea ce arată necesitatea aplicării acestora în cazul instalațiilor de turbine cu gaze de mare putere, unde forțele aerodinamice care acționează asupra paletelor au mărimi considerabile.

5. Compararea rezultatelor experimentale obținute, cu cele teoretice.

In general, cunoscînd cîmpul presiunilor statice și vitezelor în două secțiuni din fața și din spatele unei rețele de profile, se poate determina randamentul acesteia, cu formula:

$$\eta_r = \frac{p_2 - p_1}{\frac{\varrho}{2}(C_1^2 - C_2^2)} \tag{7}$$

Coeficientul de finețe ale profilului este dat de: $K = \frac{C_z}{C_x}$ unde C_z — coeficientul de portanță al profilului iar C_x — coeficientul de rezistență la înaintare.

$$C_z = 2\left(\frac{t}{b}\right)(\operatorname{ctg}\beta_1 - \operatorname{ctg}\beta_2)\sin\beta_m \tag{8}$$

$$C_x = 2\left(\frac{t}{b}\right)\frac{\Delta p^* \sin\beta_m}{\varrho\, C_m^2} \tag{9}$$

După cum se știe din teoria aripii, determinarea lui C_x este laborioasă chiar în cazul unui profil izolat, de aceea în cazul rețelelor de profile vom folosi formula (9) care este semiteoretică, Δp^*, β_m, C_m fiind determinate experimental.

Cu acestea, dacă punem:

$$C_a = C_m \cos\beta_m,$$

C_a fiind componenta vitezii medii după axa tunelului, vom avea pentru coeficientul de finețe:

$$K = \frac{\varrho C_a^2 (\operatorname{ctg}^2 \beta_1 - \operatorname{ctg}^2 \beta_2)}{\Delta p^* \sin 2\beta_m} \tag{10}$$

în formula (10)

$$\Delta p^* = p_1^* - p_2^* ,$$

iar

$$\beta_m = \operatorname{arc\,ctg} \frac{\operatorname{ctg} \beta_1 + \operatorname{ctg} \beta_2}{2} \tag{11}$$

Trecînd peste unele transformări, se poate scrie relația (7) sub forma:

$$\eta_r = 1 - \frac{2}{K \sin 2\beta_m} \tag{12}$$

Pe de altă parte, cunoscînd valorile presiunii statice și totale în secțiunile susamintite și folosind diagrama procesului în coordonate i-s, se poate deduce formula:

$$\eta = 1 - \frac{1}{1 - K_1} \tag{13}$$

unde:

$$K_1 = \frac{p_1 - p_2}{p_1^* - p_2^*} .$$

Făcînd calculele cu ajutorul formulelor (12), (13), pentru paletajul cu $\bar{h}=0{,}52$, proiectat cu considerarea pierderilor de energie găsim:

Tabel nr. 1

Zona de măsură	I	II	III	IV	V	VI	VII
Distanța față de perif. în mm	5	10	25	45	65	80	85
(η) exp.	0,834	0,878	0,9157	0,934	0,924	0,898	0,836
(η) după (12)	0,8524	0,865	0,907	0,924	0,913	0,902	0,865

Cum se vede în tabelul 1, valorile randamentului determinate experimental și cu formula (12) se deosebesc într-o mică măsură (nu mai mult de 1% pentru secțiunile aflate către centrul paletei).

În zonele apropiate pereților, deoarece în formula (12) caracterul spațial al scurgerii nu este luat în considerație, diferențele oscilează între (3—5)%, fiind mai mari la paletajele de mică alungire relativă.

Concluzii.

1. Necesitatea considerării distribuției reale de viteze în lungul razei, la profilarea paletajelor. Aceasta duce la obținerea de palete mai complicate (coarda crește simțitor în apropiere de pereții înconjurători, datorită influenței stratului limită format pe aceștia și caracterului scurgerii).

2. Randamentele paletajelor profilate cu considerarea pierderilor de energie se obțin mai mari cu aproximativ 2,5% decît ale paletajelor similare, proiectate după legea constantei circulației. Aceasta din cauza optimalizării scurgerii în jurul paletajelor și deci micșorării pierderilor de energie.

3. A fost determinată valoarea minimă a alungirii relative, pentru care la raza medie, scurgerea încă mai păstrează caracterul axial-simetric.

4. A fost stabilită o dependență de ordin superior (5) între pierderile de energie și alungire mult mai apropiată de realitate decît dependența de invers-proporționalitate.

5. Aplicarea paletajelor de mică alungire relativă influențează favorabil asupra gabaritului și greutății turbinelor cu gaze de mare putere.

6. Necesitatea continuării cercetării paletajelor de mică alungire pentru o gamă mai largă de viteze (Numere Mach), pentru punerea în evidență a efectelor de compresibilitate, asupra randamentului acestora.

Catedra de construcții aeronautice
Institutul politehnic București

BIBLIOGRAFIE

[1] *Avduevschi V. S.* — „Rascet trehmernogo pogranicinogo sloia na linii rastecania", Izvestia Acad. Nauc SSSR, Mehanica i Masinostroenie, 1962, nr. 1.

[2] *Becnev V. S.* — „Issledovanie stupeni ocevogo compressora, sprofilirovannoi s ucetom poteri po radiusu", Teploenerghetica, 1961, nr. 1.

[3] *Bunimovici A. I.* — „Issledovanie obtecania compressornîh reșetoc pri malom udlinenii lopatoc", Moscova, 1958.

[4] *Eckert B.* — „Osevîe i țentrobejnîe compressorî „Mașghiz, 1959.

[5] *Gucasova E. A.* — „Prostranstvennîi potoc v lopatocinîh reșetcah i conțevîe poteri", în cartea „Aerodinamicescoe soverșenstvovanie lopatocinîh apparatov turbin", GEI, 1960.

[6] *Loițianschi L. G.* — „O dvijenii jidcosti v pogranicinom sloe vblizi linii peresecenia dvuh ploscostei" Trudî Țaghi, 1936, Vîpusc 279.

[7] *Loițianschi L. G.* — „Vzaimodeistvie pogranicinîh sloev", Trudî Țaghi, 1936, Vîpusc 249.

[8] *Marcov N. M.* — „Rascet haracteristic lopatocinogo apparata turbomașin“ Mașghiz, 1953.

[9] *Scnari N. A.* — „Osnovî modelirovania aerodinamiceschih proțessov v lopatocinîh reșetcah turbin“, în cartea: „Aerodinamicescoe soverșenstvovanie lopatocinîh apparatov turbin‘ G.E.I. 1960.

[10] *Stepanov G. Iu.* — Naumova L. G. „Issledovanie prostranstvennogo pogranicinogo sloia na ploscoi torțevoi stenche mejlopatocinogo canala“, Trudî instituta Baranova Nr. 305.

[11] *Schlihting H.* — „Teoria pogranicinogo sloia“ I. L. 1956.

[12] *Uvarov V. V.* — „Profilirovanie dlinnîh lopatoc gazovîh i parovîh turbin“ Oboronghiz, 1945.

[13] *Horlock J. H.* — „Axial Flow Compresors“, London, 1958.

[14] *Wu Chyng-Hua* — „Teoria generală a scurgerilor spațiale în turbomașini axiale, radiale și combinate“. Transaction of the A.S.M.E., 1952, Vol. 74, Nr. 8.

[15] *Wu Chyng-Hua* — „The aerodynamic problem of radially long blades in turbomachines“, Chinese Journal of Mechanics, 1957, vol. I, No. 1.

[16] Three — Dimensional Flow Theories for Axial Compressors and Turbines, A.D.S. Carter, Proc. Inst. Mech. S., vol. 159, 1949.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC BUCUREȘTI
Tomul XXVI — 1964, Fascicola 2

ELECTROTEHNICA

C.Z. 538.3 : 530.12

ASUPRA INTERPRETĂRII ELECTRODINAMICII MAXWELL—HERTZ ÎN LUMINA TEORIEI RELATIVITĂȚII *

A. TIMOTIN, A. TUGULEA

1. Teoriile macroscopice privitoare la electrodinamica mediilor în mișcare

În fizica prerelativistă singura teorie macroscopică consecvent dezvoltată a fenomenelor electromagnetice în medii în mișcare este aceea datorită lui H. Hertz, care a generalizat, în acest scop, teoria lui Maxwell privitoare la medii în repaus.

Notăm cu S_0 un sistem de referință inerțial, care se găsește în repaus relativ, local și instantaneu, cu punctul considerat al mediului în mișcare (referențialul propriu); cu S sistemul de referință inerțial, la care se raportează vectorii de poziție $\bar{r}(x, y, z)$ momentul t și cîmpul de viteze $\bar{u}(\bar{r}, t)$ ce caracterizează mișcarea mediului; cu $\bar{E}_0$, $\bar{D}_0$, $\bar{B}_0$, $\bar{H}_0$ mărimile de stare locală a cîmpului electromagnetic, definite în cavități imobile (local și instantaneu) în S_0, așa cum se procedează și în cazul mediilor în repaus; cu $\varrho_0, \bar{J}_0, \bar{P}_0, \bar{M}_0$ mărimile de stare locală electromagnetică a corpurilor, definite de asemenea în raport cu S_0.

Cu aceste notații (și evitînd operarea cu conceptul de „eter"), premizele fundamentale ale teoriei lui Hertz pot fi formulate astfel:

I) Nu există vid (spațiu lipsit de substanță — materia corpurilor), chiar dacă în anumite regiuni din spațiu substanța e atît de rarefiată, încît mărimile ei de stare locală electromagnetică pot fi considerate nule. Oricît de rarefiată ar fi substanța, fiecărui punct din spațiu i se poate asocia un punct material (al substanței), cu o stare de mișcare univoc determinată și caracterizată de o viteză $\bar{u}$. Ca urmare, fiecărui punct din

* Lucrare comunicată la sesiune științifică a cadrelor didactice din Institutul politehnic București, 22—23 februarie — 1964.

spaţiu i se poate asocia în mod unic un *referenţial propriu* S_0. În general (medii deformabile), acest referenţial e altul de la punct la punct.

II) Caracterizarea configuraţiei şi mişcării mediului se face în raport cu un referenţial oarecare S. La schimbarea sistemului inerţial de referinţă, transformarea coordonatelor şi a timpului este aceea a cinematicii clasice (transformarea Galilei), în care simultaneitatea e absolută.

III) Caracterizarea locală şi instantanee a stărilor electromagnetice a cîmpului şi a substanţei se face cu ajutorul *mărimilor „proprii"* $\bar{E}_0$, $\bar{D}_0$, $\bar{B}_0$, $\bar{H}_0$, ϱ_0, $\bar{J}_0$, $\bar{P}_0$, $\bar{M}_0$, definite în S_0.

IV) Formele integrale ale legilor generale ale fenomenelor electromagnetice, cunoscute din teoria lui Maxwell pentru medii în repaus, exprimate cu ajutorul mărimilor „proprii" sînt valabile şi în cazul mediilor în mişcare, cu prescripţia ca suprafeţele şi curbele, care intervin în enunţul acestor legi, să fie considerate *ataşate* mediului în mişcare.

V) Legile de material, cunoscute din teoria mediilor în repaus şi formulate cu ajutorul mărimilor proprii, rămîn neschimbate.

Cu aceste premize se obţin, aşa cum se ştie (v. [1]), ecuaţiile Maxwell-Hertz ale teoriei macroscopice a cîmpului electromagnetic.

$$\begin{aligned} &\text{(a) } \operatorname{rot} \bar{H}_0 = \bar{J}_0 + \bar{u}\varrho_0 + \frac{\partial \bar{D}_0}{\partial t} + \operatorname{rot}(\bar{D}_0 \times \bar{u}) \text{ ; (b) } \operatorname{div} \bar{D}_0 = \varrho_0 \\ &\text{(c) } \operatorname{rot} \bar{E}_0 = -\frac{\partial \bar{B}_0}{\partial t} - \operatorname{rot}(\bar{B}_0 \times \bar{u}) \quad \text{; (d) } \operatorname{div} \bar{B}_0 = 0 \\ &\text{(e) } \bar{D}_0 = \varepsilon_0 \bar{E}_0 + \bar{P}_0 \quad \text{; (f) } \bar{H}_0 = \frac{1}{\mu_0}\bar{B}_0 - \bar{M}_0 \end{aligned} \tag{1}$$

în care $\varepsilon_0 = \frac{1}{36\pi} 10^{-9} \frac{\mathrm{F}}{\mathrm{m}}$ şi $\mu_0 = 4\pi 10^{-7} \frac{\mathrm{H}}{\mathrm{m}}$ sînt permitivitatea şi permeabilitatea vidului.

În legătură cu teoria lui Hertz, e util să facem următoarele observaţii :

a) Ecuaţiile Maxwell-Hertz sînt compatibile cu principiul relativităţii, în sensul că ele au aceeaşi formă, în raport cu orice referenţial inerţial — în cadrul cinematicii clasice, fundamentate pe transformarea lui Galilei, respectiv pe caracterul absolut al simultaneităţii.

a) Ecuaţiile Maxwell-Hertz au fost verificate experimental în toate consecinţele lor, privitoare la inducţia electromagnetică, în cazul mediilor în mişcare (cu aplicaţii practice extrem de importante la funcţionarea maşinilor şi aparatelor electrice) şi privitoare la cîmpul magnetic al corpurilor încărcate electric în mişcare (curentul de convecţie). Ele nu au fost verificate experimental în consecinţele lor privitoare la mişcarea corpurilor polarizate electric (de ex. experienţele lui Wilson şi Roentgen-Eichenwald), consecinţe cu o importanţă practică redusă.

c) În cazul mediilor în repaus (ansamblu de corpuri rigide în imobilitate relativă)şi raportînd configuraţia şi mişcarea la referenţialul

propriu S_0, avem $\bar{u} \equiv 0$ și ecuațiile Maxwell-Hertz trec în *ecuațiile lui Maxwell*

$$\left.\begin{array}{ll} \text{(a)}\ \operatorname{rot}_0 \bar{H}_0 = \bar{J}_0 + \dfrac{\partial \bar{D}_0}{\partial t_0}\ ; & \text{(b)}\ \operatorname{div}_0 \bar{D}_0 = \varrho_0 \\ \text{(c)}\ \operatorname{rot}_0 \bar{E}_0 = -\dfrac{\partial \bar{B}_0}{\partial t_0}\ ; & \text{(d)}\ \operatorname{div}_0 \bar{B}_0 = 0 \\ \text{(e)}\ \bar{D}_0 = \varepsilon_0 \bar{E} + \bar{P}_0\ ; & \text{(f)}\ \bar{H}_0 = \dfrac{1}{\mu_0} \bar{B}_0 - \bar{M}_0 \end{array}\right\} \quad (2)$$

integral verificate de experiență. Este, însă, important de subliniat că, în cazul mediilor deformabile în mișcare, dacă *local* $\bar{u}=0$, ecuațiile (1) nu trec în ecuațiile (2), deoarece, în general, div $\bar{u} \neq 0$ și rot $\bar{u} \neq 0$.

În teoria relativistă, teoria macroscopică a fenomenelor electromagnetice a fost dezvoltată de H. Minkowski (v. [2]) pe baza electrodinamicii relativiste a lui A. Einstein, formulată de acesta numai pentru cîmpul electromagnetic microscopic în vid — sau, ceea ce revine la același lucru — pentru cîmpul electromagnetic macroscopic în medii nepolarizabile ($\bar{P}_0 = 0$, $\bar{M}_0 = 0$).

Această teorie, integral verificată de experiență (în măsura în care nu e necesar să se ia în considerație efectele cîmpurilor de gravitație intense, studiate în teoria relativității generale), poate fi prezentată pe baza următorului sistem de premize fundamentale, astfel enunțate, încît să se poată urmări paralelismul cu teoria lui Hertz.

I′) Nu e exclusă existența vidului (a spațiului lipsit de substanță); de aceea, referențialele proprii se pot considera numai în punctele din spațiu, unde există corpuri (substanță).

II′) Caracterizarea configurației și mișcării mediului se face în raport cu un referențial inerțial oarecare S. La schimbarea sistemului inerțial de referință, transformarea coordonatelor și a timpului este aceea a cinematicii relativiste (transformarea Lorentz), în care simultaneitatea e relativă.

III′) Caracterizarea locală și instantanee a stărilor electromagnetice ale cîmpului și ale substanței se face cu ajutorul *mărimilor relative* $\bar{E}$, $\bar{D}$, $\bar{B}$, $\bar{H}$, ϱ, $\bar{J}$, $\bar{P}$, $\bar{M}$, definite în raport cu același referențial oarecare S, astfel încît: 1) să se asigure invarianța Lorentz a ecuațiilor cîmpului electromagnetic la schimbarea sistemului inerțial de referință (ceea ce asigură compatibilitatea cu principiul relativității), 2) mărimile proprii $\bar{E}_0$, $\bar{D}_0$, $\bar{B}_0$, $\bar{H}_0$, ϱ_0, $\bar{J}_0$, $\bar{P}_0$, $\bar{M}_0$, adică mărimile relative la referențialul propriu S_0 al unui punct dintr-un corp să aibă definiția (interpretarea experimentală) cunoscută din teoria mediilor în repaus.

IV′$_1$) *În cazul unui corp rigid în mișcare inerțială* și în raport cu referențialul propriu S_0 (care e *același* în fiecare moment și pentru toate punctele corpului), sînt valabile ecuațiile (2) ale lui Maxwell pentru medii în

repaus, formulate cu mărimile proprii. În același caz, față de orice alt referențial inerțial S, ecuațiile cîmpului au aceeași formă, adică sînt Lorentz invariante, fiind formulate cu mărimile relative, care asigură această invarianță.

IV'$_2$) *În cazul general al unui mediu deformabil* (sistem de corpuri cu mobilitate relativă), se postulează valabilitatea ecuațiilor astfel obținute, numite *ecuațiile Maxwell-Minkowski*, formulate cu mărimile relative.

V') Legile de material au formularea cunoscută din electrodinamica mediilor în repaus, cînd sînt formulate cu mărimile proprii, adică față de S_0.

Cu aceste premize, teroia lui Minkowski e complet caracterizată.

Scrierea invariantă a ecuațiilor și deducerea modului de transformare a mărimilor electromagnetice ce se face deosebit de simplu, dacă se introduce (Minkowski) notația cuadridimensională (cu c_0 = viteza luminii în vid)

$$x_1 = x,\ x_2 = y,\ x_3 = z,\ x_4 = jc_0 t \qquad (j = \sqrt{-1}) \tag{3}$$

care asociază fiecărui *eveniment* (x, y, z, t) un „punct" al unui spațiu abstract cu patru dimensiuni, numit *universul cuadridimensional* (minkowskian). Se știe că transformarea Lorentz asigură invarianța *intervalului de univers* Δs_0 dat de relația

$$\Delta s_0^2 = \sum_{\mu=1}^{4} \Delta x_\mu^2 = \Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2 - c_0^2 \Delta t^2 \tag{4}$$

ceea ce conferă acestui univers o metrică de tip euclidian. Schimbarea sistemului de referință inerțial de la S la S', care are viteza constantă $\overline{v}$ față de S, corespunde unei transformări a coordonatelor „punctelor" acestui univers, conform relațiilor

$$x'_\mu = \sum_{\mu=1}^{4} a_{\lambda\mu}\, x_\mu \tag{5}$$

(scrise omogen, presupunînd că se convine să se păstreze originea). Invarianța intervalului de univers (4) arată că aceste relații reprezintă *transformări ortogonale* în universul cuadridimensional, care satisfac *condițiile de ortonormalitate*

$$\sum_{\lambda=1}^{4} a_{\lambda\mu}\, a_{\lambda\nu} = \delta_{\mu\nu} \begin{cases} = 1 \text{ dacă } \mu = \nu \\ = 0 \text{ dacă } \mu \neq \nu \end{cases} \tag{6}$$

din care rezultă

$$\sum_{\lambda=1}^{4} a_{\mu\lambda}\, a_{\nu\lambda} = \delta_{\mu\nu}\,; \quad D = \det \| a_{\lambda\mu} \| = \pm 1 \tag{6'}$$

și transformarea inversă

$$x_\mu = \sum_{\nu=1}^{4} b_{\mu\nu}\, x'_\nu = \sum_{\nu=1}^{4} a_{\nu\mu}\, x'_\nu \tag{7}$$

adică

$$\| b \| \equiv \| a \|^{-1} = \| a \|_t ; \; b_{\mu\nu} \equiv (a^{-1})_{\mu\nu} = a_{\nu\mu} \tag{7'}$$

Relațiile (5) reprezintă forma generală a *transformării Lorentz omogene* în scriere cuadridimensională. Dacă $\| \alpha_{ik} \|$ e matricea rotației spațiale a axelor (i, $k = 1, 2, 3$) — adică α_{ik} este consinusul director al noii axe (i) față de vechea axă (k) —, componentele vitezei $\bar{v}$ a sistemului de referință S' față de S sînt v_k în raport cu vechile axe și

$$v_i' = \sum_{k=1}^{3} \alpha_{ik} \, v_k \qquad (i = 1, 2, 3) \tag{8}$$

în raport cu noile axe. Totodată

$$\sum_{i=1}^{3} \alpha_{ik} \, \alpha_{il} = \sum_{i=1}^{3} \alpha_{kl} \, \alpha_{li} = \delta_{kl} \begin{cases} = 1, k = l \\ = 0, k \neq l \end{cases} \tag{8'}$$

Cu aceste notații, coeficienții tranformării Lorentz sînt (cu i, $k = 1, 2, 3$)

$$\begin{cases} a_{ik} = \left(\dfrac{1}{\alpha(v)} - 1 \right) \dfrac{v_i' \, v_k}{v^2} + \alpha_{ik} \, ; \; a_{i4} = j \dfrac{v_i'}{c_0} \dfrac{1}{\alpha(v)} \\ a_{4k} = -j \dfrac{v_k}{c_0} \dfrac{1}{\alpha(v)} \qquad ; \; a_{44} = \dfrac{1}{\alpha(v)} \end{cases} \tag{9}$$

unde c_0 e viteza luminii în vid, iar

$$\alpha(v) = 1 / \sqrt{1 - v^2/c_0^2} \tag{9'}$$

În scriere vectorială rezultă

$$\begin{cases} \bar{r}' = \dfrac{1}{\alpha(v)} (\bar{r} - \bar{v} \, t) - \left(\dfrac{1}{\alpha(v)} - 1 \right) \dfrac{\bar{v}}{v} \times \left(\bar{r} \times \dfrac{\bar{v}}{v} \right) \\ t' = \dfrac{1}{\alpha(v)} \left(t - \dfrac{\bar{v} \, \bar{r}}{c_0^2} \right) \end{cases} \tag{5'}$$

Importanța introducerii universului cuadridimensional consistă în aceea că în el se pot defini *cuadritensori* și, în particular, *cuadrivectori*, care exprimă *proprietăți intrinseci* ale acestui univers, adică independente de alegerea referențialului inerțial.

Astfel, un sistem de $4^1 = 4$ mărimi F_μ sînt componentele relative la S ale unui cuadrivector $\mathfrak{F}$, dacă componentele relative la S' sînt date de relațiile

$$F_\lambda' = \sum_{\mu=1}^{4} a_{\lambda\mu} \, F_\mu \tag{10}$$

identice cu (5), iar un sistem de $4^2 = 16$ mărimi $T_{\mu\nu}$ sînt componentele

relative la S ale unui cuadritensor de ordinul al doilea T, dacă componentele relative la S' sînt date de relațiile

$$T'_{\chi\lambda} = \sum_{\mu=1}^{4} \sum_{\nu=1}^{4} a_{\chi\mu}\, a_{\lambda\nu}\, T_{\mu\nu} \tag{11}$$

Orice relație intrinsecă (tensorială), formulată cu astfel de mărimi, corespunde unor relații invariante la schimbarea referențialului inerțial.

Conform premizelor IV'_1 și IV'_2 de mai sus, ecuațiile electrodinamicii macroscopice relativiste, adică *ecuațiile Maxwell-Minkowski*, trebuie să aibă aceeași formă cu (2), adică

$$\begin{aligned} &\text{(a) rot } \bar{H} = \bar{J} + \frac{\partial \bar{D}}{\partial t} \; ; \quad \text{(b) div } \bar{D} = \varrho \\ &\text{(c) rot } \bar{E} = -\frac{\partial \bar{B}}{\partial t} \; ; \quad \text{(d) div } B = 0 \\ &\text{(e) } \bar{D} - \varepsilon_0 \bar{E} = \bar{P} \; ; \quad \text{(f) } \bar{H} - \frac{1}{\mu_0} \bar{B} = -\bar{M} \end{aligned} \tag{12}$$

în raport cu *orice* referențial inerțial. Se observă că aceste ecuații pot fi scrise sub forma unor relații intrinseci, cuadridimensionale, invariante

$$\sum_{\nu=1}^{4} \frac{\partial \Psi_{\nu\mu}}{\partial x_\mu} = J_\nu \tag{13}$$

$$\sum_{\nu,\,\mu,\,\lambda}^{4} \frac{\partial \Phi_{\mu\nu}}{\partial x_\lambda} = 0 \tag{14}$$

$$\Psi_{\mu\nu} = \frac{1}{\mu_0} \Phi_{\mu\nu} - \Gamma_{\mu\nu} \tag{15}$$

dacă se introduc cuadritensorii antisimetrici Φ, Ψ, Γ și cuadrivectorul $\mathfrak{J}$ cu matricele (în care $\varepsilon_0 \mu_0 = 1/c_0^2$)

$$\| \Phi_{\nu\mu} \| = \begin{Vmatrix} 0 & B_z & -B_y & -\frac{j}{c_0} E_x \\ -B_z & 0 & B & -\frac{j}{c_0} E_y \\ B_y & -B_x & 0 & -\frac{j}{c_0} E_z \\ \frac{j}{c_0} E_x & \frac{j}{c_0} E_y & \frac{j}{c_0} E_z & 0 \end{Vmatrix} \quad \text{(primul cuadritensor al cîmpului)} \tag{16}$$

$$\|\Psi_{\mu\nu}\| = \begin{Vmatrix} 0 & H_z & -H_y & -jc_0 D_x \\ -H_z & 0 & H_x & -jc_0 D_y \\ H_y & -H_x & 0 & -jc_0 D_z \\ jc_0 D_x & jc_0 D_y & jc_0 D_z & 0 \end{Vmatrix} \quad \text{(al doilea cuadritensor al cîmpului)} \tag{17}$$

$$\|\Gamma_{\mu\nu}\| = \begin{Vmatrix} 0 & M_z & -M_y & jc_0 P_x \\ -M_z & 0 & M_x & jc_0 P_y \\ M_y & -M_x & 0 & jc_0 P_z \\ -jc_0 P_x & -jc_0 P_y & -jc_0 P_z & 0 \end{Vmatrix} \quad \text{(cuadritensorul polarizațiilor)} \tag{18}$$

$$\|J_\mu\| = \| J_x, J_y, J_z, jc_0 \varrho \| \quad \text{(cuadrivectorul densității de curent)} \tag{19}$$

Cum din (10) și (11) reiese că se cunosc componentele unui cuadrivector sau cuadritensor față de orice referențial inerțial S, dacă se cunosc aceste componente într-un *anumit* referențial (de ex. S_0), rezultă că mărimile electromagnetice relative *sînt univoc definite* (față de orice S), dacă se cunosc mărimile proprii (față de S_0), cînd se fixează — ca mai sus — caracterul lor tensorial în universul cuadridimensional. Condiția de invarianță a ecuațiilor (12) impune deci relațiile de definiție ale mărimilor relative, ca relații de transformare ale componentelor cuadritensorilor respectivi. Se stabilesc astfel, cu (10), (11) și (9), relațiile (acum $\bar{v} = -\bar{u}$):

$$\left.\begin{aligned} \bar{E} &= \frac{1}{\alpha(u)}\left[\bar{E}_0 - \bar{u} \times \bar{B}_0\right] - \left(\frac{1}{\alpha(u)} - 1\right)\left(\bar{E}_0 \frac{\bar{u}}{u}\right)\frac{\bar{u}}{u} \\ \bar{B} &= \frac{1}{\alpha(u)}\left[\bar{B}_0 + \frac{\bar{u}}{c_0^2} \times \bar{E}_0\right] - \left(\frac{1}{\alpha(u)} - 1\right)\left(\bar{B}_0 \frac{\bar{u}}{u}\right)\frac{\bar{u}}{u} \end{aligned}\right\} \tag{20}$$

$$\left.\begin{aligned} \bar{D} &= \frac{1}{\alpha(u)}\left[\bar{D}_0 - \frac{\bar{u}}{c_0^2} \times \bar{H}_0\right] - \left(\frac{1}{\alpha(u)} - 1\right)\left(\bar{D}_0 \frac{\bar{u}}{u}\right)\frac{\bar{u}}{u} \\ \bar{H} &= \frac{1}{\alpha(u)}\left[\bar{H}_0 + \bar{u} \times \bar{D}_0\right] - \left(\frac{1}{\alpha(u)} - 1\right)\left(\bar{H}_0 \frac{\bar{u}}{u}\right)\frac{\bar{u}}{u} \end{aligned}\right\} \tag{21}$$

$$\left.\begin{aligned} \bar{P} &= \frac{1}{\alpha(u)}\left[\bar{P}_0 + \frac{\bar{u}}{c_0^2} \times \bar{M}_0\right] - \left(\frac{1}{\alpha(u)} - 1\right)\left(\bar{P}_0 \frac{\bar{u}}{u}\right)\frac{\bar{u}}{u} \\ \bar{M} &= \frac{1}{\alpha(u)}\left[\bar{M}_0 - \bar{u} \times \bar{P}_0\right] - \left(\frac{1}{\alpha(u)} - 1\right)\left(\bar{M}_0 \frac{\bar{u}}{u}\right)\frac{\bar{u}}{u} \end{aligned}\right\} \tag{22}$$

$$\left.\begin{aligned} \bar{J} &= \frac{1}{\alpha(u)}\left[\bar{J}_0 + \varrho_0 \bar{u}\right] - \left(\frac{1}{\alpha(u)} - 1\right)\frac{\bar{u}}{u} \times \left(\bar{J}_0 \cdot \frac{\bar{u}}{u}\right) \\ \varrho &= \frac{1}{\alpha(u)}\left[\varrho_0 + \frac{\bar{u}\,\bar{J}_0}{c_0^2}\right] \end{aligned}\right\} \tag{23}$$

Cu privire la electrodinamica lui Minkowski, se pot observa următoarele :

a) Relațiile (20) ... (23), care definesc mărimile electromagnetice relative la S, pe baza valorilor lor în S_0, trebuie să fie compatibile cu relațiile de transformare cunoscute de la electrodinamica microscopică relativistă (Einstein), care este o electrodinamică a sistemelor de particule încărcate *în vid*. În acest caz, mărimile relative pot fi definite *direct* în fiecare referențial, cu ajutorul forței lui Lorentz, exercitate asupra unei particule încărcate .

$$\bar{F} = q\left(\bar{E} + \bar{u} \times \bar{B}\right) \tag{24}$$

și ținînd seama că în vid trebuie ca (față de orice S)

$$\bar{B} = \mu_0 \bar{H}, \quad \bar{D} = \varepsilon_0 \bar{E} \tag{25}$$

Această condiție e îndeplinită, deoarece din (22) rezulta că, dacă $\bar{M}_0 = 0$, $\bar{P}_0 = 0$ (în S_0 avem vid), atunci în raport cu orice referențial $\bar{M} = 0$, $\bar{P} = 0$.

Starea de vid (și, mai general, aceea de mediu nepolarizabil) are un caracter absolut. Totodată, se poate stabili că din (23) rezultă caracterul invariant al sarcinii q, iar din (20), existența unei relații de forma (24) pentru orice referențial inerțial.

b) În cazul unui mediu deformabil, viteza $\bar{u}$ e funcție de punct și moment și, deși ecuațiile (12) sînt invariante, ecuațiile (2) pentru medii în repaus nu mai sînt valabile. În adevăr, în acest caz nu mai există un referențial propriu S_0 pentru întregul corp și, scriind ecuațiile (12) față de referențialul propriu S_{0A} al unui punct A al corpului, funcțiile de punct și moment $\bar{E}_A(\bar{r}, t)$, $\bar{B}_A(\bar{r}, t)$, etc., nu vor avea decît în punctul A valorile $\bar{E}_0$, $\bar{B}_0$, etc., corespunzătoare mărimilor proprii. Cu alte cuvinte, în acest caz

$$\lim_{S \to S_{0A}} (\mathrm{rot}\, \bar{E}) \neq \mathrm{rot}_A \bar{E}_0 \text{, etc.}$$

Compararea premizelor celor două teorii prezentate mai sus pune în evidență numeroase deosebiri. Nu toate sînt, însă, de egală importanță și se pot observa următoarele :

a) O deosebire importantă pentru forma ecuațiilor celor două teorii, dar *neesențială din punctul de vedere fizic*, provine din faptul că cele două teorii operează cu mărimi electromagnetice diferite : teoria lui Hertz cu *mărimile proprii* (notate cu indicele $_0$), iar teoria lui Minkowski cu *mărimile relative* la referențialul, oarecare, considerat.

Operarea cu mărimile proprii conferă teoriei lui Hertz un incontestabil avantaj din punctul de vedere practic, deoarece legile de material — extrem de utilizate în aplicații, cum sînt legile polarizațiilor sau legea lui Ohm — au forma simplă, cunoscută, numai cînd sînt exprimate cu ajutorul mărimilor proprii. De aceea, în prima parte a acestei lucrări, vom analiza forma pe care o iau ecuațiile Maxwell-Minkowski (12), cînd sînt exprimate cu ajutorul mărimilor proprii și anume în aproximația vitezelor „mici" $\left(\frac{u^2}{c_0^2} \ll 1\right)$, care prezintă interes în tehnică.

b) O deosebire *esențială din punctul de vedere fizic* între cele două teorii provine din cinematica pe care sînt fundamentate: teoria lui Hertz, pe cinematica prerelativistă (transformarea Galilei) — deoarece, fără ipoteza caracterului absolut al simultaneității, ecuațiile ei nu sînt invariante —, iar teoria lui Minkowski, pe cinematica relativistă (transformarea Lorentz).

Se ridică următoarea întrebare: *este această bază cinematică singura deosebire esențială, din punctul de vedere fizic, dintre aceste două teorii?*

Dacă răspunsul la această întrebare ar fi negativ, ar trebui să se poată construi o teorie prerelativistă, distinctă de teoria lui Hertz, care să se deosebească de teoria lui Minkowski, exclusiv datorită cinematicii utilizate. O astfel de teorie ar trebui să fie mai bine verificată de experiență decît teoria lui Hertz (deoarece ar diferi de teoria relativistă, confirmată de experiență, numai prin efecte relativiste) și ar fi deosebit de importantă pentru domeniul aplicațiilor tehnice, în care ar trebui să înlocuiască teoria lui Hertz.

Dacă răspunsul la întrebarea de mai sus ar fi afirmativ, ar rezulta că *teoria lui Hertz este singura teorie macroscopică coerentă, compatibilă cu cinematica prerelativistă.* Acest rezultat ar da o temeinică justificare teoretică răspîndirii pe care o are în aplicație teoria lui Hertz și necesității de a o utiliza oriunde nu sînt importante efectele relativiste.

În ultima parte a acestei lucrări, vom arăta că răspunsul corect la întrebarea pusă mai sus este cel afirmativ: singura deosebire, esențială din punctul de vedere fizic, între cele două teorii provine din cinematica pe care se bazează fiecare.

2. Electrodinamica relativistă la viteze mici a mediilor în mișcare.

Se consideră, de obicei, că efectele „pur relativiste" sînt cele de ordinul II în $\left(\frac{v}{c_0}\right)$ De aceea, vom considera ca aproximație a vitezelor mici aproximația

$$\frac{u^2}{c_0^2} \ll 1\,;\quad 1 - \frac{u^2}{c_0^2} \approx 1\,;\quad \alpha(u) = \frac{1}{\sqrt{1 - u^2/c_0^2}} \approx 1\,;\quad \frac{1}{\alpha(u)} - 1 \approx 0 \qquad (26)$$

În această aproximație, relațiile (20) ... (23) dintre *mărimile relative* și *mărimile proprii* devin

$$\left.\begin{aligned} \bar{E} &\approx \bar{E}_0 - \bar{u} \times \bar{B}_0 \\ \bar{B} &\approx \bar{B}_0 + \frac{\bar{u}}{c_0^2} \times \bar{E}_0 \end{aligned}\right\} \tag{27}$$

$$\left.\begin{aligned} \bar{D} &\approx \bar{D}_0 - \frac{\bar{u}}{c_0^2} \times \bar{H}_0 \\ \bar{H} &\approx \bar{H}_0 + \bar{u} \times \bar{D}_0 \end{aligned}\right\} \tag{28}$$

$$\left.\begin{aligned} \bar{P} &\approx \bar{P}_0 + \frac{\bar{u}}{c_0^2} \times \bar{M}_0 \\ \bar{M} &\approx \bar{M}_0 - \bar{u} \times \bar{P}_0 \end{aligned}\right\} \tag{29}$$

$$\left.\begin{aligned} \bar{J} &\approx \bar{J}_0 + \varrho_0 \bar{u} \\ \varrho &\approx \varrho_0 + \frac{\bar{u}\,\bar{J}_0}{c_0^2} \end{aligned}\right\} \tag{30}$$

Înlocuind aceste expresii în ecuațiile Maxwell-Minkowski (12), se obțin ecuațiile căutate — în care coordonatele și vitezele sînt luate față de un referențial oarecare S, iar mărimile electromagnetice sînt *mărimile proprii* (definite față de S_0), așa cum se procedează în teoria lui Hertz. Se obțin *ecuațiile relativiste în aproximația vitezelor mici, exprimate cu mărimi electromagnetice proprii*

$$\left.\begin{aligned} &\text{(a)}\quad \operatorname{rot} \bar{H}_0 = \bar{J}_0 + \varrho_0 \bar{u} + \frac{\partial \bar{D}_0}{\partial t} + \operatorname{rot}(\bar{D}_0 \times \bar{u}) - \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\bar{u}}{c_0^2} \times \bar{H}\right) \\ &\text{(b)}\quad \operatorname{div} \bar{D}_0 = \varrho_0 + \frac{\bar{u}\,\bar{J}_0}{c_0^2} + \operatorname{div}\left(\frac{\bar{u}}{c_0^2} \times \bar{H}_0\right) \\ &\text{(c)}\quad \operatorname{rot} \bar{E}_0 = -\frac{\partial \bar{B}_0}{\partial t} - \operatorname{rot}(\bar{B}_0 \times \bar{u}) - \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\bar{u}}{c_0^2} \times \bar{E}_0\right) \\ &\text{(d)}\quad \operatorname{div} \bar{B}_0 = -\operatorname{div}\left(\frac{\bar{u}}{c_0^2} \times \bar{E}_0\right) \\ &\text{(e)}\quad \bar{D}_0 = \varepsilon_0 \bar{E}_0 + \bar{P}_0 \\ &\text{(f)}\quad \bar{H}_0 = \frac{1}{\mu_0} \bar{B}_0 - \bar{M}_0 \end{aligned}\right\} \tag{31}$$

Examinînd aceste ecuații, se observă următoarele:

a) Ecuațiile Maxwell-Hertz (2) diferă de ecuații „corecte" (31) numai prin termenii care conțin factorul $\frac{u}{c_0^2} = \varepsilon_0 \mu_0 u$. Acești termeni sînt suficienți penru a explica toate experiențele privitoare la corpuri în mișcare la viteze „mici". Astfel, în experiența lui Wilson, în care un dielectric se deplasează într-un cîmp magnetic de inducție $\bar{B}_0 = \mu_0 \bar{H}_0$, între armăturile unui condensator scurtcircuitat, se produce prin inducție un cîmp electric propriu $\bar{E}_0 = \bar{u} \times \bar{B}_0$ și o inducție $\bar{D}_0 = \varepsilon \bar{E}_0$, astfel că densitatea de sarcină asociată este, cu (31 b), $\varrho_0 = \operatorname{div}\left(\bar{D}_0 - \frac{\bar{u}}{c_0^2} \times \bar{H}_0\right) = \operatorname{div}\left(\bar{D}_0 - \varepsilon \bar{u} \times \bar{B}_0\right)$ $= \operatorname{div}\left(\bar{D}_0 - \varepsilon_0 \bar{E}\right) = \operatorname{div} \bar{P}_0 = \operatorname{div}\left(\varepsilon - \varepsilon_0\right) \bar{E}_0$, așa cum a pus în evidență experiența. În experiența lui Roentgen și Eichenwald, se măsoară prin substituție cîmpul magnetic produs în jurul unui dielectric polarizat în mișcare, ale cărui ecuații rezultă, din (31 a) și (31 d), următoarele: $\operatorname{rot} \bar{H}_0 = \operatorname{rot}\left(\bar{D}_0 \times \bar{u}\right)$ și $\operatorname{div} \bar{H}_0 = \operatorname{div} \frac{\bar{B}_0}{\mu_0} = \varepsilon_0 \operatorname{div}\left(\bar{E}_0 \times \bar{u}\right)$. În afara dielectricului în mișcare (unde $\bar{u} = 0$), acest cîmp coincide cu cîmpul solenoidal $\bar{H}^* = \bar{H}_0 - \varepsilon_0 \bar{E}_0 \times \bar{u}$ (determinat de ecuațiile $\operatorname{rot} \bar{H}^* = \operatorname{rot}\left(\bar{P}_0 \times \bar{u}\right)$ și $\operatorname{div} \bar{H}^* = 0$), care corespunde unei densități de curent echivalente $\bar{J}_{\text{ech.}} = \bar{P}_0 \times \bar{u}$, așa cum a pus în evidență experiența. Analog se poate explica și experiența lui Fizeau.

b) Diferențele dintre ecuațiile (31) și ecuațiile (2) ale teoriei lui Hertz sînt exclusiv de ordin relativist. În adevăr, în aceeași aproximație a vitezelor „mici" $\left(\frac{v^2}{c_0^2} \ll 1\right)$, transformarea Lorentz (5′) devine

$$\begin{aligned} \bar{r}' &\approx \bar{r} - \bar{v}t \\ t' &\approx t - \frac{\bar{v}\bar{r}}{c_0^2} \end{aligned} \tag{32}$$

Aceasta este *transformarea Lorentz pentru viteze „mici"* și *diferă* de transformarea lui Galilei a fizicii prerelativiste

$$\bar{r}' = \bar{r} - \bar{v}t \quad , \quad t' = t \tag{33}$$

prin termenul $\bar{r}\bar{v}/c_0^2$ din expresia lui t', care corespunde caracterului relativ al simultaneității, caracter care se menține și în această aproximație. Pentru a obține transformarea prerelativista (33) din (32), trebuie să

introducem formal condiția $c_0 \to \infty$. Dar, cu această condiție, relațiile de transformare (27) ... (30) ale mărimilor electromagnetice devin

$$\bar{E} \approx \bar{E}_0 - \bar{u} \times \bar{B}_0 \quad ; \quad \bar{B} \approx \bar{B}_0 \tag{34}$$

$$\bar{H} \approx \bar{H}_0 + \bar{u} \times \bar{D} \quad ; \quad \bar{D} \approx \bar{D}_0 \tag{35}$$

$$\bar{P} \approx \bar{P}_0 \quad ; \quad \bar{M} \approx \bar{M}_0 - \bar{u} \times \bar{P}_0 \tag{36}$$

$$\bar{J} \approx \bar{J}_0 + \varrho_0 \bar{u} \quad ; \quad \varrho \approx \varrho_0 \tag{37}$$

iar ecuațiile (31) se confundă cu ecuațiile Maxwell-Hertz.

Rezultă, așadar, că deosebirile dintre ecuațiile Maxwell-Hertz (2) și ecuațiile relativiste pentru viteze mici (31) sînt de aceeași natură ca deosebirile dintre transformarea lui Galilei și forma pentru viteze „mici" a transformării lui Lorentz: ambele sînt consecințe ale caracterului relativ al simultaneității în cinematica relativistă.

Acest rezultat îndreptățește întrebarea formulată anterior, privitor la faptul dacă singura deosebire semnificativă fizic dintre cele două teorii provine din baza cinematică a fiecăreia.

3. Electrodinamica prerelativistă a mediilor în mișcare în prezentare minkowskiană

Pentru a răspunde afirmativ la această întrebare, vom relua premizele II′ ... V′ ale teoriei lui Minkowski, căutînd să stabilim ecuațiile mediilor în mișcare și modul de transformare a mărimilor electromagnetice în acord cu aceste premize (și, implicit, în acord cu principiul relativității), cu o sigură excepție: transformarea coordonatelor și a timpului e aceea prerelativistă — transformarea (33) a lui Galilei.

Pentru a păstra maximum de analogie, vom păstra notația minkowskiană (3), care introduce *universul cuadridimensional*. De astă dată însă, expresia (4) nu este invariantă, invariantul corespunzător transformării (33) fiind durata, adică

$$\Delta x_4 = \Delta x_4' = j c_0 \Delta t \tag{38}$$

Acest invariant corespunde unei metrici degenerate $\sum_{\nu=1}^{4} \sum_{\mu=1}^{4} g_{\nu\mu} \Delta x_\nu \Delta x_\mu$, cu toți $g_{\nu\mu} = 0$, afară de $g_{44} = 1$. În acest univers, care nu e euclidian și și nici riemannian, nu se pot defini decît tensori covarianți si tensori contravarianți — fără o corespundență biunivocă a lor [v. 3]. Vom considera în locul notației (3) notația

$$x^1 = x \quad ; \quad x^2 = y \quad ; \quad x^3 = z \quad ; \quad x^4 = j c_0 t \tag{39}$$

cu care transformarea Galilei (33), *caracteristică acestui univers*, ia forma

$$x'^\lambda = \sum_{\mu=1}^{4} a_{\cdot\mu}^{\lambda\cdot} x^\mu \tag{40}$$

Transformarea inversă rezultă

$$x^{\mu} = \sum_{\nu=1}^{4} b^{\lambda}_{\cdot\nu}\, x'^{\nu} \tag{41}$$

unde $\| b \| = \| a \|^{-1}$, adică

$$\sum a^{\lambda}_{\cdot\mu}\, b^{\mu}_{\cdot\nu} = \delta^{\lambda}_{\nu} \begin{cases} 1 \ , & \lambda = \nu \\ 0 \ , & \lambda \neq \nu \end{cases} \tag{42}$$

Din (33) rezultă expresiile explicite ale acestor coeficienți, în funcție de componentele vitezei relative $\bar{v}$ a referențialului S' față de S și de matricea cosinusurilor directoare α_{ik} ale rotațiilor spațiale (v. (8) și (8'))

$$\begin{cases} a^{i}_{\cdot k} = \alpha_{ik} \ ; & a^{i}_{\cdot 4} = j \dfrac{v'_i}{c_0} \\ a^{4}_{\cdot k} = 0 \ ; & a^{4}_{\cdot 4} = 1 \end{cases} \tag{43}$$

$$\begin{cases} b^{i}_{\cdot k} = \alpha_{ki} \ ; & b^{i}_{\cdot 4} = -j \dfrac{v'_i}{c_0} \\ b^{4}_{\cdot k} = 0 \ ; & b^{4}_{\cdot 4} = 1 \end{cases} \tag{43'}$$

Se observă că determinanții acestor transformări sînt egali cu acei ai rotațiilor spațiale și anume sînt egali (în modul) cu unitatea

$$\begin{aligned} |a| &= \det \| a \| = \det \| \alpha_{in} \| = \pm 1 = D \\ |b| &= \det \| b \| = \det \| a_{ik} \| = \pm 1 = D \end{aligned} \tag{44}$$

semnul (+) corespunzînd rotațiilor spațiale propriu-zise, iar semnul (—), rotațiilor spațiale însoțite de oglindiri.

Pentru simplificare, în cele ce urmează vom considera numai transformări care provin prin variație continuă din transformarea identică, ceea ce exclude oglindrile și asigură

$$D = |a| = |b| = \det \| a \| = \det \| b \| = 1 \tag{44'}$$

In acest univers se pot defini cuadrivectori contravarianți și covarianți, cuadritensori contravarianți, covarianți și micști etc.

Exemple:

Cuadrivectori contravarianți $\mathfrak{F} \equiv \{ F^{\mu} \}$ sînt mărimile, ale căror componente se transformă cu relațiile analoge transformării directe (40)

$$F'^{\lambda} = \sum_{\mu=1}^{4} \frac{\partial x'^{\lambda}}{\partial x^{\mu}} F^{\mu} = \sum_{\mu=1}^{4} a^{\lambda}_{\cdot\mu}\, F^{\mu} \tag{45}$$

Se verifică fără dificultăți că, pentru rotații pur spațiale ($a^{i}_{\cdot 4} = 0$ adică $\bar{v} = 0$), primele trei componente, F^1, F^2, F^3 alcătuiesc un vector $\bar{F}$ al spa-

țiului cu trei dimensiuni, iar componenta a patra e un invariant scalar imaginar $F^4 = j\,F_t$ al acestui spațiu. De aceea, se poate nota

$$\mathfrak{F} \equiv \{\bar{F}\ ,\ jF_t\} \tag{45'}$$

Cu (45) și (43), rezultă, pentru transformarea acestor componente, relațiile

$$\bar{F}' = \bar{F} - \frac{\bar{v}}{c_0} F_t \quad ; \quad F'_t = F_t \tag{45''}$$

Componenta a patra e, deci, și un invariant cuadridimensional.

Cuadrivectori covarianți $\mathcal{G} \equiv \{G_\varkappa\}$ sînt mărimile, ale căror componente se transformă cu relații analoge transpusei transformării inverse (41)

$$G'_\nu = \sum_{\varkappa=1}^{4} \frac{\partial x^\varkappa}{\partial x'^\nu}\, G_\varkappa = \sum_{\chi=1}^{4} b^{\varkappa}_{.\nu}\, G_\varkappa \tag{46}$$

Se verifică și în acest caz că, pentru rotații pur spațiale, primele trei componente alcătuiesc un vector spațial $\bar{G}$, iar a patra e un invariant scalar imaginar $G_4 = j\,G_t$ al spațiului cu trei dimensiuni. De aceea, se poate nota

$$G \equiv \{\bar{G}\ ,\ jG_t\} \tag{46'}$$

Cu (46) și (43'), rezultă

$$\bar{G}' = \bar{G} \quad ; \quad G'_t = G_t - \frac{\bar{v}\,\bar{G}}{c_0} \tag{46''}$$

Cuadritensori antisimetrici[1] *de ordinul II, de două ori contravarianți* $\Psi = \{\Psi^{\mu\nu}\}$ sînt mărimile, ale căror componente se transformă cu relațiile

$$\Psi'^{\varkappa\lambda} = \sum_{\mu=1}^{4} \sum_{\nu=1}^{4} a^{\varkappa}_{.\mu}\, a^{\lambda}_{.\nu}\, \Psi^{\mu\nu} \tag{47}$$

și satisfac condiția de antisimetrie (invariantă)

$$\Psi^{\mu\nu} = -\,\Psi^{\mu\nu} \tag{48}$$

Se verifică ușor că acești cuadritensori, au șase componente distincte, care definesc — pentru rotații spațiale — doi vectori tridimensionali F și $\bar{G}$ conform notațiilor:

$$\|\Psi\| = \begin{Vmatrix} 0 & Fz & -F_y & jG_x \\ -F_z & 0 & F_x & jG_y \\ F_y & -F_x & 0 & jG_z \\ -jG_x & -jG_y & -jG_z & 0 \end{Vmatrix} \tag{47'}$$

[1] Ne limităm la cuadritensorii antisimetrici, singurii necesari expunerii.

De aceea, se poate nota

$$\Psi \equiv \{ \bar{F} \ ; \ j\bar{G} \} \tag{47''}$$

Cu (47), (48) și (43), rezultă, pentru transformarea acestor componente vectoriale, relațiile

$$\bar{F}' = \bar{F} + \frac{\bar{v}}{c_0} \times \bar{G} \ ; \ \bar{G}' = \bar{G} \tag{47'''}$$

Cuadritensori antisimetrici de ordinul II, de două ori covarianți $\Phi \equiv \{\Phi_{\mu\nu}\}$ sînt mărimile, ale căror componente se transformă cu relațiile

$$\Phi_{\varkappa\lambda} = \sum_{\mu=1}^{4} \sum_{\nu=1}^{4} b^{\mu}_{\cdot\varkappa} \, b^{\nu}_{\cdot\lambda} \, \Phi_{\mu\nu} \tag{49}$$

și satisfac condiția de antisimetrie (invariantă)

$$\Phi_{\varkappa\lambda} = - \Phi_{\lambda\varkappa} \tag{48'}$$

Se verifică și în acest caz că acești cuadritensori au șase componente distincte, care definesc — pentru rotații spațiale — doi vectori tridimensionali $\bar{R}$ și $\bar{S}$, conform notațiilor:

$$\| \Phi \| = \begin{Vmatrix} 0 & R_z & -R_y & jS_x \\ -R_z & 0 & R_x & jS_y \\ R_y & -R_x & 0 & jS_z \\ -jS_x & -jS_y & -jS_z & 0 \end{Vmatrix} \tag{49'}$$

De aceea, se poate scrie

$$\Phi \equiv \{ \bar{R} \ ; \ j\bar{S} \} \tag{49''}$$

Cu (49), (48) și (43), rezultă, pentru transformarea acestor componente vectoriale, relațiile

$$\bar{R}' = \bar{R} \ ; \ \bar{S}' = \bar{S} - \frac{\bar{v}}{c_0} \times \bar{R}$$

Cuadritensorul complet antisimetric, de ordinul patru contravariant e mărimea de componente

$$\varepsilon^{\varkappa\lambda\mu\nu} = \pm 1, 0 \tag{50}$$

care, în *toate* sistemele de referință sînt egale cu $+1$ (dacă $\varkappa\lambda\mu\nu$ e o permutare pară a lui 1, 2, 3, 4), cu -1 (dacă $\varkappa\lambda\mu\nu$ e o permutare impară a lui 1, 2, 3, 4) sau cu 0 (dacă doi indici sînt egali).

Cuadritensorul complet antisimetric, de ordinul patru, covariant e mărimea de componente

$$\varepsilon_{\varkappa\lambda\mu\nu} = \pm 1, 0 \tag{51}$$

(cu aceleași valori ca precedentul).

Cu aceste mărimi se pot efectua operații intrinseci tensoriale, care au aceeași formă în toate sistemele de referință inerțiale. Exemple: *adunarea* sau *egalarea* a doi cuadrivectori sau cuadritensori de același ordin și de aceeași varianță, *anularea*, *multiplicarea* cu un scalar. *Produsul scalar al unui cuadrivector covariant cu unul contravariant e invariantul*

$$(\mathcal{F}, \mathcal{G}) = \sum_{\mu=1}^{4} F^{\mu} G_{\mu} \tag{52}$$

Mai general, se poate defini *produsul tensorial* (care are componentele tensoriale și e un cuadritensor de ordin egal cu suma ordinelor factorilor) și *contracțiunea* (care consistă în egalarea unui indice covariant cu unul contravariant și sumarea asupra lor, ceea ce conduce la un tensor de ordin inferior cu 2 unități). Produsul tensorial, urmat de contracțiune, ne dă un *produs contractat*, din care cel mai simplu exemplu e produsul scalar (52). Astfel, semisuma produsului contractat al tensorului $\{\varepsilon^{\varkappa\lambda\varkappa\nu}\}$, respectiv $\{\varepsilon_{\varkappa\lambda\mu\nu}\}$, cu un cuadritensor antisimetric de ordinul doi conduce la un nou cuadritensor antisimetric de ordinul doi, *asociat* primului și de varianță schimbată. Exemple

$$\Phi^{*\varkappa\lambda} = \frac{1}{2} \sum_{\mu=1}^{4} \sum_{\nu=1}^{4} \varepsilon^{\varkappa\lambda\mu\nu} \Phi_{\mu\nu} \tag{53}$$

(cu $\Phi^{*12} = \Phi_{34}$, $\Phi^{*23} = \Phi_{14}$, $\Phi^{*31} = \Phi_{24}$, $\Phi^{*14} = \Phi_{23}$, $\Phi^{*24} = \Phi_{31}$, $\Phi^{*34} = \Phi_{12}$

$$\Psi^{*}_{\varkappa\lambda} = \frac{1}{2} \sum_{\mu=1}^{4} \sum_{\nu=1}^{4} \varepsilon_{\varkappa\lambda\mu\nu} \Psi^{\mu\nu} \tag{53'}$$

Se observă că, dacă $\Phi \equiv \{\bar{R} \; ; \; j\bar{S}\}$, atunci

$$\Phi^{*} \equiv \{\bar{R} \; ; \; j\bar{S}\}^{*} = \{j\bar{S} \; ; \; \bar{R}\} \tag{53''}$$

Transformarea (40) fiind liniară, nu există dificultăți în legătură cu derivarea și *operatorul de derivare cuadridimensională*

$$\nabla \equiv \left\{ \frac{\partial}{\partial x^{\nu}} \right\} \equiv \left\{ \nabla, -\frac{j}{c_0} \frac{\partial}{\partial t} \right\} \tag{54}$$

are proprietățile unui cuadrivector covariant, deoarece

$$\frac{\partial}{\partial x'^{\nu}} = \sum_{\mu=1}^{4} \frac{\partial}{\partial x^{\mu}} \frac{\partial x^{\mu}}{\partial x'^{\nu}} = \sum_{\mu=1}^{4} b^{\mu}_{\cdot\nu} \frac{\partial}{\partial x^{\mu}} \tag{54'}$$

analog cu (46).

Urmînd analogia cu electrodinamica lui Minkowski, trebuie găsită forma cuadridimensională a ecuațiilor (12), care asigură invarianța lor și stabilește caracterul cuadridimensional al mărimilor electromagnetice.

In acord cu IV' aceasta permite *definirea* relativă la orice referențial S a acestor mărimi, dacă se cunosc valorile lor față de S_0 (mărimile proprii). Vom ajunge astfel la o *electrodinamică prerelativistă, formulată cu mărimi relative*, ale cărei premize nu diferă de II' ... V' decît prin cinematica pe care se fundează.

In acest scop, introducem următorii cuadritensori antisimetrici ai cîmpului (definiți de componentele lor în S_0)

Cuadritensorul covariant Φ

$$\Phi \equiv \left\{ \bar{B} \; ; \; -\frac{j}{c_0} \bar{E} \right\} \equiv \{ \Phi_{\mu\nu} \} \tag{55}$$

Cuadritensorul contravariant *asociat* precedentului

$$\Phi^* \equiv \left\{ -\frac{j}{c_0} \bar{E} \; ; \; \bar{B} \right\} \equiv \{ \Phi^*_{\mu\nu} \} \tag{55'}$$

Cuadritensorul contravariant

$$\Psi \equiv \{ \bar{H} \; ; \; -j c_0 \bar{D} \} \equiv \{ \Psi^{\mu\nu} \} \tag{56}$$

cum și cuadrivectorul densitate de curent (contravariant)

$$J \equiv \{ \bar{J} \; , \; j c_0 \varrho \} \equiv \{ J^\mu \} \tag{57}$$

Cu aceste notații, primele patru ecuații Maxwell-Minkowski iau forma cuadridimensională invariantă

$$\sum_{\mu=1}^{4} \frac{\partial \Psi^{\nu\mu}}{\partial x^\mu} = J^\nu \qquad \begin{cases} \text{rot } \bar{H} - \dfrac{\partial \bar{D}}{\partial t} = \bar{J} \\ \text{div } \bar{D} = \varrho \end{cases} \tag{58}$$

$$0 = \sum_{\nu=1}^{4} \frac{\partial \Phi^{*\mu\nu}}{\partial x^\mu} = \frac{1}{2} \sum_{\nu=1}^{4} \sum_{\varkappa=1}^{4} \sum_{\lambda=1}^{4} \varepsilon^{\varkappa\lambda\mu\nu} \frac{\partial \Phi_{\varkappa\lambda}}{\partial x^\nu}$$

sau

$$\sum_{\substack{\varkappa\lambda\nu \\ \rightarrow}} \frac{\partial \Phi_{\varkappa\lambda}}{\partial x^\nu} = 0 \qquad \begin{cases} \text{rot } \bar{E} + \dfrac{\partial \bar{B}}{\partial t} = 0 \\ \text{div } \bar{D} = 0 \end{cases} \tag{59}$$

Ultimele două ecuații (12) se pot scrie sub forma

$$\Psi^{\mu\nu} - \frac{1}{\mu_0} \Phi_{\mu\nu} = -\Gamma_{(\mu\nu)} \qquad \begin{cases} \bar{D} - \varepsilon_0 \bar{E} = \bar{P} \\ \bar{H} - \dfrac{1}{\mu_0} \bar{B} = -\bar{M} \end{cases} \tag{60}$$

în care se introduce sistemul de mărimi cu doi indici $\Gamma_{(\mu\nu)}$ avînd matricea (18). Acest sistem de mărimi nu reprezintă un cuadritensor deoarece ope-

rația (60) *nu e* o operație tensorială. Ea poate fi însă utilizată pentru a *defini* mărimile $\Gamma_{(\mu\nu)}$ în orice referențial, regula lor de transformare urmînd a rezulta din această definiție. Cu această observație, relațiile (58), (59), (60) reprezintă scrierea cuadridimensională invariantă a electrodinamicii prerelativiste. Ținînd seama de regulile de transformare (45″), (47‴), (49″) pentru cuadrivectori și cuadritensori, cum și de definiția (60), se obțin ușor expresiile *mărimilor electromagnetice relative* la S (care are viteza $\bar{v} = -\bar{u}$ față de S_0) în funcție de *mărimile electromagnetice* proprii ($\varepsilon_0\mu_0 = 1/c_0^2$)

$$\bar{B} = \bar{B}_0 \; ; \; \bar{E} = \bar{E}_0 - \bar{u} \times \bar{B}_0 \tag{61}$$

$$\bar{H} = \bar{H}_0 + \bar{u} \times \bar{D}_0 \; ; \; \bar{D} = \bar{D}_0 \tag{62}$$

$$\bar{M} = \bar{H} - \frac{1}{\mu_0}\bar{B} = \bar{M}_0 - \bar{u} \times \bar{D}_0 = \bar{M}_0 - \bar{u} \times \bar{P}_0 - \varepsilon_0 \bar{u} \times \bar{E}_0$$

$$\bar{P} = \bar{D} - \varepsilon_0 \bar{E} = \bar{P}_0 + \varepsilon_0 \bar{u} \times \bar{B}_0 = \bar{P}_0 + \frac{\bar{u}}{c_0^2} \times \bar{M}_0 + \frac{\bar{u}}{c_0^2} \times \bar{H}_0 \tag{63}$$

$$\bar{J} = \bar{J}_0 + \bar{u}\varrho_0 \; ; \; \varrho = \varrho_0 \tag{64}$$

Ecuațiile Maxwell-Minkowski (12) sînt deci invariante la schimbarea sistemului inerțial de referință și în cadrul cinematicii clasice, dacă se *definesc* mărimile relative, cu ajutorul relațiilor (61), (62), (63), (64), în funcție de mărimile proprii.

În acord cu postulatul fundamental (IV′) al electrodinamicii lui Minkowski, vom admite că ecuațiile (12) — a căror valabilitate pentru corpuri nedeformabile rezultă din valabilitatea ecuațiilor lui Maxwell (2) față de referențialul propriu și din definițiile (61), (62), (63) — *sînt valabile, oricare ar fi starea de mișcare a mediului.*

Putem obține atunci forma pe care o iau aceste ecuații, în cazul cînd se operează cu mărimile proprii (ca în teoria lui Hertz) ; e suficient să substituim (61), (62), (63), (64) în (12) și să nu uităm că în cazul general $\bar{u}$ e o funcție de punct și moment. Obținem *ecuațiile electrodinamicii prerelativiste, exprimate cu mărimi proprii*

$$\text{(a) } \operatorname{rot} \bar{H}_0 + \operatorname{rot}(\bar{u} \times \bar{D}_0) = \bar{J}_0 + \varrho_0 \bar{u} + \frac{\partial \bar{D}_0}{\partial t} \; ; \; \text{(b) } \operatorname{div} \bar{D}_0 = \varrho_0$$

$$\text{(c) } \operatorname{rot} \bar{E}_0 - \operatorname{rot}(\bar{u} \times \bar{B}_0) = -\frac{\partial \bar{B}_0}{\partial t} \; ; \; \text{(d) } \operatorname{div} B_0 = 0 \tag{65}$$

$$\text{(e) } \bar{D}_0 - \varepsilon_0 \bar{E}_0 = \bar{P}_0 \; ; \; \bar{H}_0 - \frac{1}{\mu_0}\bar{B}_0 = -\bar{M}_0$$

care sînt chiar *ecuațiile Maxwell-Hertz.*

Se poate observa că din caracterul *atensorial al mărimilor* $\Gamma_{(\mu\nu)}$ rezultă transformarea (63) a polarizațiilor, conform căreia putem avea $\bar{M} \neq 0$ și $\bar{P} \neq 0$, față de S, deși $\bar{M}_0 = 0$ și $\bar{P}_0 = 0$ (în S). În adevăr, în acest caz se obține

$$\begin{cases} \bar{P}_{(\bar{P}_0=0\ ;\ \bar{M}_0=0)} = \dfrac{\bar{u}}{c_0^2} \times \bar{H}_0 = \varepsilon_0 \bar{u} \times \bar{B}_0 \\ \bar{M}_{(\bar{P}_0=0\ ;\ \bar{M}_0=0)} = -\varepsilon_0 \bar{u} \times \bar{E}_0 \end{cases} \tag{66}$$

Din (66) rezultă că starea de polarizare electrică și magnetică (a cărei semnificație fizică o cunoaștem *numai* față de S_0) e relativă la referențialul considerat [1]. Cum polarizațiile sînt mărimi de stare ale corpurilor (substanței) ,acest rezultat e incompatibil cu existența vidului, deoarece ar conduce la afirmarea caracterului relativ al existenței vidului (respectiv substanței) într-o regiune din spațiu. *În cadrul sistemului de premize minkowskian, inexistența vidului e o consecință a cinematicii clasice.* Cu aeasta, am obținut toate trăsăturile caracteristice teoriei lui Hertz și am stabilit că această teorie diferă în fond de electrodinamica macroscopică relativistă, verificată complet de experiență, numai prin bazele ei cinematice. Teoria lui Hertz e, deci unica teorie prerelativistă a fenomenelor electromagnetice compatibilă cu principiul relativității și cu ecuațiile lui Maxwell pentru medii în repaus. *Folosirea acestei teorii în tehnică, în măsura în care efectele relativiste nu sînt importante, este la fel de justificată ca și folosirea mecanicii newtoniene.*

Catedra de electrotehnică
Institutul politehnic București

BIBLIOGRAFIE

[1] *R. Rădulet* — Bazele teoretice ale Electrotehnici, vol. I și II, București, 1955.

[2] *V. Novacu* — Introducere în Electrodinamică, vol. II, București, ed. Academiei R.P.R., 1955.

[3] *V. A. Fock* — Teoria spațiului, timpului și gravitației, București, I.S.R.S., 1962.

[1] Aceasta a și fost interpretarea „paradoxală" a previziunilor bazate pe teoria lui Hertz, referitoare la rezultatele experiențelor lui Roentgen și Wilson. În aceste experiențe ar fi trebuit să subsiste o polarizație electrică (Wilson) sau o magnetizație (Roentgen) relative la S, dacă se opera cu un corp în mișcare complet nepolarizat și nemagnetizat față de S_0.

ÎNTREPRINDEREA POLIGRAFICĂ „GRAFICA NOUĂ" II, BUCUREȘTI — c. 9168

INDICAȚII REDACȚIONALE

Manuscrisele vor fi prezentate în două exemplare, dactilografiate la două rînduri și colaționate de autor. Relațiile matematice și formulele se vor scrie cît mai clar, cu cerneală.

Desenele și graficele vor fi executate în tuș negru pe hîrtie de calc, numerotate și prezentate separat cu un borderou cuprinzînd nr. curent și legenda fiecărei figuri. Locul figurilor se va indica în text. Scrisul pe figuri va fi cel standardizat.

În continuarea textului, pentru fiecare exemplar se va da bibliografia de referință și, pe cîte o foaie separată de hîrtie, cîte un rezumat, în limbile: rusă, franceză, germană și engleză. La bibliografie se va indica în mod obligatoriu: numele și inițialele de prenume ale autorului, titlul și volumul lucrării, editura, locul și anul apariției, sau periodicul în care a apărut, volumul, anul, pagina inițială și finală a articolului.

Bibliografia se va întocmi în ordinea de citare în text și se va numerota curent. Referințele la bibliografie se vor face în text prin indicarea numărului de ordine al lucrării, încadrat în paranteze drepte, de exemplu [5].

Întreaga responsabilitate pentru exactitatea calculelor, datelor experiențelor și afirmațiilor științifice revine numai autorilor. Conducerea revistei își rezervă dreptul de a nu publica materialele necorespunzătoare.

40820

F 1130

REFERÁLVA

R

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC BUCUREȘTI

TOMUL XXVI FASCICOLA 3 ANUL 1964
MAI — IUNIE

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC BUCUREȘTI

apare, cu șase fascicole pe an, în continuarea vechilor periodice științifice: „Bulletin de Mathématiques et de Physique pures et appliquées" și „Buletinul Politehnicei din București".

Organizat pe baze noi, el reflectă în primul rînd activitatea științifică a corpului didactic din Institutul Politehnic București. În limita spațiului disponibil, se pot publica și lucrări științifice ale colaboratorilor dinafara Institutului.

Corespondența și schimburile de publicații cu Redacția și Administrația Buletinului se fac pe adresa:

INSTITUTUL POLITEHNIC BUCUREȘTI
CALEA GRIVIȚEI 132
(cu mențiunea „pentru Buletinul Institutului")

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC BUCUREȘTI

издаётся в шестых годовых выпусках являясь продолжением прежних научных периодических журналов „Bulletin de Mathématiques et de Physique pures et appliquées" и „Buletinul Politehnicei din București".

Составленный на новых основах, он отражает в первую очередь научную деятельность преподавательского состава Бухарестского Политехнического Института. В пределах возможностей будут опубликованы и научно-исследовательские работы и внеинститутсктк сотрудников.

Переписка и обмен периодическими изданиями с Редакцией и Руководством Бюллетеня производятся по адресу:

INSTITUTUL POLITEHNIC BUCUREȘTI
CALEA GRIVIȚEI 132
(с указанием „pentru Buletinul Institutului"

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC BUCUREȘTI

est une publication, continuant les anciens périodiques scientifiques: „Bulletin de Mathématiques et de Physique pures et appliquées" et „Buletinul Politehnicei din București".

Tel qu'il se présente, il reflète en premier lieu l'activité scientifique du corps didactique de l'Institut Polytechnique de Bucarest. On pourra y ajouter aussi, dans la limite des possibilités, les travaux des collaborateurs qui n'appartiennent pas à l'Institut.

L'adresse pour la correspon[illegible]es échanges de publications est:

INS[illegible]TUL POLITEHNIC BUCUREȘTI
CALEA GRIVIȚEI 132
(avec la mention „pentru Buletinul Institutului")

ORSZÁGOS MŰSZAKI KÖNYVTÁRES DOKUMENTÁCIÓS KÖZPONT 1883

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC BUCUREŞTI

TOMUL XXVI — FASCICOLA 3

MAI—IUNIE
1964

COMITETUL DE REDACȚIE

Prof. Dr. *I. Agîrbiceanu*, membru corespondent al Academiei R.P.R.; Prof. Dr. *I. S. Antoniu*, membru corespondent al Academiei R.P.R.; Acad. Prof. *M. Bercovici*; Prof. Dr. *E. Bratu*, membru corespondent al Academiei R.P.R.; Prof. *Gh. Buzdugan*, membru corespondent al Academiei R.P.R.; Acad. Prof. Dr. *E. Carafoli*; Conf. *S. Călin*, cand. *St. Th.*; Acad. Prof. Dr. *D. Dumitrescu*; Conf. *I. Grădișteanu*, cand. Șt. Ec.; Prof. *C. Ionescu-Bujor*; Prof. Dr. *Gh. Manea*, membru corespondent al Academiei R.P.R.; Prof. *N. Manolescu*; Prof. *St. Mantea*; Prof. *N. Marinescu*, cand. Șt. Th; Acad. Prof. Dr. *C. Nenițescu*; Prof. *C. Penescu*, membru corespondent al Academiei R.P.R.; Prof. *M. Postelnicescu*; Acad. Prof. Dr. *R. Rădulet*; Prof. *Al. Rău*; Prof. *Al. Spătaru*; Prof. *L. Stoicescu*; Prof. *I. Zăgănescu*.

Redactor responsabil: Prof. *C. Dinculescu*
Membru corespondent
al Academiei R. P. R.

Sumar

ECONOMIE POLITICĂ

D. Rebuşapcă
Cu privire la determinarea uzurii fizice şi morale a fondurilor fixe în socialism 17

MATEMATICA

I. M. Miu
Sur une généralisation du théorème de la moyenne 25

A. Tănăsescu
Uber ein bizentrales Projektionssystem mit zwei beliebigen Grundflächen 35

N. Mirescu
Asupra deplasărilor de speţa întîia în epura cu diedrul fundamental nul 55

MECANICA

N. Manolescu, P. Antonescu
Mecanisme pentru trasarea de elipse cu viteza periferică constantă . 61

CHIMIE-FIZICĂ

V. Părăuşanu
Die Trennung von Ionen mit naheliegenden physikalisch-chemischen Eingenschaften durch Diffusion in Ionenaustauschern 81

CHIMIE

G. Bejan, I. Niculescu, F. Popescu, A. M. Iancu
Metode rapide de analiză a sărurilor din băile galvanice . . . 87

REZISTENŢA MATERIALELOR

I. Zamfirescu
Asupra unor aspecte ale rezistenţei ţevilor 99

Al. Marinescu, C. Guţă
Asupra vibraţiilor forţate ale rachetelor cu încărcări perturbatoare discontinui 127

ELECTROTEHNICA

C. Nemoianu, Al. Timotin
Efectul pelicular al curentului de aducţie în plăci de conductivităţi şi permeabilităţi diferite în contact în capete 137

Резюме

Д. К. 338.062.212

Д. Ребушапка

Относительно определения физического и морального износа неподвижных фондов при социализме

В первой части работы автор касается теоретических понятий физического и морального износа. Затем анализируются методы определения физического и морального износа с выявлением экономических эффектов физического и морального износа первой и второй формы.

Buletinul Institutului politehnic Bucureşti, Tom. XXVI, fasc. 3/964.

Д. К. 517

И. М. Миу

К одному из обобщений теоремы средней

В данной работе автор дает ещё большие обобщения теорем7 средней Коши, чем в своей-предыдущей работе. Даются обобщенны для некоторого числа функций с одной или несколькими переменя ными.

Обобщенные формы действительны для любых реальных значений определенного числа параметров и могут быть распространены и на интегральное исчисление.

Buletinul Institutului politehnic Bucureşti, Tom. XXVI, fasc. 3/964.

Д. К. 515

А. Тэнэсеску

К вопросу о бицентрической проекционной системе при наличии каких-либо двух основных плоскостей

В настоящей работе описана бицентрическая проекционная система, при помощи которой оказывается возможным установить однозначное соответствие между двумя какими-либо парами точек $A_1(a_1, a_1')$ и $A_2(a_2, a_2')$, лежащими в двойной плоскости эпюры и отличающимися от пар точек Монжа, с таким расчетом, чтобы эти пары точек представляли собой одну и ту же пространственную точку A.

Задача решается в тех случаях когда специальная проекционная система бицентрическая, а имеющиеся две плоскости образуют какой-либо двугранный, прямой или нулевой угол.

Принятая система проекции требует введения некоторых эпюр модулярного типа, основанных на теории полных и неполных изображений.

С некоторых точек зрения эта система проекции является обобщением проекционного способа Монжа.

Buletinul Institutului politehnic Bucureşti, Tom. XXVI, fasc. 3/964.

Summary

D.C. 338.062.212

D. Rebuşapcă

On the Determination of Physical and Moral Wear of the Fixed Funds in Socialism

In the first part of the paper, the author refers to the theoretical notion of determining the phisical and moral wear, pointing out the economic effect of the first and second form of moral wear.

Buletinul Institutului politehnic Bucureşti, Tom. XXVI, fasc. 3/964.

D.C. 517

I. M. Miu

General Conclusions of the Mean Value Theorem.

In this paper, the author, gives to Cauchy's mean value theorem, a greater generalization than in his previous paper. It contains general conclusions for a number of functions with one or more variables.

The generalized forms are available for any actual values given to a number of parameters; and they might be also extended to the integral calculus.

Buletinul Institutului politehnic Bucureşti, Tom. XXVI, fasc. 3/964.

D. C. 515

A. Tănăsescu

On a Bicentral Projection System with any Two Basic Plane.

The paper presents a bicentral projection system which shows that it is possible to determine a diunivocal correspondence between any two points A_1 (a_1, a'_1) and A_2 (a_2, a'_2) from the double plane of the draught, — different from Monge's dipoints, — in such a way that those dipoints should represent the same spatial point A.

The problem is considered solved in cases for which the special projection system is bicentral and the two representation planes form some dihedron right or nil angle.

The adopted representation system necessitates the use of draughts of modular type, based on the theory of complete and incomplete images.

From certain points of view this projection system represents a generalisation of the Monge projecting system.

Buletinul Institutului politehnic Bucureşti, Tom. XXVI, fasc. 3/964.

Д. К. 515

Н. Мирескy

К перемещениям первой степени в эпюре с нулевым основным диэдром

В этой работе автор занимается перемещениями первой степени в эпюре с нулевым основным диэдром; эпюр был введен профессором М. Ботезом.

Находятся графические отношения между фигурой данной в эпюре, и его преобразующей рассматриваемыми перемещениями.

Находятся неизменимые точки этих перемещений и производится применение результатов, полученных в плоскости при винтовом перемещении.

Buletinul Institutului politehnic Bucureşti, Tom. XXVI, fasc. 3/964.

Д. К. 602-3

Н. И. Манолеску и П. Антонеску

Механизмы для проведения эллипсов с постоянной окружной скоростью

Вопрос был поставлен по случаю проектирования механизма управления тележки прибора для сварки эллиптических днищ сосудов, строящихся на заводе „Красная Гривица".

Налагая точке ведомого звена условие постоянной скорости был получен закон движения ведущего звена типа : $= A - B$.

Это движение осуществляется либо при помощи кулачка, профилированного соответствующим образом, либо при помоши эллиптических зубчатых колес.

В обоих случаях угловая скорость ведущего звена является постоянной.

Buletinul Institutului politehnic Bucureşti, Tom. XXVI, fasc. 3/964.

Д. К. 541.132

В. Пэрэушану

Выделение ионов с приближенными физико-химическими свойствами, посредством диффузии, в ионообменники

Указывается на то, что два иона с весьма приближенными физико-химическими свойствами могут быть разделены абсорбцией на ионнообменнике в присутствии одного тернаного иона.

Устанавливаются критерии раздела и условия при которых селективность является максимальной

Buletinul Institutului politehnic Bucureşti, Tom. XXVI, fasc. 3/964.

Д. К. 669.587

Г. Бежан, И. Никулеску, Ф. Попеску, А. М. Янку

Методы быстрого анализа солей, находящихся в гальванических ваннах

В настоящей работе были установлены методы быстрого анализа солей, находящихся в гальванических ваннах. Во избежание сложных отделений ионов, увеличивающих продолжительность определения, были использованы методы комплексометрической дозировки, которые дают возможность определять путём выбора соответствующих условий работы один ион в присутствии остальных.

Работа была исполнена с тем, чтобы прийти на помощь предприятиям, которые выпускают смеси гальванических солей и производят гальванизации.

Buletinul Institutului politehnic Bucureşti, Tom. XXVI, fasc. 3/964.

D.C. 515

Nicolae Mirescu

On First Species Displacements in the Epure with Null Fundamental Dihedral Angle.

In this paper the author deals with first species displacements in the epure with null fundamental dihedral angle, introduced by Prof. Mihail Botez.

The graphic relations between the figure given in the epure and its Laplace transformation, owing to the fact that considered displacements are also given.

The invariants of these desplacements are as well included. The author gives also an application of the results obtained in the plane at the helicoid displacements.

Buletinul Institutului politehnic Bucureşti, Tom. XXVI, fasc. 3/964.

D.C. 621—3

N. I. Manolescu P. Antonescu

Mechanisms for Marking Ellipses with Peripheral Constant Velocity.

The problem (paper) was put with the occasion of projecting a mechanism to drive the barrow of the welding apparatus of elliptical back at the recipients constructed in „Red Grivitza".

The condition of having constant velocity is imposed to the point of the output link and so was obtained the law of motion of the input (driving) link:

$$t = A\varphi - B \sin 2\varphi$$

This motion is obstained either with the help of suitable shaped cams or with the help of elliptical gears.

In both cases the angular velocity of the driving link of the cam or of the elliptical driving gear, must be constant.

Buletinul Institutului politehnic Bucureşti, Tom. XXVI, fasc. 3/964.

D.C. 541.132

V. Părăuşanu

The Separation of Ions with near Physico-Chemical Properties Through Diffusion in Ion Exchangers.

It is shown that two ions with very near physical and chemical properties can be separated by absorbtion on ion exchanger in the presence of a ternary ion. The criteria of separation and conditions of maximum selectivity are established.

Buletinul Institutului politehnic Bucureşti, Tom. XXVI, fasc. 3/964.

D.C. 669.587

G. Bejan, I. Nicolescu, F. Popescu, A. M. Iancu

Rapid Methods of Analysis of Salts in Galvanising Baths.

The present work established rapid methods of analysis of salts in galvanising baths. To avoid difficult ion-separations which increase the duration of determination, there were applied complexonometric determination methods. The same offer an opportunity, by choice of proper working conditions, to determine one ion in presence of the other ones.

This was accomplished in order to assist the enterprises producing mixtures of galvanic sals and effecting galvanisations.

Buletinul Institutului politehnic Bucureşti, Tom. XXVI, fasc. 3/964.

Д. К. 539.4

И. Замфиреску

Относительно некоторых видов прочности труб

В этой статье автор распространяет исследование относительно усилий и деформаций по направлению радиуса (произведенное в его статье „Некоторые виды прочности труб, опубликованной в Бюллетене Бухарестского Политехнического Института" на усилия и деформации по направлению касательной.

Выводы, к которым приходят в этих двух статьях, сходны между собой.

Buletinul Institutului politehnic Bucureşti, Tom. XXVI, fasc. 3/964.

Д. К. 629.19

А. Маринеску К. Гуцэ

„Принудительные вибрации ракет с прерывисто-пертурбационной нагрузкой",

В работе рассматривается проблема принудительных вибраций ракет при наличии прерывисто-пертурбационных сил.

Используя преобразование Лапласа, показывается, что в общем случае, когда ракета представлена как балка с изменяющимся сечением, задача может решаться как интеграл типа Вольтера.

В случае, когда ракета представлена как балка с постоянным сечением, задача решается эффективно, давая выражение одного вида часто встечающихся пертурбационных сил.

Buletinul Institutului politehnic Bucureşti, Tom. XXVI, fasc. 3/964.

Д. К. 621.315

Константин Немояну, Александр Тимотин

Скин — эффект подводящего тока в пластинках разной проводимости и проводимости и проницаемости в стыковом контакте

Авторы исследуют электромагнитное поле внутри двух пластинок в стыковом контакте, изготовленных из разных материалов, через которые проходит гармонический подводящий ток. Полученные решения проверяют передельные условия задачи и становятся равными при частоте $f = 0$ известным решениям в установившемся режиме.

Buletinul Institutului politehnic Bucureşti, Tom. XXVI, fasc. 3/964.

D.C. 539.4

I. Zamfirescu

On Some Aspects of the Tube Strength

In this article, the author wide the study on strains and stresses on the radius-direction (in his article : SOME ASPECTS OF THE TUBE STRENGTH published in the Bucharest Polytechnic Institute Review) on strains and stresses in the direction of the tangent.

— both articles lead to similar conclusions.

Buletinul Institutului politehnic Bucureşti, Tom. XXVI, fasc. 3/964.

D.C. 629.19

Al. Marinescu, C. Guţă

Forced Vibrations of the Rockets with Discontinuous Disturbing Charges.

The work considers the problem of forced vibrations of the rockets in the presence of discontinuous disturbing charges.

By making use of Laplace transformation it is shown that, generally, when the rochet is considered as a beam of a variable section, the problem is reduced to solving a Voltera type integral.

In the case of a rocket considered as a constant section beam, the problem is effectively, solved, by giving the expression of the structure for a type of disturbing force frequently encountered.

Buletinul Institutului politehnic Bucureşti, Tom. XXVI, fasc. 3/964.

D.C. 621.315

Constantin Nemoianu, Alexandru Timotin

Skin Effect in Sheets of Different Conductivities and Permeabilities, Joined in Series

The authors study the electromagnetic field distribution in two butt-joined plates of different materials, conducting an harmonic electric current. The solutions satisfy the problem's boundary conditions and for zero frequency the already known stationary state form.

Buletinul Institutului politehnic Bucureşti, Tom. XXVI, fasc. 3/964.

Résumé

C.D. 338.062.212

D. Rebuşapcă

Sur la détermination de l'usure physique et morale des fonds fixes dans le socialisme.

Dans la première partie de l'ouvrage l'auteur se rapporte aux notions théoriques de l'usure physique et morale. On fait ensuite une analyse des moyens de détermination de l'usure physique et morale et ou insiste à avantage sur les effets économiques de l'usure morale de la première et de la seconde forme.

Buletinul Institutului politehnic Bucureşti, Tom. XXVI, fasc. 3/964.

C.D. 517

I. M. Miu

Sur une généralisation du théorème de la moyenne.

Dans cet ouvrage l'auteur généralise encore plus que dans son ouvrage antérieur le théorème de la moyenne de Cauchy, il donne des généralisations pour un certain nombre de fonctions à une variable et à plusieurs variables.

Les formes généralisées sont valables pour n'importe quelles valeurs réelles données à un nombre de paramètres et elles peuvent être employées aussi dans le calcul intégral.

Buletinul Institutului politehnic Bucureşti, Tom. XXVI, fasc. 3/964.

C.D. 515

A. Tănăsescu

Sur un système bicentral de projection avec deux certains plans fondamentaux

Dans cet ouvrage est présenté un système bicentral de projection avec lequel nous montrons qu'il est possible d'établir une correspondance biunivoque entre deux certains bipoints A_1 (a_1, a'_1) et A_2 (a_2, a'_2) du plan double de l'épure de Monge (les bipoints A_1 et A_2 sont différents par rapport aux bipoints de Monge) ainsi que ces bipoints soient le même point A de l'espace.

Le problème est résolu dans les situations où le système spécial de projection est bicentral et les deux plans de représentation forment un angle dièdre quelconque, un angle dièdre droit ou nul.

Le système de représentation adopté nécessite l'introduction d'épures avec module basées sur la théorie d'images complètes ou incomplètes.

On peut considérer ce système de projection, par raport à certains points de vues, une généralisation du système de projection de Monge.

Buletinul Institutului politehnic Bucureşti, Tom. XXVI, fasc. 3/964.

Zusammenfassung

D.K. 338.062.212

D. Rebuşapcă

In Bezug auf die Bestimmung der physischen und moralischen Abnutzung der fixen Bestände (Fonds) im Sozialismus

Im ersten Teil der Arbeit bezieht sich der Verfasser auf die theoretischen Grundbegriffe der physischen und moralischen Abnutzung. Nachher werden die Methoden für die Bestimmung der physischen und moralischen Abnutzung analysiert, wobei in grösserem Masse die ökonomischen Wirkungen der moralischen Abnutzung der ersten und zweiten Form, hevorgehoben werden.

Buletinul Institutului politehnic Bucureşti, Tom. XXVI, fasc. 3 964.

D.K. 517

I. M. Miu

Eine Verallgemeinerung des Cauchy-Theorems.

In dieser Arbeit gibt der Verfasser grössere Verallgemeinerungen des Theorems des Mittels von Cauchy, als in seiner vorangegangenen Arbeit an.

Es werden Verallgemeinerungen für eine beliebige Anzahl von Funktionen mit einer und mehreren veränderlichen Grössen, angegeben.

Die verallgemeinerten Formen sind für beliebige, einer Anzahl von Parametern gegebenen Werte gültig und sie können auch auf die Integralrechnung erstreckt werden.

Buletinul Institutului politehnic Bucureşti, Tom. XXVI, fasc. 3 964.

D.K. 515

A. Tănăsescu

Uber ein bizentrales Projektionssystem mit zwei beliebigen Grundflächen

In dieser Arbeit ist ein bizentrales Projektionssystem dargestellt, mit dessen Hilfe gezeigt wird, dass eine eindeutige Verbindung zwischen zwei beliebigen Doppelpunkten A_1 (a_1, a'_1) und A_2 (a_2, a'_2) der Doppelfläche des Risses, verschieden von den Doppelpunkten Menge, festzustellen möglich ist, so das diese Doppelpunkte denselben Punkt A im Raum darstellen sollen.

Die Aufgabe ist in denjenigen Fällen gelöst, in welchen das besondere Projektionssystem bizentral ist und die beiden Darstellungsebenen einen beliebigen, einen rechten oder Null-Flächenwinkel bilden.

Das angenommene Darstellungssystem erfordert die Einführung von Rissen modulären Typs, begründet auf der Theorie vollständiger und unvollständiger Bilder.

Von gewissen Standpunkten aus, stellt dieses Projektionssystem eine Verallgemeinerung des Projektionssystems Menge dar.

Buletinul Institutului politehnic Bucureşti, Tom. XXVI, fasc. 3 964.

C.D. 515

Nicolae Mirescu

Sur les déplacements de l'espèce dans l'épure au dièdre fondamental nul

Dans cet ouvrage l'auteur s'occupe des déplacements de l'espèce première, dans l'épure au dièdre fondamental nul, qui a été introduit par le Prof. Mihail Botez.

On trouve des relations graphiques entre la figure donnée dans l'épure et sa transformation par les déplacements considérés.

On trouve des invariances de ces déplacements et l'on fait une application des résultats obtenus dans le plan au déplacement hélicoïdal.

Buletinul Institutului politehnic Bucureşti, Tom. XXVI, fasc. 3/964.

C.D. 621—3

N. I. Manolescu, P. Antonescu

Mécanismes pour le traçage des ellipses à vitesse périphérique constante

Le problème a été à l'occasion de l'exécution d'un projet d'un mécanisme qui doit conduire le chariot de l'appareil de soudure des fonds elliptiques des récipients construits aux Usines „Grivitza Rouge".

En imposant au point de l'élément conduit la condition d'avoir une vitesse périphérique constante on en déduit la loi mouvement de l'élément moteur sous la forme :

$$t = A. \varphi - \sin \varphi$$

Le mouvement donné par cette loi peut être réalisé soit à l'aide d'une came ayant un profil correspondant, soit à l'aide des engrenages elliptiques.

Dans les deux cas mentionnés plus haut la vitesse angulaire de l'élément qui actionne la came ou la roue dentée motrice doit être constante.

Buletinul Institutului politehnic Bucureşti, Tom. XXVI, fasc. 3/964.

C.D. 541.132

V. Părăuşeanu

La séparation des Ions avec des propriétés physico-chimiques rapprochées par diffusion dans les échangeurs d'Ions.

On montre que deux ions avec des propriétés physico-chimiques très rapprochées peuvent être séparés ion ternaire. On établit le critère de séparation et les conditions dans lesquelles la sélection est maximum.

Buletinul Institutului politehnic Bucureşti, Tom. XXVI, fasc. 3/964.

C.D. 669.587

G. Bejan, I. Niculescu, F. Popescu, A. M. Iancu

Anayse rapide des sels dans les bains galvaniques.

L'étude présente a établi les méthodes de l'analyse rapide des sels dans les bains galvaniques. Pour éviter une séparation difficile des ions, qui ferait accroître la durée des déterminations on a appliqué des méthodes de déterminations complexonométriques et qui permettent par le choix des conditions de travail adéquates, la détermination d'un ion en présence des autres.

La présente a été accomplie pour être utile aux entreprises productrices de sels galvaniques et qui effectuent des galvanisations.

Buletinul Institutului politehnic Bucureşti, Tom. XXVI, fasc. 3/964.

D.K 515

N. Mirescu

Uber die Verschiebungen erster Art im Zeichenriss mit Null-Grundquadrant

In dieser Arbeit beschäftigt sich der Autor mit den Verschiebungen erster Art im Zeichenriss mit Null-Grundquadrant, welche von Prof. Mihail Botez eingeführt wurden.

Es werden durch die bezüglichen Verschiebungen die graphischen Beziehungen, zwischen der im Zeichenriss gegebenen Figur und ihrer Transformierten gefunden.

Es werden die Invarianten dieser Verschiebungen gefunden und es wird eine Anwendung der in der Ebene erhaltenen Ergebnisse, auf die schraubenlinienförmige Verschiebung, gemacht.

Buletinul Institutului politehnic Bucureşti, Tom. XXVI, fasc. 3/964.

D.K. 621-3

N. I. Manolescu, P. Antonescu

Getriebe zum Ellipsenzeichnungen mit konstanter Umfangsgeschwindigkeit

Dieses Problem wurde mit der Gelengenheit des Entwurfes einer Getriebe getan, für die Führung der Schweisseinrichtung für elliptische Kesselboden die im Werke „Rote-Grivitza" gebaut sind.

Mit dem Bedingungssatz für den Abtriebsglied eine konstante Umfangsgeschwindigkeit zu haben, folgt für den Antriebsglied folgende Bewegungssatz :

$$t = A\,\varphi - B\,\sin 2\,\varphi$$

Dieser Bewegungssatz ist entweder mit Hilfe einer entschprechend profilierte Nockenscheibe, oder mit elliptischen Zahnräder realisierbar. Im beiden Fälle muss man die Winkelgeschwindigkeit des Antriebsgliedes entweder der Nockenscheibe oder des Zahnrades konstant halten.

Buletinul Institutului politehnic Bucureşti, Tom. XXVI, fasc. 3/964.

D.K. 541.132

V. Păraușanu

Die Trennung von Ionen mit naheliegenden physikalisch-chemischen Eigenschaften durch Diffusion in Ionenaustauschern

Es wird gezeigt dass zwei Ionen mit sehr naheliegenden physikalisch chemischen Eigenschaften durch Absorbtion an einem Ionenaustauscher in Gegenwart eines ternären Ions getrennt werden können. Es werden das Trennungskriterium und die Bedingungen unter denen man die maximale Selektivität erreicht, festgelegt.

Buletinul Institutului politehnic Bucureşti, Tom. XXVI, fasc. 3/964.

D.K. 669.587

G. Bejan, I. Niculescu, F. Popescu, A. M. Iancu

Eine rapide Analyse der Salze im galvanischen Bad

In vorliegender Arbeit wurden Methoden einer rapiden Analyse der Salze im galvanischen Bad festgelegt. Um eine schwierige Iontrennung zu vermeiden, welche die Dauer der Bestimmung verlängert, wurden Methoden komplexonometrischer Bestimmungen angewandt. Dieselben ermöglichen durch Wahl entsprechender Arbeitsbedingungen die Bestimmung eines Ions im Beisein der anderen.

Die Arbeit wurde unternommen um denjenigen Unternehmen zu Hilfe zu kommen, die Mischungen galvanischer Salze erzeugen und Galvanisierungen ausführen.

Buletinul Institutului politehnic Bucureşti, Tom. XXVI, fasc. 3/964.

C.D. 539.4

I. Zamfirescu

Sur certains aspects de la résistance des tubes

Dans cet article l'auteur étend son étude concernant les efforts et les déformations sur la direction du rayon (étude faite dans son article „Quelques aspects de la résistance des tubes, publié dans le Bulletin de l'Institut Polytechnique de Bucarest) aussi aux efforts et aux déformations sur la direction de la tangente.

Les conclusions auxquelles aboutissent les deux articles sont similaires.

Buletinul Institutului politehnic București, Tom. XXVI, fasc. 3/964.

C.D. 629.19

I. Marinescu, C. Guță

„Les vibrations forcées des fusées aux charges perturbatrices, discontinues"

On considère dans l'ouvrage le problème des vibrations forcées des fusées en présence des forces perturbatrices discontinues.

En utilisant la transformation de Laplace, on démontre qu'en général, lorsque la fusée est considérée une poutre à section d'une intégrale de type Voltéra.

Dans le cas de la fusée considérée une poutre à section constante, le problème se solutionne effectivement en donnant l'expression de la structure pour un genre de force perturbatrice souvent rencontrée.

Buletinul Institutului politehnic București, Tom. XXVI, fasc. 3/964.

C.D. 621.315

C. Nemoianu, A. Timotin

L'effet pelliculaire du courant d'adduction en plaques de conductibilités et perméabilités différentes et en contact à bouts.

Les auteurs étudient le champ électromagnétique à l'intérieur des plaques confectionnées en matériaux différents et en contact à bouts, parcourues d'un courant harmonique de conduction.

Les solutions obtenues vérifient les conditions à la limite du problème et elles sont, pour la fréquence $f = o$, égales aux solutions connues du régime stationnaire.

Buletinul Institutului politehnic București, Tom. XXVI, fasc. 3/964.

D.K. 539.4

I. Zamfirescu

Über einige Ansichten der Rohrfestigkeit

In dem vorliegenden Artikel erstreckt der Verfasser das Studium bezüglich der Radialspannungen-und Dehnungen (in seinem im Bulletin des Politechnischen Instituts Bucureşti herausgegebenen Artikel ÜBER MANCHE ANSICHTEN DER ROHRFESTIGKEIT) auf die Tangentialspannungen-und Dehnungen.

Beide Artikel führen zu ähnlichen Schlussfolgerungen.

Buletinul Institutului politehnic Bucureşti, Tom. XXVI, fasc. 3/964.

D.K. 629.19

Al. Marinescu, C. Guţă

„Die bedingten Schwingungen der Raketen mit unstätigen Störbelastungen"

In der Arbeit wird das Problem der bedingten Schwingungen der Raketen in Gegenwart der unstätigen Störkräfte, betrachtet.

Durch Anwendung der Umwandlung (Transformierung) von Laplace wird gezeigt, dass im allgemeinen Falle, wenn die Rakete als Träger mit variablem Querschnitt betrachtet ist, das Problem effektiv gelöst wird indem der Ausdruck der Struktur für eine Art von oft begegneter Störkraft gegeben wird.

Buletinul Institutului politehnic Bucureşti, Tom. XXVI, fasc. 3/964.

D.K. 621.315

C. Nemoianu, Al. Timotin

Die Stromverdrängung des Adduktionsstroms in Platten von verschiedener Leistungsfähigkeit und verschiedener Durchdringlichkeit, mit Spitzenberührung

Die Verfasser beschäftigen sich mit dem elektromagnetischen Feld im Inneren der aus verschiedenen Materialien verfertigten und von einem harmonischen Strom durchdrungenen Platten mit Spitzenberührung.

Die ermittelten Lösungen bestätigen die Grenzbedingungen des Problems und gleichen, für die Frequenz f = o, den aus den stationären Einrichtungen bekannten Lösungen.

Buletinul Institutului politehnic Bucureşti, Tom. XXVI, fasc. 3/964.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC BUCUREȘTI
Tomul XXVI — 1964, Fascicola 3

ECONOMIE POLITICĂ

C.Z. 338.062.212

CU PRIVIRE LA DETERMINAREA UZURII FIZICE ȘI MORALE A FONDURILOR FIXE ÎN SOCIALISM *)

DIMITRIE REBUȘAPCA

În procesul de producție a bunurilor materiale, fondurile fixe se uzează. Se disting două feluri de uzură a fondurilor fixe: *uzură fizică și morală.*

Prin uzură fizică înțelegem acea parte din valoare pe care fondurile fixe o transmit, în medie, treptat, prin consumarea lor produsului, pe măsură ce-și pierd valoarea de întrebuințare.

Uzura fizică este cauzată fie de factori care țin direct de procesul de producție, fie de factori naturali. În procesul de producție, uzura este provocată de funcționarea fondurilor fixe. Dar fondurile fixe se uzează și în cazul neîntrebuințării lor. Sub acțiunea forțelor naturii, fierul ruginește, lemnul putrezește; umezeala, vîntul, căldura etc. provoacă degradarea mijloacelor de muncă. De cele mai multe ori uzura fizică este provocată de ambele cauze care acționează concomitent.

Dar în afară de uzura fizică, așa după cum s-a arătat mai sus, fondurile fixe sînt supuse și unei uzuri morale.

Prin uzură morală se înțelege deprecierea (scăderea valorii) mijloacelor de muncă, înaintea uzurii lor fizice complete, ca urmare a apariției altor mijloace de muncă de același gen dar mai ieftine sau mai perfecționate. Și uzura morală a mijloacelor de muncă se manifestă sub două forme:

Prima formă a uzurii morale constă în deprecierea acestora datorită apariției și utilizării unor mijloace de muncă de același nivel tehnic dar mai ieftine, ca urmare a creșterii productivității muncii în industria constructoare de mașini. Noii valori (mai mici) a mijloacelor de muncă îi corespunde aceeași valoare de întrebuințare, deoarece atît cu mijloacele de muncă vechi (mai scumpe) cît și cu cele noi (mai ieftine) se obține aceeași productivitate a muncii. De aici reese că cheltuielile de producție ale între-

*) Lucrare comunicată la sesiunea științifică a cadrelor didactice din Institutul politehnic București 22—23 februarie 1964.

prinderilor care folosesc mijloacele de muncă noi vor fi mai mici faţă de cele care folosesc vechile mijloace de muncă.

Cea de a 2-a formă a uzurii morale este determinată de apariţia şi utilizarea unor mijloace de muncă mai perfecţionate din punct de vedere tehnic şi care asigură o productivitate a muncii mai mare în comparaţie cu cele vechi. In aceste condiţii, vechile mijloace de muncă trebuiesc înlocuite chiar înainte de a se fi uzat complet din punct de vedere fizic.

Problema care se ridică în legătură cu cea de a 2-a formă a uzurii morale este aceea de a găsi căile cele mai bune de recuperare a valorii mijloacelor de muncă scoase din producţie şi neamortizate în totalitatea lor.

In socialism, datorită progresului tehnic continuu şi rapid uzura morală a mijloacelor de muncă are un caracter obiectiv.

Ţinînd seama de procesul obiectiv al uzurii morale, partidul şi statul nostru iau măsuri de înlocuire a vechilor mijloace de muncă cu unele noi la nivelul tehnicii mondiale, precum şi modernizarea celor existente în fabricaţie şi în funcţiune.

Totodată partidul nostru a luat măsuri în vederea îmbunătăţirii muncii de proiectare şi de cercetare ştiinţifică, arătînd că în această direcţie trebuie să se pornească de la ceea ce este deja cucerit de gîndirea ştiinţifică, pe plan mondial, îmbogăţind şi dezvoltînd prin propriile noastre cercetări. Astfel se vor realiza importante economii de timp şi de bani, evitînd să se inventeze ceea ce s-a inventat deja [5]. Recuperarea valorii fondurilor fixe uzate se face prin amortizare şi formarea pe această bază a fondului de amortizare. Problema grea care se pune legat de aceasta este aceea de a oglindi în cotele de amortizare în modul cel mai just, uzura fizică şi morală a fondurilor fixe. Numai prin determinarea ştiinţifică a uzurii fizice şi morale şi reflectarea ei în fondul de amortizare se poate asigura la timp şi la nivelul tehnicii celei mai înalte înlocuirea mijloacelor de muncă uzate.

In prezenta lucrare ne vom ocupa, de unele aspecte ale determinării uzurii fizice şi morale, exprimîndu-ne totodată părerea referitor la discuţiile ce se poartă în literatura de specialitate privind această problemă.

In determinarea uzurii fizice a fondurilor fizice se pot folosi mai multe metode, dintre care menţionăm pe cele mai importante.

a) *Metoda cercetării stării tehnice reale a mijloacelor de muncă*, care permite determinarea într-o anumită măsură a gradului de uzură fizică a acestora.

b) Prin metoda duratei de funcţionare a mijloacelor de muncă putem determina uzura fizică comparînd *duratele expirate* (consumate) cu *duratele complete* (durabilitatea materială a mijloacelor de muncă).

De exemplu, dacă durata expirată, sau perioada cît a funcţionat un mijloc de muncă este de cinci ani, iar durata completă sau normală de funcţionare este de zece ani, uzura fizică a acestuia se va determina $\frac{5}{10} \cdot 100 = 50\%$.

Dar important este de a determina gradul de uzură reală a mijloacelor de muncă adică şi a uzurii morale a acestora. Uzura reală se poate stabili prin raportarea duratei expirate (consumate) la durata economică.

care se stabilește ținînd seama și de uzura morală. În cazul nostru dacă presupunem că durata economică este de șapte ani și nu de zece, atunci, uzura reală va fi de : $\frac{5}{7} \cdot 100 = 71\%$.

Problema cea mai grea este tocmai aceasta de a stabili duratele economice de funcționare a mijloacelor de muncă. Considerăm că în această privință un rol important ar putea avea balanțele de punere în funcțiune a mijloacelor de muncă în perspectivă — din care rezultă mijloacele de muncă ce vor intra în funcțiune într-o anumită perioadă de timp înlocuind cele uzate.

c) *Metoda lucrărilor efectuate* permite determinarea uzurii fizice a fondurilor fixe prin raportarea *volumului lucrărilor efectuate la volumul real de lucrări* (adică volumul lucrărilor efectuate pînă la o anumită dată la care se adaugă lucrările ce se prevăd a se efectua pînă la scoaterea din funcțiune a mijlocului de muncă respectiv).

Dar în determinarea uzurii fizice a mijloacelor de muncă trebuie să se țină seama nu numai de valoarea de întrebuințare a acestora, ci și de valoarea lor, avînd în vedere că acestea sînt mărfuri, și deci reprezintă unitatea celor doi factori ai mărfii.

Ori valoarea mijloacelor de muncă se schimbă în mod continuu ca urmare a creșterii productivității muncii în industria constructoare de mașini.

Deci determinarea uzurii fizice a mijloacelor de muncă trebuie făcută într-o strînsă legătură cu uzura morală a acestora. De aceea în cele ce urmează, vom căuta să elucidăm unele probleme care se ridică legat de aceasta din urmă.

Ne vom ocupa în primul rînd de problema determinării uzurii morale de forma I-a. Să presupunem că o mașină-unealtă are o valoare inițială de 80.000 lei, cu o durată normală de funcționare de zece ani, și un randament de 4.000 piese pe an. Peste o anumită perioadă de timp, ca urmare a creșterii productivității muncii în industria constructoare de mașini valoarea acesteia scade de la 80.00 lei la 60.000 lei. În aceste condiții menținerea în producție a mașinilor unelte mai scumpe duce la creșterea cheltuielilor de producție și reducerea rentabilității întreprinderilor care folosesc mașinile vechi, uzate din punct de vedere moral în comparație cu cele care întrebuințează mașini-unelte noi, mai ieftine.

Aceasta se reflectă în cota de amortizare ce se repartizează pe fiecare piesă produsă de mașina unealtă respectivă. Din calculul făcut reese că în cazul mașinii *A* (care valorează 80.000 lei) cota de amortisment ce se va repartiza pe fiecare piesă produsă va fi de 2 lei, iar în cazul mașinii *B* (care valorează 60.000 lei) cota de amortisment va fi de 1,50 lei. Această diferență de 0,50 lei pe fiecare piesă produsă, reprezintă o economie anuală de 2.000 lei.

Înseamnă că înlocuind mașina *A* cu *B* mai ieftină diferența de valoare dintre acestea de 20.000 lei ar putea fi recuperată, în timp de 10 ani ținînd seama de economiile de 2.000 lei ce se realizează anual. Prin urmare diferența de valoare de 20.000 lei nu trebuie acoperită prin mărirea cotelor

de amortizare aşa cum propun unii economişti. Pe de altă parte nu este necesară recuperarea valorii de 20.000 lei, prin mărirea cotei de amortizare, deoarece vechea maşină care valora 80.000 lei ieftinindu-se la 60.000 lei, înseamnă că în momentul înlocuirii ei din punct de vedere material nu este necesară o valoare de 80.000 lei ci numai de 60.00 lei (valoarea de înlocuire). Adică cheltuielile de muncă socialmente necesare în perioada respectivă pentru reproducţia simplă a maşinii-unelte sînt de 60.000 lei şi nu de 80.000 lei.

Legat de aceasta se ridică şi o altă problemă şi anume: în condiţiile în care mijloacele de muncă se ieftinesc, deci suferă o uzură morală de forma [I - i], la ce valoare trebuieşte calculat amortismentul, la valoarea iniţială sau la cea de înlocuire?

Părerea noastră este că în vederea oglindirii cheltuielilor de muncă reale în valoarea noului produs este necesar să se determine amortismentul după valoarea de înlocuire — adică ţinînd seama de uzura morală a mijloacelor de muncă.

Greutatea constă însă, de a determina şi a cunoaşte în diferite momente această valoare de înlocuire a mijloacelor de muncă. Considerăm drept calea cea mai eficace de determinare a valorii de înlocuire a mijloacelor de muncă — reevaluarea acestora. Prin reevaluarea fondurilor fixe se poate determina valoarea de înlocuire a acestora, care ar permite determinarea justă a amortismentului, a cheltuielilor materiale de producţie şi valoarea nou creată, a proporţiei juste dintre fondul de acumulare şi fondul de consum etc.

Prima reevaluare a fondurilor fixe s-a făcut în ţara noastră în anul 1949. De atunci însă s-au produs schimbări importante: volumul lor a crescut, structura şi preţurile s-au schimbat. Preţurile mijloacelor de muncă au scăzut aproape la jumătate începînd cu 1 ianuarie 1955 ca urmare a eliminării impozitului pe circulaţia mărfurilor din preţul cu ridicata. Ori, evidenţa valorică a mijloacelor de muncă se ţine la nivelul preţurilor de achiziţii, ceea ce determină ca întreprinderile care au achiziţionat mijloace de muncă înainte de schimbarea preţurilor, şi după aceasta, să aibe o situaţie inegală din punct de vedere al nivelului preţului de cost şi al rentabilităţii. Această situaţie s-a accentuat în urma schimbării preţurilor la mijloacele de muncă începînd cu 1 ianuarie 1963.

Reiese prin urmare că ar fi foarte util să se efectueze reevaluări ale mijloacelor de muncă la intervale cît mai mici, ceea ce ar oglindi într-un mod just schimbările intervenite în valoarea acestora. Ori reevaluările se fac la intervale mai mari de timp: 10, 15, 20 de ani şi la preţuri din perioada dată.

Pentru a elimina aceste neajunsuri economiştii în discuţiile purtate au propus diferite soluţii.

Dintre acestea, apreciem ca justificată din punct de vedere economic şi realizabilă din punct de vedere practic, metoda determinării valorii de înlocuire, *prin corelarea anuală a valorilor iniţiale a mijloacelor de muncă cu preţurile noi ale mijloacelor de muncă, cu ajutorul unor indici ai preţurilor*. Valoarea de înlocuire a mijloacelor de muncă se poate determina şi în viitor, ţinînd seama de *indicele de creştere anuală a productivităţii*

muncii în industria constructoare de mașini. După această metodă devalorizarea medie anuală a mijloacelor de muncă va fi egală cu diferența dintre valoarea inițială și valoarea de înlocuire din anul următor.

De exemplu să presupunem că o locomotivă Diesel-electrică are o valoare inițială de 4.000.000 lei și o durată de funcționare de 20 ani și dacă în industria constructoare de locomotive Diesel-electrice se prevede o creștere a productivității muncii anuale cu 5%, valoarea de înlocuire din anul următor se poate determina după următoarea formulă :

$$Vî = \frac{Vi}{100+p'} \cdot 100$$

În care Vî = valoarea de înlocuire ; Vi = valoarea inițială p' = creșterea productivității muncii în anul pentru care se calculează valoarea de înlocuire. Deci Vî în anul următor va fi de : $\frac{4.000.000}{100+5} 100 = 3.809.523$. Prin urmare asupra acestei valori de 3.809.523 lei trebuie calculată cota de amortizare, pentru a stabili uzura reală a fondurilor fixe.

Strîns legată de problema determinării valorii de înlocuire a fondurilor fixe este și aceea : dacă este justificat din punct de vedere economic să se amortizeze în continuare fondurile fixe, a căror valoare a fost transferată asupra noilor produse prin amortizare.

În această privință găsim o indicație prețioasă în Capitalul lui K. Marx și anume : „Se vede deci în mod clar că un mijloc de producție nu transmite niciodată produsului mai multă valoare decît pierde în procesul de muncă prin distrugerea propriei sale valori de întrebuințare". [1]

Pornind de la această indicație marxistă considerăm că a continua amortizarea fondurilor fixe după ce acestea și-au transferat valoarea lor asupra produselor, înseamnă a încălca cerințele legii valorii, încărcînd prețul de cost cu o valoare care nu există în realitate. După cum se știe destinația cotelor de amortizare este aceea de a asigura înlocuirea din punct de vedere material, fondurile fixe uzate. Ori continuînd amortizarea fondurilor fixe care și-au transferat valoarea lor, înseamnă să se creeze un fond de amortizare mult mai mare decît valoarea acestora, și deci n-ar corespunde destinației lui. Unii economiști consideră în mod greșit, că fondurile fixe a căror valoare a fost transferată asupra noilor produse n-ar mai avea valore. Ei confundă amortizarea completă a fondurilor fixe cu transferarea completă a valorii lor asupra noilor produse. Admițînd această posibilitate înseamnă admiterea principiului după care măsura în care se amortizează fondurile fixe, ar pierde în aceeași măsură și valoarea lor. De aici mai departe rezultă că mijlocul de muncă, care și-a pierdut complet valoarea de întrebuințare (fiind scos din producție) dar a cărui valoare n-a fost complet transmisă asupra produselor prin amortizare ar mai avea valoare. Ori valoarea nu poate exista fără valoare de întrebuințare. Fondurile fixe își pierd valoarea complet numai o dată cu pierderea valorii lor de întrebuințare.

Să analizăm în cele ce urmează, unele probleme care se ridică în legătură cu *uzura morală de forma a doua*. În momentul apariţiei mijloacelor de muncă noi cu un randament mai mare, ca şi în cazul uzurii morale de forma întîi, utilizarea mijloacelor învechite devine neavantajoasă din punct de vedere economic. Preţul de cost al produselor care se produc cu mijloace de muncă mai vechi este mai ridicat în comparaţie cu cel al produselor ce se obţin cu mijloace de muncă noi.

Prin introducerea unui mijloc de muncă nou mai perfecţionat, şi scoaterea din funcţiune a celui vechi, înainte de a se fi uzat complet din punct de vedere fizic, nu înseamnă o pierdere pentru economia naţională. Prin introducerea mijloacelor de muncă mai perfecţionate se realizează o reducere a preţului de cost al produselor ca urmare a economisirii de muncă vie şi materializată, ceea ce duce la creşterea beneficiilor care acoperă valorile rămase neamortizate fără mărirea cotei de amortizare.

În vederea determinării în mod just a uzurii morale de forma a doua trebuie să se ţină seama de creşterea productivităţii muncii ce se realizează, ca urmare a introducerii mijloacelor de muncă perfecţionate precum şi de raportul dintre valoarea mijloacelor de muncă noi şi cele vechi.

Ţinînd seama de acestea pot apare trei situaţii în care:

— Valoarea mijloacelor de muncă mai perfecţionate din punct de vedere tehnic este egală cu valoarea celor vechi;

— Valoarea mijloacelor de muncă noi este mai mică decît al celor vechi şi

— Valoarea mijloacelor de muncă noi mai perfecţionate este mai mare decît valoarea celor vechi.

Comparînd economiile ce se pot obţine cu mijloacele de muncă noi mai perfecţionate egale sau mai mici ca valoare decît cele vechi, cu valoarea neamortizată a mijloacelor de muncă vechi scoase din funcţiune, iese în evidenţă posibilitatea recuperării acesteia într-un termen relativ scurt. Probleme mai dificile se ridică în legătură cu cel de al treilea caz. Dar şi în această situaţie, considerăm că este posibilă recuperarea valorii neamortizate prin economiile care se obţin introducînd mijloacele de muncă perfecţionate. Acest lucru reese din următorul calcul:

Să presupunem că o locomotivă cu aburi care valorează 1.000.000 lei, cu o durată de funcţionare de 20 ani şi cu ajutorul căreia se realizează o producţie de 100.000 t/km anual este înlocuită cu o locomotivă Diesel-electrică ce valorează 4.000.000 lei, avînd aceeaşi durată de funcţionare, însă o capacitate de producţie de 500.000 t/km pe an.

Calculînd amortismentul anual asupra locomotivei cu aburi, reese că acesta este de 0,50 lei pe t/km iar în cazul locomotivei Diesel-electrice de 0,40 lei pe t/km. Deci economia anuală realizată la amortisment, prin introducerea locomotivei Diesel-electrice este de 50.000 lei (500.000. 0,10 lei).

Presupunem că în momentul scoaterii din funcţiune locomotiva cu aburi este amortizată în proporţie de 80% (800.000 lei), iar restul valorii de 200.000 lei a rămas neamortizată. Raportînd valoarea neamortizată de 200.000 lei la economiile anuale ce se realizează prin reducerea cotei

de amortizare anuale ca urmare a introducerii locomotivei Diesel-electrice determinăm termenul în care se poate recupera această valoare, care în cazul nostru este de 4 ani $\left(\frac{200.000}{50.000}\right)$.

Dacă ținem seama și de economiile de forță de muncă, combustibil ș.a. materiale, ce se realizează prin introducerea tracțiunii Diesel-electrice, termenul de recuperare va fi mult mai redus. În cazul în care însă valoarea neamortizată nu poate fi recuperată prin economiile ce se realizează, aceasta se acoperă din venitul național. În vederea prevenirii pierderilor ce pot apărea în urma uzurii morale de forma a doua, o serie de economiști propun să se formeze un fond de modernizare a mijloacelor de muncă mai vechi. În ceea ce privește izvorul acestui fond, se propun diferite posibilități. Unii susțin să se preleve cca. 5—6% din beneficiul realizat, s-au din venitul național, iar alții propun ca acesta să fie constituit prin includerea sa în prețul de cost.

Considerăm că propunerea ca acest fond să fie format din beneficii, nu este justificată deoarece unele întreprinderi care nu realizează beneficii, ar însemna să fie lipsite de posibilitatea efectuării unor modernizări care să prevină pierderile de pe urma uzurii morale de forma a doua. Nici propunerea prelevării unei părți din venitul național nu este justificată, deoarece pe deoparte s-ar imobiliza o parte din venitul național, în cazul cînd n-ar fi necesară modernizarea, iar pe de altă parte, se cunoaște că valorile nerecuperate prin amortizare se acoperă în ultima instanță tot din venitul național așa că apare inutilitatea formării unui asemenea fond care ar complica formele de evidență.

Din cele arătate pînă aici rees următoarele:

În primul rînd că în socialism uzura morală are un caracter obiectiv. Amortizarea fondurilor fixe trebuie calculată la valoarea de înlocuire și nu la cea inițială, deoarece altfel fondul de amortizare n-ar oglindi uzura reală a fondurilor fixe. Un rol important în determinarea valorii de înlocuire, îl are reevaluarea fondurilor fixe prin care se determină uzura fizică și morală a acestora. Între două reevaluări se recomandă a se corela valorile inițiale ale mijloacelor de muncă cu nivelul prețurilor existente.

La determinarea uzurii morale și a urmărilor ei nu trebuie luat în considerare numai faptul dacă se recuperează sau nu valorile mijloacelor de muncă vechi, ci trebuie avut în vedere totodată și avantajele ce se realizează prin introducerea mijloacelor tehnice avansate. În economia socialistă mijloacele de muncă sînt folosite complet, ceea ce permite ca amortizarea acestora să aibe loc într-un termen scurt, prin repartizarea amortismentului la un număr mai mare de produse și nu prin mărirea cotei de amortizare și în consecință al prețului de cost. În cazul cînd fondul de amortizare nu acoperă valoarea mijloacelor de muncă scoase din funcțiune și neamortizate complet ca urmare a introducerii unor mijloace mai perfecționate, aceasta se acoperă din venitul național, care crește ca urmare a introducerii tehnicii noi în producție.

Deci progresul tehnic este cauza uzurii morale, şi el este în acelaş timp acela care permite obţinerea unor economii ce acoperă şi depăşesc valorile mijloacelor de muncă scoase din funcţiune şi neamortizate în întregime.

Catedra de economie politică
Institutul politehnic Bucureşti

BIBLIOGRAFIE

1. *K. Marx* — Capitalul, vol. I, Editura P.M.R., 1948, pag. 206—208; 373.
2. *K. Marx* — Capitalul, vol. II, Editura P.M.R., 1951, pag. 130—132; 196—197; 204—205.
3. — — Hotărîrea C.C. al P.M.R. şi a C.M. al R.P.R. cu privire la ridicarea nivelului tehnic al producţiei, Editura politică 1960.
4. *Gh. Gheorghiu-Dej* — Raport la cel de al III-lea Congres al P.M.R., Editura politică, 1960.
5. *Gh. Gheorghiu-Dej* — Cuvîntarea la Conferinţa Organizaţiei de Partid a oraşului Bucureşti. Editura politică, 1964.
6. *A. Vainer* — Probleme ale stabilirii cotelor de amortizare în industria R.P.R., Rev. Probleme Economice Nr. 2 din 1958.
7. *Negulescu C.* — Cu privire la categoria economică a uzurii morale şi amortizarea mijloacelor de muncă. Rev. Probl. Ec. Nr. 7, din 1958.
8. *S. Zeigher* — În legătură cu uzura morală a mijloacelor de muncă şi influenţa acesteia asupra amortizărilor. Probleme Economice Nr. 10/1959.
9. *I. Iţicovici* — Cu privire la amortizarea fondurilor fixe. Probleme Economice Nr. 6/1960.
10. *P. Jica* — În legătură cu determinarea cifrică a uzurii morale a fondurilor fixe în economia socialistă. Probleme Economice Nr. 12/1961.
11. *R. Katz* — Perfecţionarea metodelor de stabilire şi planificare a amortizării fondurilor fixe. Probleme Economice Nr. 2 din 1962.
12. I. *Ionescu* — În legătură cu determinarea cifrică a uzurii fizice şi amortizării fondurilor fixe. Probl. Ec. Nr. 5/1962.
13. *R. Katz* — Cu privire la reevaluarea fondurilor fixe. Probleme Economice Nr. 1/1963.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC BUCUREȘTI
Tomul XXVI — 1964, Fascicola 3

MATEMATICĂ

C.Z. 517

SUR UNE GÉNÉRALISATION DU THÉORÈME DE LA MOYENNE

I. M. MIU

Dans notre ouvrage [1], nous avons indiqué une généralisation du théorème de la moyenne de Cauchy pour trois fonctions d'une variable et pour trois fonctions de n variables.

Dans ce qui suit, nous donnerons des généralisations pour un certain nombre de fonctions avec une ou plusieurs variables.

§ 1. *Le cas des fonctions d'une variable*

a) Considérons les fonctions $f_1(x)$, $f_2(x) \dots f_p(x)$, continues sur l'intervalle fermé $[a, b]$ et l'ensemble de points :

$$E = \{a_1 = a < a_2 < a_3 < \cdots < a_q = b\}.$$

Les fonctions considérées sont dérivables sur les intervalles $\delta_i = (a_i, a_{i+1})$, $i = 1, 2, \cdots, q-1$.

Soit la fonction auxiliaire :

$$F(x) = f_1(x)\alpha_1 + f_2(x)\alpha_2 + \cdots + f_{p-1}(x)\alpha_{p-1} + f_p(x), \tag{1}$$

où les valeurs $\alpha_1, \alpha_2 \dots \alpha_{p-1}$, sont différentes de zéro, et déterminons les nombres $\alpha_1, \alpha_2 \dots \alpha_{p-1}$. de telle sorte que $F(x)$ s'annule dans les points $a_1, a_2 \dots a_q$.

On aura :

$$\left.\begin{aligned} f_1(a_1)\alpha_1 + f_2(a_1)\alpha_2 + \cdots + f_{p-1}(a_1)\alpha_{p-1} + f_p(a_1) &= 0 \\ f_1(a_2)\alpha_1 + f_2(a_2)\alpha_2 + \cdots + f_{p-1}(a_2)\alpha_{p-1} + f_p(a_2) &= 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \\ f_1(a_q)\alpha_1 + f_2(a_q)\alpha_2 + \cdots + f_{p-1}(a_q)\alpha_{p-1} + f_p(a_q) &= 0 \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Nous considérons que les équations (2) donnent pour $\alpha_1, \alpha_2 \dots \alpha_{p-1}$ un système de valeurs différentes de zéro.

Nous utilisons le théorème suivant (que nous avons indiqué dans [1], [2[, [3]) :

Soit $f(x)$ une fonction continue sur l'intervalle fermé $[a, b]$ et dérivable sur (a, b), et deux fonctions $\varphi(x)$, $\psi(x)$ définies sur $[a, b]$ avec valeurs finies et continues sur (a, b).

Si $f(a) = f(b) = 0$ et la fonction $\varphi(x)$ n'a aucun zéro dans l'intervalle [a, b], alors la fonction $\Phi(x) = \Psi(x)f(x) + \varphi(x)f'(x)$ a au moins un zéro dans l'intervalle (a, b).

Il en résulte, que si nous déterminos un système de valeurs $\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_{p-1}$ différentes de zéro du système (2), alors dans chaque intervalle δ_i, $i = 1,2, \ldots q-1$, il existe au moins une valeur $c_i \in \delta_i$ pour laquelle nous avons :

$$\psi(c_i) F(c_i) + \varphi(c_i) F'(c_i) = 0, \quad i = 1, 2, \cdots q-1 \tag{3}$$

Comme la fonction $\varphi(x)$ ne s'annule pas dans l'intervalle $[a, b]$, nous posons :

$$\psi(c_i) : \varphi(c_i) = \lambda,$$

et les équations (3) deviennent :

$$\lambda F(c_i) + F'(c_i) = 0 \tag{3'}$$

Supposons $q = p - 1$ et avec (3') et (2) nous avons le système :

$$\left.\begin{array}{c} [\lambda f_1(c) + f_1'(c)]\alpha_1 + [\lambda f_2(c) + f_2'(c)]\alpha_2 + \cdots \\ \cdots + [\lambda f_{p-1}(c) + f_{p-1}'(c)]\alpha_{p-1} + \lambda f_p(c) + f_p'(c) = 0 \\ f_1(a_1)\alpha_1 + f_2(a_1)\alpha_2 + \cdots + f_{p-1}(a_1)\alpha_{p-1} + f_p(a_1) = 0 \\ f_1(a_2)\alpha_1 + f_2(a_2)\alpha_2 + \cdots + f_{p-1}(a_2)\alpha_{p-1} + f_p(a_2) = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ f_1(a_{p-1})\alpha_1 + f_2(a_{p-1})\alpha_2 + \cdots + f_{p-1}(a_{p-1})\alpha_{p-1} + f_p(a_{p-1}) = 0 \end{array}\right\} \tag{4}$$

Comme le système (2) donne pour $\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_{p-1}$ valeurs différentes de zero, il résulte la généralisation suivante du théorème de la moyenne :

Théorème I

Soit les fonctions $f_1(x)$, $f_2(x), \ldots f_p(x)$, définies sur unè intervalle I et continues sur l'intervalle $[a, b] \subset I$.

Considérons l'ensemble des points :

$$E = \{a_1 = a < a_2 < a_3 < \cdots < a_{p-1} = b\},$$

et supposons que les fonctions données soient dérivables sur les intervalles $\delta_i = (a_i, a_{i+1})$, $i = 1, 2, \cdots p-2$.

Pour chaque valeur $\lambda \in (-\infty, +\infty)$ il existe au moins une valeur c en chaque intervalle δ_i, pour laquelle nous avons la relation :

$$\begin{vmatrix} \lambda f_1(c) + f_1'(c) & \lambda f_2(c) + f_2'(c) & \cdots & \lambda f_p(c) + f_p'(c) \\ f_1(a_1) & f_2(a_1) & \cdots & f_p(a_1) \\ f_1(a_2) & f_2(a_2) & \cdots & f_p(a_2) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ f_1(a_{p-1}) & f_2(a_{p-1}) & \cdots & f_p(a_{p-1}) \end{vmatrix} = 0 \qquad (5)$$

Observation. *Si* les équations (2) donnent un système de valeurs $\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_{p-1}$ dont les valeurs $\alpha_{j_1}, \alpha_{j_2} \cdots \alpha_{j_i}$ sont nulles, alors au lieu de déterminant (5) nous avons un déterminant analogue d'ordre $p-i$, où ne figurent pas les valeurs des fonctions $f_{j_1}, f_{j_2}, \cdots f_{j_i}$ et ses dernières $p-i-1$ lignes sont formées avec les valeurs des autres fonctions dans $p-i-1$ points d'ensemble E.

b) Aussi avons nous le

Théoreme I *

Soit les fonctions $f_1(x)$, $f_2(x), \ldots f_p(x)$, définies sur un intervalle I, continues sur l'intervalle $[a, b] \subset I$, et l'ensemble des points $E = \{a_1 = a < a_2 < a_3 < \ldots < a_{p-1} = b\}$.

Notons les intervalles $\delta_j = (a_j, a_{j+1})$, $j = 1, 2, \cdots p-2$.

Les fonctions considérées sont dérivables sur un certain nombre d'intervalles δ_{ir}, $r = 1, 2, \cdots k$.

A contition que les équations (2) donnent un système de valeurs $\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_{p-1}$ différentes de zéro, le théorème affirme, que pour chaque valeur $\lambda \in (-\infty, +\infty)$, il existe au moins une valeur c dans chaque intervalle δ_{ir} pour laquelle nous avons la relation (5).

c) Soit aussi les fonctions $f_1(x)$, $f_2(x) \ldots f_p(x)$, continues sur $[a, b]$ et dérivables sur les intervalles $\delta_i = (a_i, a_{i+1})$,

$$i = 1, 2, \cdots q-1, \text{ où } a_1 = a < a_2 < a_3 < \cdots < a_q = b.$$

On considère les fonctions $\psi_i(x)$, $\varphi_i(x)$, $i = 1,2, \ldots \quad q-1$, définies respectivement avec valeurs finies sur $\Delta_i = [a_i, a_{i+1}]$ et continues respectivement sur les intervalles δ_i, et les fonctions $\varphi_i(x)$ n'ont aucun zéro dans les intervalles où elle sont définies.

D'après le théorème cité plus haut, il existe au moins un système de nombres $c_i \in \delta_i$, $i = 1,2, \ldots q-1$, de telle sorte que nous ayons :

$$\psi_i(c_i) F(c_i) + \varphi_i(c_i) F'(c_i) = 0. \qquad i = 1, 2, \cdots q-1. \qquad (6)$$

On suppose le nombre p impair et $q + (q-1) = p$, donc $q = \dfrac{p+1}{2}$

Comme les fonctions $\varphi_i(x)$ ne s'annulent pas dans Δ_i nous posons en (6) : $\lambda_i = \psi_i(c_i) : \varphi_i(c_i)$.

Les paramètres λ_i peuvent prendre toutes les valeurs réelles.

Avec les équations (6) et (2) nous formons le système:

$$\left.\begin{array}{c} \lambda_i F(c_i)+F'(c_i)=0 \\ i=1,2,\cdots q-1=\dfrac{p-1}{2} \\ j_1(a_j)\alpha_1+f_2(a_j)\alpha_2+\cdots+f_{p-1}(a_j)\alpha_{p-1}+f_p(a_j)=0 \\ j=1,2,\cdots q=\dfrac{p+1}{2} \end{array}\right\} \quad (7)$$

Si les équtions (2), pour $q=\dfrac{p+1}{2}$, donnent un système de valeurs $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_{p-1}$ différentes de zéro, alors du systéme (7) il résulte qu'on aura:

$$\left|\begin{array}{cccc} \lambda_1 f_1(c_1)+f_1'(c_1) & \lambda_1 f_2(c_1)+f_2'(c_1) & \cdots & \lambda_1 f_p(c_1)+f_p'(c_1) \\ \lambda_2 f_1(c_2)+f_1'(c_2) & \lambda_2 f_2(c_2)+f_2'(c_2) & \cdots & \lambda_2 f_p(c_2)+f_p'(c_2) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \lambda_{q-1} f_1(c_{q-1})+f_1'(c_{q-1}) & \lambda_{q-1} f_2(c_{q-1})+f_2'(c_{q-1}) & \cdots & \lambda_{q-1} f_p(c_{q-1})+f_p'(c_{q-1}) \\ f_1(a_1) & f_2(a_1) & \cdots & f_p(a_1) \\ f_1(a_2) & f_2(a_2) & \cdots & f_p(a_2) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ f_1(a_q) & f_2(a_q) & \cdots & f_p(a_q) \end{array}\right| =0 \quad (8)$$

Il résulte immédiatement d'ici, le

Théoreme II

Soit les fonctions $f_1(x)$, $f_2(x) \ldots f_p(x)$, définies sur un intervalle I, continues sur l'intervalle $[a, b] \subset I$ et dérivable sur les intervalles $\delta_i=(a_i, a_{i+1})$, $i=1,2 \ldots q-1$, ainsi que

$$a_1=a<a_2<a_3<\cdots<a_q=b.$$

Avec les mêmes conditions pour les équations (2), pour toutes $\lambda_1, \lambda_2 \cdots \lambda_{q-1} \in (-\infty, \infty)$, il existe des valeurs $x=c_i \in \delta_i$, qui satisfassent la relation (8).

d) D'une façon analogue, on peut donner une généralisation du théorème de la moyenne dans un cas plus général.

Considérons les fonctions $f_1(x)$, $f_2(x) \ldots f_p(x)$, avec valeurs finies, définies sur un ensemble E, continues sur les intervalles fermeés $\Delta_k = [a_{2k-1}, a_{2k}] \subset E$, $k=1,2 \cdots q$ et dérivables sur les intervalles ouverts $\delta_k=(a_{2k-1}, a_{2k})$ $k=1,2,\cdots q$, où $E_1=\{a_1<a_2<a_3<\cdots a_{2q-1}<a_{2q}\} \subset E$.

Soit l'ensemble $E_2=\{b_1, b_2, b_3 \ldots b_s\} \subset E$, et considérons $2q+s+q=p$, $q \geqslant 1$, $s \geqslant 0$.

Nous assujettons la fonction auxiliaire (1) aux conditions données par les équations :

$$\left.\begin{aligned}\sum_{j=1}^{p-1} f_j(a_i)\,\alpha_j + f_p(a_i) = 0,\ i = 1, 2, \cdots 2q \\ \sum_{j=1}^{p-1} f_j(b_i)\,\alpha_j + f_p(b_i) = 0,\ i = 1, 2, \cdots s\end{aligned}\right\} \qquad (2_1)$$

Si ces équations donnent pour α_1, $\alpha_2 \ldots \alpha_{p-1}$ un système de valeurs différentes de zéro, alors il existe des valeurs $x = c_k \in \delta_k$, $k = 1, 2, 3 \ldots q$ de telle sorte que nous avons :

$$\lambda_k F(c_k) + F'(c_k) = 0,\ k = 1, 2, \cdots q. \qquad (3_1)$$

Du système formé avec les équations (2_1) et (3_1) resulte le

Théoreme II *

Si les équations (2_1) donnent un systeme de valeurs α_1, $\alpha_2 \ldots \alpha_{p-1}$ différentes de zéro, alors

Pour toutes valeurs réelles des paramètres $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_q$, il existe des valeurs $x = c_k \in \delta_k$, $k = 1, 2 \ldots q$, qui satisfassent la relation :

$$\begin{vmatrix}
\lambda_1 f_1(c_1) + f_1'(c_1) & \lambda_1 f_2(c_1) + f_2'(c_1) & \cdots & \lambda_1 f_p(c_1) + f_p'(c_1) \\
\lambda_2 f_1(c_2) + f_1'(c_2) & \lambda_2 f_2(c_2) + f_2'(c_2) & \cdots & \lambda_2 f_p(c_2) + f_p'(c_2) \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
\lambda_q f_1(c_q) + f_1'(c_q) & \lambda_q f_2(c_q) + f_2'(c_q) & \cdots & \lambda_q f_p(c_q) + f_p'(c_p) \\
f_1(a_1) & f_2(a_1) & \cdots & f_p(a_1) \\
f_1(a_2) & f_2(a_2) & \cdots & f_p(a_2) \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
f_1(a_{2q}) & f_2(a_{2q}) & \cdots & f_p(a_{2q}) \\
f_1(b_1) & f_2(b_1) & \cdots & f_p(b_1) \\
f_1(b_2) & f_2(b_2) & \cdots & f_q(b_2) \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
f_1(b_s) & f_2(b_s) & \cdots & f_p(b_s)
\end{vmatrix} = 0 \qquad (9)$$

Si nous considérons le cas où un certain nombre de points a_{2i}, avec indices paires, se confondent respectivement avec les points a_{2i+1} (par exemple $a_{2i} = a_{2i+1}$, $i = j_1, j_2, \cdots j_e$, — Cela signifie que plusieurs intervalles peuvent s'unir), alors dans le déterminant (9) figureront seulement les nombres a_{2i+1}, les autres points de E_1 et les points de E_2.

Dans ce cas, il faut que nous ayons la relation $2q' + q'' + s + q = p$, où $2q'$ est le nombre des points distincts de l'ensemble E_1, et q'' représente le nombre de points doubles $a_{2i} = a_{2i+1}$.

e) Nous donnons une autre forme du théorème précédent :

Soit aussi les fonctions $f_1(x)$, $f_2(x) \dots f_p(x)$, avec valeurs finies, définies sur l'ensemble E, continues sur les intervalles fermés $\Delta_k = [a_{2k-1}, a_{2k}] \subset E$, $k = 1, 2, \dots q$, et dérivables sur les intervalles $\delta_k = (a_{2k-1}, a_{2k})$, $k = 1, 2 \cdots q$, où $E_1 = \{a_1 < a_2 < \cdots < a_{2q}\}$.

Nous considérons analoguement comme dans le cas précédent, que la fonction auxiliaire (1) satisfasse 2q condition à qui nous ajoutons encore s équations :

$$\left.\begin{aligned} &\sum_{j=1}^{p-1} f_j(a_i)\,\alpha_j + f_q(a_i) = 0, \quad i = 1, 2, 3 \cdots 2q \\ &\sum_{j=1}^{p-1} A_{ij}\,\alpha_j + A_{ip} = 0, \quad i = 1, 2 \cdots s \end{aligned}\right\} \qquad (2_2)$$

A_{ij}, A_{ip} sont constantes réelles assujetissent aux conditions que les équations (2_2) donnent un systéme de valeurs $\alpha_1, \alpha_2 \dots \alpha_{p-1}$ différentes de zéro.

Entre q, s, p existe la relation :

$$2q + s + q = p, \quad q \geqslant 1, \quad s \geqslant 0.$$

Nous avons le

Théoreme II **

Dans les hypothèses considérées, il résulte que pour toutes les valeurs réelles des paramètres $\lambda_1, \lambda_2 \dots \lambda_q$ et des A_{ni}, il existe des valeurs $x = c_k \in \delta_k$, $k = 1, 2 \dots q$, qui satisfassent la relation :

$$\begin{vmatrix} \lambda_1 f_1(c_1) + f_1'(c_1) & \lambda_1 f_2(c_2) + f_2'(c_2) & \cdots & \lambda_1 f_p(c_1) + f_p'(c_1) \\ \lambda_2 f_1(c_2) + f_1'(c_2) & \lambda_2 f_2(c_2) + f_2'(c_2) & \cdots & \lambda_2 f_p(c_2) + f_p'(c_2) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \lambda_q f_1(c_q) + f_1'(c_q) & \lambda_q f_2(c_q) + f_2'(c_q) & \cdots & \lambda_q f_p(c_q) + f_p'(c_q) \\ f_1(a_1) & f_2(a_1) & \cdots & f_p(a_1) \\ f_1(a_2) & f_2(a_2) & \cdots & f_p(a_2) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ f_1(a_{2q}) & f_2(a_{2q}) & \cdots & f_p(a_{2q}) \\ A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1p} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2p} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{s1} & A_{s2} & \cdots & A_{sp} \end{vmatrix} = 0 \qquad (10)$$

Nous faisons les mêmes observations comme au théorème II * quand un certain nombre de points a_{2i} se confondent respectivement avec les points a_{2i+1}.

Avec les théorèmes établis plus haut, on peut déduire plusieurs applications (et aussi les applications trouvées dans [1]).

L'application 1.

Si nous particularisons le théorème II ** on obtient :

Etant données les fonctions $f_j(x)$, $j = 1, 2, 3, 4$ continues sur l'intervalle $[a, b]$ et dérivables sur (a, b), nous considérons les équations :

$$\left.\begin{aligned} f_1(a)\alpha_1 + f_2(a)\alpha_2 + f_3(a)\alpha_3 + f_4(a) &= 0 \\ f_1(b)\alpha_1 + f_2(b)\alpha_2 + f_3(b)\alpha_3 + f_4(b) &= 0 \\ A_1\alpha_1 + A_2\alpha_2 + A_3\alpha_3 + A_4 &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad (2_3)$$

Il résulte que pour les valeurs de A_1, A_2, A_3, A_4 ainsi que les équations (2_3) aient une systéme α_1, α_2, α_3 différente de zéro, et pour toutes les valeurs $\lambda \in (-\infty, \infty)$, il existe un nombre $c \in (a, b)$, telle que nous avons :

$$\begin{vmatrix} \lambda f_1(c) + f_1'(c) & \lambda f_2(c) + f_2'(c) & \lambda f_3(c) + f_3'(c) & \lambda f_4(c) + f_4'(c) \\ f_1(a) & f_2(a) & f_3(a) & f_4(a) \\ f_1(b) & f_2(b) & f_3(b) & f_4(b) \\ A_1 & A_2 & A_3 & A_4 \end{vmatrix} = 0$$

Il résulte que si nous considérons cette relation comme une équation en c, elle a toujours une racine dans l'intervalle (a, b).

L'application 2.

Si dans (5) on considère les fonctions $f_i(x)$, $i = 1, 2 \ldots p$, polynomes de degrès plus petites que $p - 2$, alors cette relation devient identité.

Démonstration : On ajoute à la première colonne les autres $p-1$ colonnes multipliées respectivement avec $\mu_1, \mu_2 \ldots \mu_{p-1}$, et on détermine les nombre μ_i de telle sorte que la première colonne ait tous les éléments zéro.

Analoguement on peut obtenir aussi d'autres identités.

§ 2. *Fonctions de plusieurs variables*

Dans le cas des fonctions de plusieurs variables nous pouvons généraliser le théorème de la moyenne aussi dans tous les cas étudiés aux fonctions d'une variable.

Nous donnons un seul exemple, parce que les autres se déduisent analoguement.

Considérons les fonction $F_j(x_1, x_2, \cdots x_n)$, $j = 1, 2 \cdots p$, continues pour $x_i \in [a_i, b_i]$, $i = 1, 2 \cdots n$.

Nous remplaçons dans ces fonctions x_i par $a_i + t(b_i - a_i)$, $i = 1, 2 \cdots n$, où $t \in [0, 1]$ et posons $b_i - a_i = h_i$.

On divise l'intervalle $[0,1]$ par les points $t_{i1}=0<t_{i2}<t_{i3}<\cdots<t_{iq}=1$, pour lesquels correspondent dans l'intervalle $[a_i, b_i]$ les points $a_{ik}=a_i+t_{ik}(b_i-a_i)$, $k=1, 2\ldots q$, de telle sorte que : $a_{i1}=a_i<a_{i2}<a_{i3}<\cdots<a_{iq}=b_i$.

On aura :

$$F_j(t)=F_j(a_1+h_1 t,\ a_2+h_2 t,\ \cdots a_n+h_n t),\ j=1, 2, \cdots p.$$

Les fonctions $F_j(t)$ sont continues sur l'intervalle $[0,1]$.

Nous assujettons ces fonctions aux conditions qu'elles soient aussi dérivables sur les intervalles $\delta_{ij_m}=(a_{ij_m},\ a_{ij_m+1})$, $m=1, 2\ldots s$. Les nombres q, s satisfont la condition $q+s=p$.

Nous considérons la fonction auxiliaire :

$$\Phi(t)=F_1(t)\alpha_1+F_2(t)\alpha_2+\cdots+F_{p-1}(t)\alpha_{p-1}+F_p(t),$$

et déterminons un systéme de nombre $\alpha_1,\ \alpha_2\ldots\alpha_{p-1}$ différent de zéro de telle sorte que nous avons :

$$\sum_{j=1}^{p-1} F_j(a_{1i},\ a_{2i}\cdots a_{ni})\alpha_j+F_p(a_{1i},\ a_{2i}\cdots a_{ni})=0 \qquad (2_4)$$
$$i=1, 2\cdots q.$$

On aura le

Théorème

Si les équations (2_4) donnent un système de nombre $\alpha_1, \alpha_2\ldots\alpha_{p-1}$ différents de zéro, alors pour toutes les valeurs réeelles des paramètres $\lambda_1, \lambda_2\ldots\lambda_s$, il existe des valeurs $c_{ij_m}\in(a_{ij_m},\ a_{ij_m+1})$, qui satisfassent la relation :

(Nous écrivons le déterminant avec une seule colonne).

$$\begin{vmatrix} \lambda_1 F_k(c_{ij_1})+DF_k(c_{ij_1}) \\ \lambda_2 F_k(c_{ij_2})+DF_k(c_{ij_2}) \\ \quad\cdots\quad\quad\cdots \\ \lambda_s F_k(c_{ij_s})+DF_k(c_{ij_s}) \\ F_k(a_{i1}) \\ F_k(a_{i2}) \\ \vdots \\ F_k(a_{iq}) \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ \\ =0 \\ \\ \\ \\ k=1, 2\cdots p. \end{matrix} \qquad (11)$$

où nous avons noté :

$$F_k(a_{im}) = F_k(a_{1m}, a_{2m}, \cdots a_{nm})$$

$$F_k(c_{ijm}) = F_k(c_{1jm}, c_{2jm}, \cdots c_{njm})$$

$$DF_k(c_{ijm}) = \left[\sum_{i=1}^{n}(b_i - a_i)\frac{\partial}{\partial x_i}\right] F_k(x_1, x_2 \cdots x_n) \Bigg|_{\substack{x_1 = c_{1jm} \\ x_2 = c_{2jm} \\ - \quad - \quad - \\ x_n = c_{njm}}}$$

La chaire de mathématiques
Institut polytechnique de Bucarest

LITÉRATURE

[1]. *I. M. Miu.* Sur un théorème et une généralisation du théorème de la moyenne (Buletinul Institutului politehnic, Buc. Tom. XXV, fascicola 6, 1963).

[2]. *I. M. Miu.* Une nouvelle méthode de séparation des racines réelles des équations (Buletinul Institutului politehnic Bucureşti, Tom. XXV, fascicola IV, 1963).

[3]. *I. M. Miu.* Sur les zéros réels de certaines fonctions (Buletinul Institutului politehnic Bucureşti, Tom. XXVI, fascicola 2, 1964).

[4]. *D. Pompeiu.* Sur le théorème des accroissements finis. (Annales) scientifiques de l'Université de Jassy. Tom. XV. fasc. 3–4, pag. 335–337).

[5]. *E. Abason.* Sur le théorème des accroissements finis (Bulletin de mathématiques et de physique de l'École polytehnique de Bucarest, 1929 No. 1).

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC BUCUREŞTI
Tomul XXVI — 1964, Fascicola 3

C.Z. 515

ÜBER EIN BIZENTRALES PROJEKTIONSSYSTEM MIT ZWEI BELIEBIGEN GRUNDFLÄCHEN *

AURELIAN TĂNĂSESCU

EINLEITUNG

Das Problem der bizentralen Projektion in einem dreidimensionellen Raum ist von zahlreichen Mathematikern in Arbeiten von grossem Interessebehandelt worden.

In diesen Arbeiten wurde der Darstellungsraum, auf welchem die bizentrale Projizierung eines Punktes P aus dem objektiven Raum vorgenommen wird, stets als Ebene oder eine Fläche betrachtet.

Mit dem Problem der bizentralen Projektion in einem drei- oder vierdimensionellen Raum befasste sich auch mein Professor Mihail Botez, welcher mir, gelegentlich einer Diskussion im Vorjahr, die Idee gab, ein bizentrales Projektionssystem zu studieren, in welchem die beiden Projektionszentren ω_1 und ω_2 in den beiden Projektionsebenen, bzw. in der horizontalen und vertikalen des Ebenensystems Monge enthalten sein sollen.

Ausgehend von dieser Hypothese ist der Darstellungsplan, auf welchem die bizentrale Projektion der Punkte im Euklid'schen Raum vorgenommen wird, aus zwei Ebenen gebildet, die eigentlich nicht senkrecht sein müssen (wie dies im Projektionssystem Monge der Fall ist), sondern einen beliebigen Zweiflächenwinkel bilden, oder sogar parallel sein können.

Letzterer Fall der parallelen Darstellungsebenen ist besonders interessant durch die Ausweitung des Studiums der Risse vom modularen Typus, gestützt auf die Theorie der Risse des modularen Typus, wie sie Prof. Mihail Botez formuliert hat, und auf die Theorie der kompletten und unkompletten Bilder.

Für die anderen Fälle, in denen der Zweiflächenwinkel der Darstellungsebenen gerade ist, oder ein beliebiges Problem bizentraler Projektion mit ihren beiden Projektionszentren bzw. in den betreffenden Projektions

* Mitteilung, dargebracht bei der wissenschaftlichen Jahrestagung der Mathematischen Gesellschaft der D.D.R., vom 26 bis 29 August in Weimar, 1963.

ebenen enthalten sind, kann in anderer Form gestellt werden u. zw. können wir zeigen, dass irgend ein Punkt M des Raumes auf der doppelten Ebene des Risses und nicht nur unbedingt durch den Doppelpunkt Monge (m, m') mit senkrechter Ordnungslinie auf ox, sondern auch durch einen Zweipunkt A (a_1, a'_2), absolut willkürlich dargestellt werden kann.

Somit können wir beweisen, daß eine eindeutige Verbindung zwischen zwei beliebigen Doppelpunkten A (a_1, a'_2) und B (b_1, b'_2) aus der

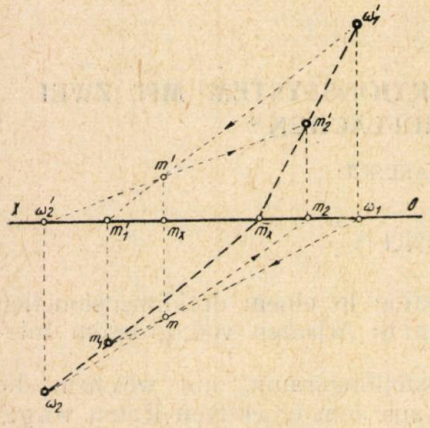


Fig. 1

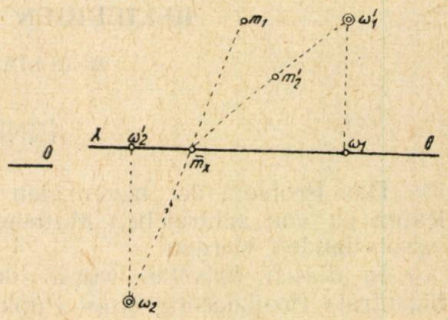


Fig. 2

doppelten Ebene des Risses (verschieden von den Doppelpunkten Monge) hergestellt werden kann, so daß diese Doppelpunkte bestimmte bizentrale Projektionen desselben Punktes M (m, m') des Raumes sein sollen.

Im Folgenden werden wir ausdrücklich nur das Darstellungssystem und die hauptsächlichen Eigenschaften für jeden der Fälle bearbeiten, in welchen der Zweiflächenwinkel der Darstellungsebenen der bizentralen Projektion gerade, beliebig oder Null ist.

I. Die gerade Zweifläche $(\pi_1 \perp \pi_2)$

Es seien π_1 und π_2 beide senkrechten Ebenen des Projektionssystems Monge, wobei $\pi_1 \perp \pi_2$ und π_1 die vertikale, π_2 die horizontale Projektionsebenes.

Es seien Ω_1 (ω_1, ω'_1) und Ω_2 (ω_2, ω'_2) die beiden Mittelpunkte der bizentralen Projektion, wobei $\Omega_1 \in \pi_1$ und $\Omega_2 \in \pi_2$.

A. *Darstellung des Punktes*

Der Punkt im Raum M (m, m') hat die bizentrale Projektion m_1 auf Ebene π_2 des Zentrums Ω_1 und m'_2 auf Ebene π_1 des Zentrums Ω_1 und m'_2 auf Ebene π_1 des Zentrums Ω_2.

Somit kann der Punkt M (m, m') des Raumes in der Doppelebene des Risses durch den Zweipunkt (m_1, m'_2) dargestellt werden; dadurch

ist eine eindeutige Verbindung zwischen den Punkten des dreidimensionellen Raumes und den Punkten der Doppelebene des Risses hergestellt worden. (Fig. 1).

Man erkennt leicht, dass auf diese Weise eine eindeutige Verbindung zwischen den Doppelpunkten Monge (m, m') und den willkürlich angenommenen Punkten (m_1, m'_2) hergestellt ist, die von der gewählten bizentralen Projektion abhängt. Auf Grund dieses Ergebnisses können wir folgenden Lehrsatz aufstellen:

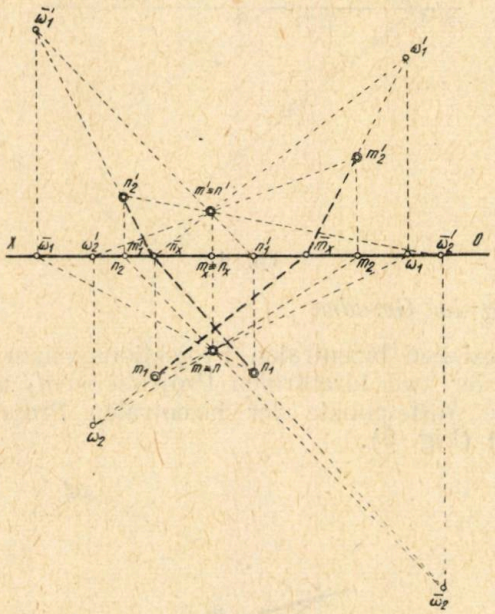


Fig. 3

Lehrsatz (1): *Es kann jederzeit eine bizentrale Projektion bestimmt werden, welche einen Doppelpunkt (m, m') Monge in einen beliebigen Punkt (m_1, m'_2) des Risses umwandelt, und umgekehrt.*

Bei der Betrachtung des Risses des Punktes bemerken wir, daß die Doppelpunkte von der Art (m_1, m'_2), welche durch die bizentrale Projektion erhalten wurden, immer die Lage in der betreffenden Zweifläche des Punktes M des projizierten Raumes ergeben (Fig. 1, Fig. 2).

Da der Satz (1) auch umgekehrt gilt, können wir ihn verallgemeinert wie folgt ausdrücken:

Lehrsatz (2): *Es können jederzeit zwei bizentrale Projektionen festgelegt werden, welche eine eindeutige Verbindung zwischen zwei willkürlich gewählten Doppelpunkten (m_1, m'_2) und (n_1, n'_2) der doppelten Ebene des Risses herstellen, so daß diese willkürlich festgelegten Doppelpunkte denselben Punkt M (m, m') des Raumes darstellen* (Fig. 3).

Auf Grund dieser Ergebnisse können wir jederzeit eine Verbindung zwischen dem Doppelpunkt (m, m') der Ebene und dem Doppelpunkt (m_1, m'_2) herstellen, deren Projektion immer auf den Spuren P und P' der Ebene zu liegen kommen werden (Fig. 4).

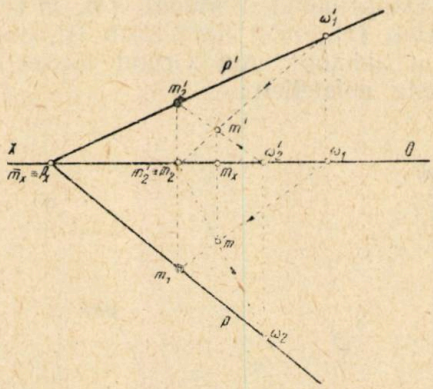


Fig. 4

B. *Darstellung der Geraden*

In diesem speziellen bizentralen Projektionssystem kann die Gerade $D\ (d, d')$ mittels der zwei bizentralen Projektionen d_1 und d'_2 dargestellt werden, wobei die Mittelpunkte der bizentralen Projektionen (ω_1, ω'_1) und (ω_2, ω'_2) sind (Fig. 5).

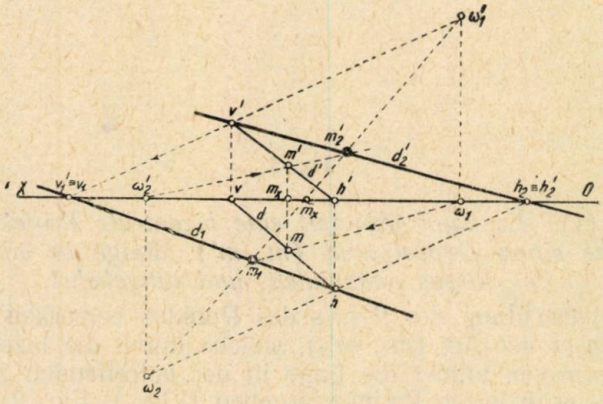


Fig. 5

Der beliebige Punkt (m, m') der Geraden wird selbstverständlich die bizentralen Projektionen $m_1 \in d_1$ und $m'_2 \in d'_2$ aufweisen.

Wenn die Gerade in der bizentralen Projektion durch die Zweipunkte (m_1, m'_2) und (n_1, n'_2) festgelegt ist, kann die Bestimmung der Spuren h und v' der Geraden in gewöhnlichem Sinn mit Leichtigkeit vorgenommen werden.

Wir können somit allgemein im Zusammenhang mit der Darstellung der Geraden in diesem bizentralen Projektionssystem folgenden Lehrsatz aufstellen:

Lehrsatz (3): *Die bizentralen Projektionen d_1 und d'_2 der gegebenen Geraden bestimmen eine homographisch gleichbedeutende Umwandlung mit zwei zentralen Projektionen.*

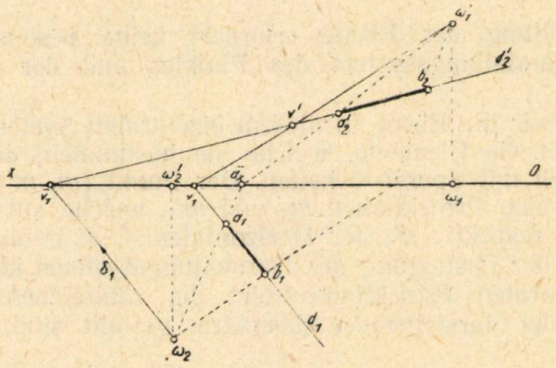


Fig. 6

Ferner:

Lehrsatz (4): *Vier willkürlich auf der Geraden festgelegte Punkte haben die bizentralen Projektionen im selben unharmonischen Verhältnis.* Somit ist also $(a_1\ m_1\ b_1\ n_1) = (\text{ambn}) = (a'_2\ m'_2\ b'_2\ n'_2)$.

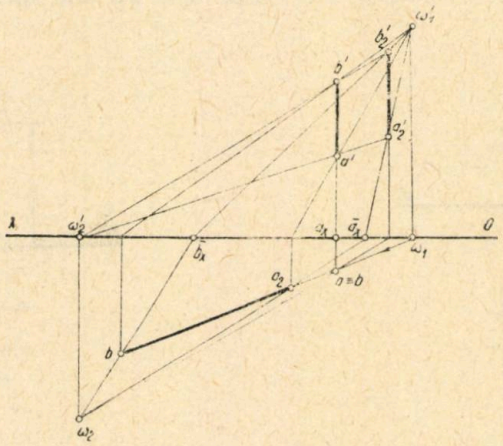


Fig. 7

Es können ebenso mit großer Leichtigkeit die Darstellungen derjenigen Geraden, die besondere verschiedene Positionen in bezug auf die Ebenen der Grundzweifläche einnehmen, erhalten werden.

So habe ich in Fig. 6 die bizentralen Projektionen d_1, d'_2 der Horizontale errichtet, die durch den Punkt (a_1, a'_2) geht, und für welche noch eine zusätzliche Bedingung bekannt ist.

In Fig. 7 ist die Darstellung einer senkrechten Geraden in diesem bizentralen Projektionssystem gegeben worden.

C. *Darstellung der Ebene.*

Die Darstellung der Ebene erfordert keine besonderen Probleme solange das Darstellungssystem des Punktes und der Geraden genau bestimmt ist

So werden wir die Ebene in diesem bizentralen System der speziellen Projektion durch die Elemente, welche sie bestimmen, darstellen, indem wir uns eventuell mit Spuren behelfen. Der Punkt (m, m') der Ebene hat die zwei bizentralen Projektionen m_1 und m'_2, welche auf den bizentralen Projektionen d_1 respektiv d'_2 der Horizontalen d, d' gelagert sind.

Auf Grund der Festlegung des Darstellungssystems können in diesem speziellen bizentralen Projektionssystem die zahlreichen Aufgaben, die gewöhnlich in der darstellenden Geometrie gestellt sind, gelöst werden.

II. Eine beliebige Zweifläche ($\pi_1 \measuredangle \pi_2$)

Wenn die Grundebenen der Darstellung π_1 und π_2 nicht senkrecht sind, bilden sie eine Zweifläche, deren ebener Winkel θ ist.

Die zwei Projektionszentren $\Omega_1(\omega_1, \omega'_1)$ und $\Omega_2(\omega_2, \omega'_2)$ werden in diesen Ebenen derart enthalten sein, daß $\Omega_1 \in \pi_1$ und $\Omega_2 \in \pi_2$ sind.

Wir bezeichnen ebenso mit m_1 und m'_2 die bizentralen Projektionen des Punktes M des Raumes. Der Riß, den wir auf diese Weise erhalten,

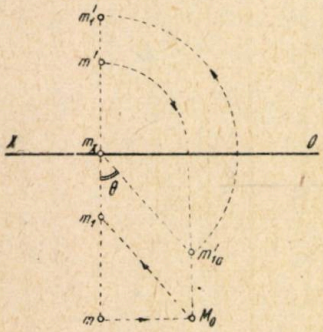


Fig. 8

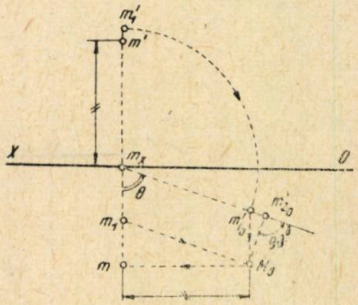


Fig. 9

ist mit dem modularen allgemeinen vom Typ Monge, bearbeitet von M. Botez, in welchem θ der Winkelmodul der Skizze bedeutet, identisch.

Zwecks Bestimmung der Projektionen m_1, m'_1 oder m, m'_2 können wir uns der parallelen Projektion mit den Ebenen der Grund-Zweifläche oder der orthogonalen Projektion bedienen (Fig. 8 und Fig. 9).

In Fig. 8 werden die Projektionen des Doppelpunktes (m, m') und der willkürlich festgelegte Modul θ dargestellt. Es ergeben sich die Projektionen m_1, m'_1 des Doppelpunktes (m_1, m_1'), die mittels der parallelen Projektion mit den Ebenen der Grundzweifläche erhalten werden.

In Fig. 9 stellt sich das umgekehrte Problem. So erhalten wir, ausgehend vom Doppelpunkt (m_1, m'_1) und dem Modul θ den Punkt (m, m') Monge und eventuell den Doppelpunkt (m, m'_2), den wir durch ortho-

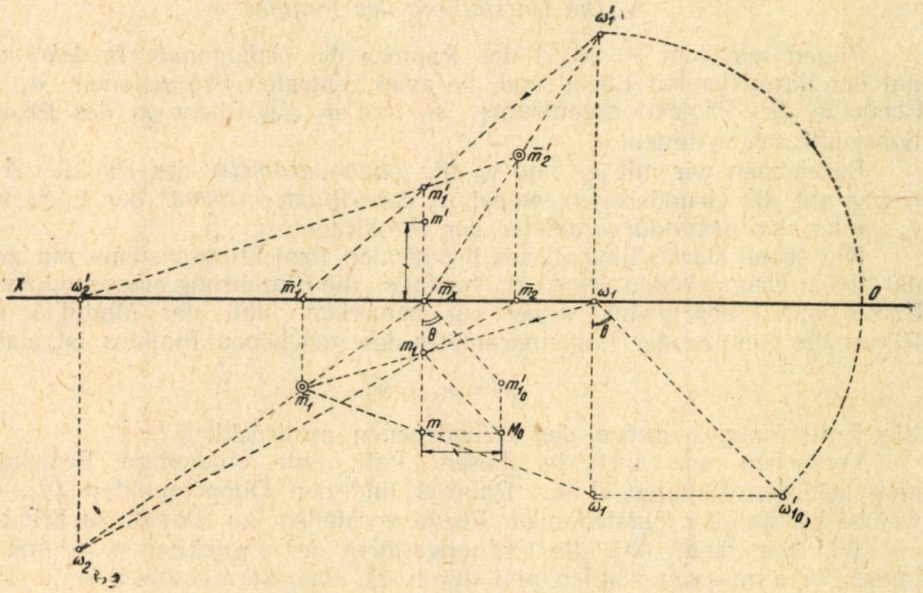


Fig. 10

gonale Projektionen auf die Grundebenen erhalten haben. Auf Grund dieser Präzisierungen, welche sich aus der Theorie der modularen Risse ergeben, können wir den Riss des Punktes im bizentralen speziellen Projektionssystem, mit den Projektionsmittelpunkten in den Grundebenen konstruieren (Fig. 10).

Da die Projektionsmittelpunkte (ω_1, ω'_1) und (ω_2, ω'_2) sind, erhalten wir die bizentrale Projektion m_1 und m'_2. Man kann leicht feststellen, dass, ausgenommen den Modul θ, der in der Zusammenstellung des Risses vorkommt, keine besonderen Unterschiede gegenüber den Rissen, die wir für die gerade Zweifläche gezeigt haben, bestehen (Fig. 1).

Alle oben angeführten Lehrsätze behalten ihre volle Gültigkeit auch für diesen Fall.

Wenn das Projektionszentrum Ω_1 orthogonal auf die Ebene π_2 projiziert wird, erhält man in ω_1 selbstverständlich andere Doppelpunkte m_1, m'_2 als bizentrale Projektion des Punktes M des Raumes.

III. Zweifachfläche Null ($\pi_1 \parallel \pi_2$)

Betrachten wir zwei parallele Grundebenen $\pi_1 \parallel \pi_2$, in welchen wir willkürlich 2 Projektionszentren ω_1 und ω_2 wählen, so daß $\omega_1 \in \pi_1$ und $\omega_2 \in \pi_2$ sind.

Wählen wir zur darstellenden Ebene eine Ebene π parallel zu den zwei parallelen Ebenen π_1 und π_2.

A. *Die Darstellung des Punktes*

Fügen wir dem Punkt A des Raumes die *orthogonale Projektion* a auf der darstellenden Ebene und die zwei zentralen Projektionen: a_1 auf Ebene π_2 des Projektionszentrums ω_1 und a_2 auf Ebene π_1 des Projektionszentrums ω_2 hinzu.

Bezeichnen wir mit μ_a und ν_a die *Lagenparameter* des Punktes A in bezug auf die Grundebenen, wobei μ_a der *Hauptparameter* der Lage und ν_a immer der *Sekundärparameter* der Punktlage ist.

Die ebene Darstellung dieses bizentralen Projektionssystems mit zwei parallelen Grundebenen erfordert ebenfalls die Einführung eines modularen Risses mit Linearmodul, wobei wir bemerken, daß der Modul λ des Risses die Summe der Lagenparameter des gegebenen Punktes ist, daher

$$\lambda = \mu_a + \nu_a$$

die Entfernung zwischen den Grundebenen ausdrückt.

Versuchen wir auch in diesem Fall, eine eindeutige Beziehung zwischen den Punkten A des Raumes und den Doppelpunkten (a_1, a_2) welche sie auf der darstellenden Ebene vorstellen, zu Stande zu bringen.

Wir bemerken, daß die Ordnungslinien der Projektionen a_1 und a_2 immer in a zusammenlaufen und durch die Projektionszentren ω_1 und ω_2 gehen.

Es ist leicht festzustellen, daß für eine im Riß willkürliche Wahl der Punktgruppe ω_1, ω_2, a, a_1 und a_2 der Riß nicht vollständig im Sinne Kotow-Tschetweruchins ist, weil der Modul nicht bestimmt werden kann, da er eine Funktion von zwei Parametern ist

Der Riss wird auf zweifache Weise vollständig, und zwar:

1) Es sind die orthogonale Projektion a und die Lagenparameter (also der Modul und die Punktlage) gegeben. Es folgt der Doppelpunkt (a_1, a_2) der bizentralen Projektionen (Fig. 11).

Wir stellen fest, daß wir zur Bestimmung der Projektion a_1 durch Umlegung auf einer der Grundebenen (z. B. auf π_2) den Hauptlagenparameter μ_a des Punktes A im Punkt ω_1 und den Sekundärlagenparameter ν_a im Punkt a verwenden. Daraus folgt $\overset{0}{\omega}_{1a}$ und a_0 somit durch Parallelität a_1, wobei $a''_0 a_1 \parallel \omega_{1a} a$.

Zwecks Bestimmung der Projektion a_2 verwenden wir durch Umlegung auf einer der Grundebenen (z. B. auf π_1), den Sekundärlagenparameter ν_a im Punkt ω_2 und den Hauptlagenparameter μ_a im Punkt a.

Daraus folgt $\overset{0}{w}_{2a}$ und a'_0 durch Parallelität a_2, wobei $a'_0 a_2 \parallel \overset{0}{\omega}_{2a} a$.

Diese Präzisierungen drücken in diesem Fall die Bestimmungsart der bizentralen Projektionen (a_1, a_2) aus, von einem gegebenen Punkt ausgehend.

2) *Es sind die orthogonale Projektion a, eine der bizentralen Projektionen, beispielsweise a_1 und einer der Lagenparameter, z. B. μ_a gegeben* (Fig. 12).

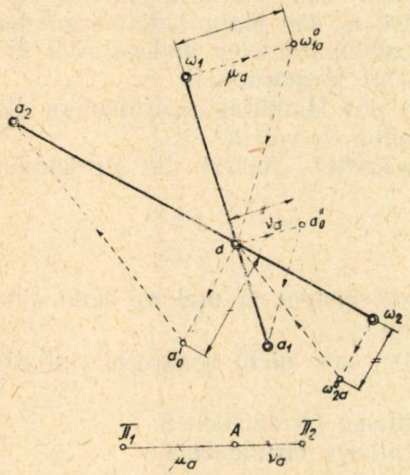


Fig. 11

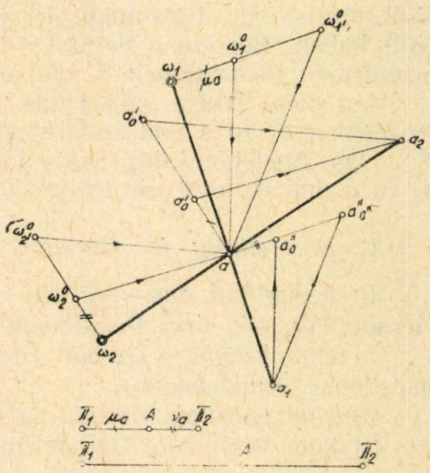


Fig. 12

In diesem Fall ergibt sich a''_0 somit der Sekundärlagenparameter ν_a indem die Parallele $a_1 a''_0$ zu a ω_1^0 gezogen wird. Die Projektion a_2 erhalten wir auf die übliche Weise.

Es ist interessant festzustellen, dass, obwohl der Riss durch die Wahl des Hauptlagenparameters μ_a und des entsprechenden Doppelpunkts (a_1, a_2) vollständig ist, durch eine Abänderung des Moduls des vollständigen Risses, dieser unverändert bleibt.

So sei ein anderer Hauptlagenparameter das Segment $\omega_1\,\omega_1^0$. für welchen wir den Sekundärparameter aa''_0 erhalten. Indem wir für diese Werte die Punkte ω_2^0 und a_0'' konstruieren, erhalten wir dieselbe Projektion a_2.

Daraus ergibt sich also folgender

Lehrsatz (5): *Der vollständige Riß des Punktes ist gegenüber der Umwandlung des Moduls unveränderlich.*

Auf Grund der Ergänzungsarten des Riβes im Sinne Kotow-Tschetweruchins, erhalten wir eine eindeutige Verbindung zwischen den Punkten des Raumes und dem Doppelpunkte (a_1, a_2) der Darstellungsebene π.

Die Punkte A des Raumes, die in den parallelen Grundebenen π_1 und π_2 enthalten sind, haben die bizentralen Projektionen a_1 und a_2 auf den äusseren Ordnungslinien der Segmente $\omega_1 a$ und $\omega_2 a$. Wir benennen im weiteren diesen Raum als *Zwischenraum.*

Für die Punkte A des Aussenraums der Ebene π_1 ist die Projektion a_2 im Segment $a\omega_2$ eingeschlossen.

Für die Punkte A des Aussenraums der Ebene π_2 ist die Projektion a_1 im Segment $a\omega_1$ eingeschlossen.

Die in den Grundebenen befindlichen Punkte werden wir im besonderen beim beschreibenden Studium der Geraden und der Ebene betrachten.

Die Punkte der Grundebene π_1 haben den Hauptlagenparameter Null, ebenso wie die Punkte der Grundebene π_2 den Hauptlagenparameter Null haben. Bei einer Veränderung der Lagenparameter ändern sich die bizentralen Projektionen a_1 und a_2 umgekehrt proportionell.

Auf diese Weise nähert das Ansteigen des Hauptlagenparameters die Projektion a_1 zu a und entfernt die Projektion a_2 von a.

Das Ansteigen des Sekundärlagenparameters nähert die Projektion a_2 zu a und entfernt die Projektion a_1.

B. *Darstellung der Geraden.*

In bezug auf das parallele Grundebenensystem π_1 und π_2 kann eine Gerade folgende drei Positionen einnehmen:

1) *eine beliebige Gerade* (nicht parallel und nicht senkrecht auf die parallelen Grundebenen).

2) *eine parallele Gerade* zu den parallelen Grundebenen.

3) *eine senkrechte Gerade* zu den parallelen Grundebenen.

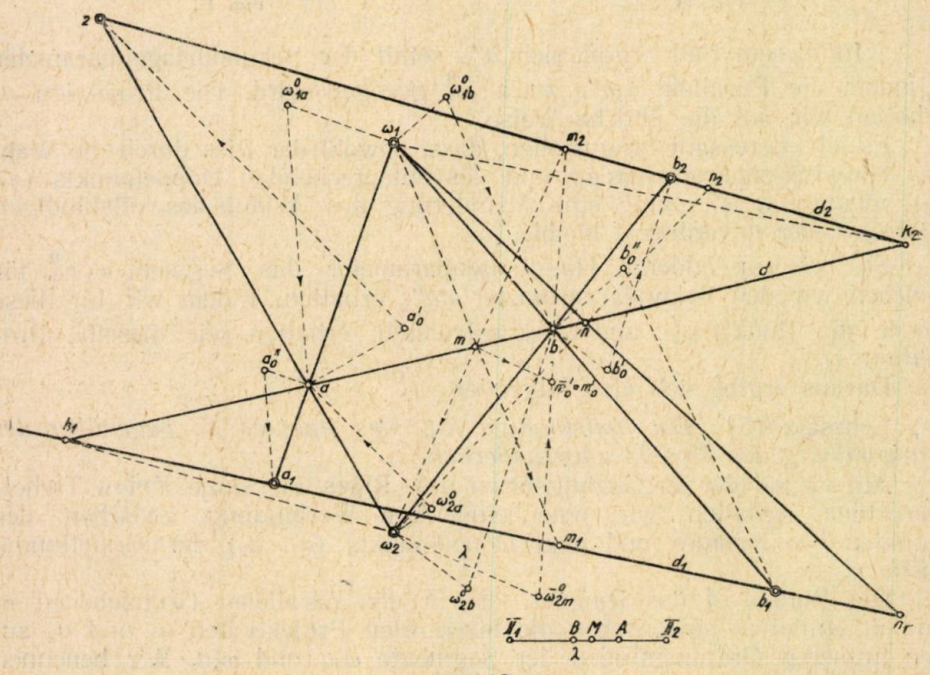


Fig. 13

1) *Beliebige Gerade.* Legen wir die beliebige Gerade durch ihre zwei Punkte A und B fest (fig. 13). ω_1 und ω_2 seien zwei Projektionszentren und λ der Modul des Risses, auf welchem wir die Lage der Punkte durch die betreffenden Lagenparameter festlegen.

Unter diesen Bedingungen, indem wir von den orthogonalen Projektionen a und b, die wir willkürlich annehmen, ausgehen, erhalten wir die Doppelpunkte (a_1, a_2) und (b_1, b_2), somit die bizentralen Projektionen d_1 und d_2 der durch die gegebenen Punkte A und B bestimmten Geraden.

Ein beliebiger Punkt M der im Zwischenraum gelegenen Geraden mit einer orthogonalen Projektion $m \in d$, wobei $d \equiv ab$, wird die bizentralen Projektionen m_1 und m_2, beziehungsweise auf den bizentralen Projektionen d_1 und d_2 der Geraden, beim Schnitt derselben mit den Ordnungslinien $\omega_1 m$ und $\omega_2 m$ *des* Punktes haben.

Da der Modul λ der Skizze bekannt ist, können wir den Hauptlagenparameter mm'_0 des Punktes M, somit die Lage des Punktes im Raume, bestimmen.

Wir bemerken, dass die bizentralen Projektionen m_1 und m_2 nicht willkürlich auf den bizentralen Projektionen d_1 und d_2 der Garaden gewählt werden können.

Da wir auf den Geraden d_1 und d_2 drei Punktpaare a_1, m_1, b_1 und a_2, m_2, b_2 haben, die sich eindeutig untereinander entsprechen, ergibt sich in bezug auf die beschreibende Darstellung der beliebigen Geraden in diesem Projektionssystem folgendes:

Lehrsatz (6): *Die bizentralen Projektionen einer beliebigen Geraden D im Raum werden auf der darstellenden Ebene π durch die Geraden d_1 und d_2 beschrieben, welche ein transformographisches Äquivalent mit anderen zwei zentralen Projektionen bestimmen.*

Auf diese Weise folgt für eine gegebene Projektion m_1 eines Punktes D auf der Geraden d_1, m auf d, hierauf m_2 auf d_2 und umgekehrt.

Ebenso folgt, in Anbetracht dessen, dass vier vom selben Punkt ausgehende Geradeneine Transversale in vier Punkten schneiden, deren unharmonisches Verhältnis unabhängig ist von der Transversale der tieferstehende.

Lehrsatz (7): *Vier willkürlich gewählte Punkte einer Geraden haben die bizentralen Projektionen im selben unharmonischen Verhältnis.* Somit sind $(a_1 m_1 b_1 n_1) = (ambn) = (a_2 m_2 b_2 n_2)$.

Die Spuren der Geraden. Bezeichnen wir die Schnittpunkte der gegebenen Geraden mit den betreffenden parallelen Grundebenen π_1 und π_2 mit k_2 und h_1 und behalten wir die Benennung der Spuren der Geraden für diese Punkte.

Punkt k_2 ist die Hauptspur der Geraden, *d. h* der Punkt der Geraden, welcher den Hauptlagenparameter Null hat.

Punkt h_1 ist die *Sekundärspur* der Geraden, *d. h.* der Punkt der Geraden, welcher den Sekundärlagenparameter Null hat.

Wenn wir auf die orthogonale Projektion den Punkt a derart fällen, daß $a \equiv h_1$, die Projektion $a_1 \equiv h_1$ und die Projektion $a_2 \to \infty$ auf der Geraden d_2, wird somit die Ordnungslinie $w_2\, aa_2$ parallel zu d_2 und geht durch h_1.

Wenn wir auf die orthogonale Projektion d den *Punkt* a derart fällen, daß $a \equiv k_2$, die Projektion $a_2 \equiv k_2$ und die Projektion $a_1 \to \infty$ auf der Geraden d_1, wird somit die Ordnungslinie $w_1\ aa_1$ parallel zu d_1 und geht durch k_2.

Es ergibt sich somit in bezug auf die beschreibende Darstellung einer beliebigen Geraden in diesem Projektionssystem durch Spuren folgender :

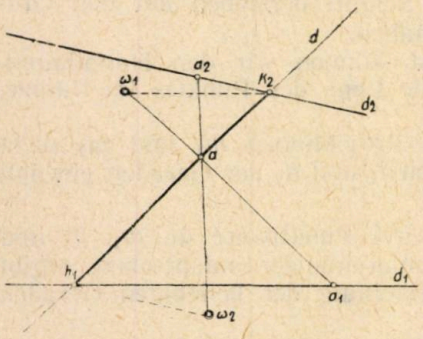


Fig. 14

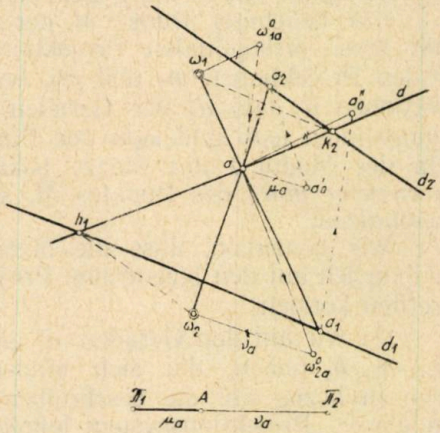


Fig. 15

Lehrsatz (8) : *Die bizentralen Projektionen* d_1 *und* d_2 *einer beliebigen durch die Spuren* k_2 *und* h_1 *bestimmten Geraden, gehen durch diese Punkte und sind parallel zu den betreffenden Segmenten* $w_1\ k_2$ *und* $w_2\ h_1$. (Fig. 14).

Für den Punkt $a \in d$ erhalten wir mit Leichtigkeit die bizentralen Projektionen, welche durch den Doppelpunkt (a_1, a_2) gegeben sind ; der Riß der Geraden ist jedoch unvollständig.

Wir erhalten folgenden

Lehrsatz (9) : *Der Riß einer beliebigen durch Spuren bestimmten Geraden ist unvollständig.*

Betrachten wir die Bedingungen, unter welchen der Riß der durch Spuren bestimmten Geraden in diesem Projektionssystem vollständig wird.

So ergibt sich unter den Bedingungen eines unvollständigen Risses, (Fig. 14) daß wir den Riß durch willkürliche Einführung des Hauptlagenparameters μ_a für den Punkt A der durch ihre Spuren k_2 und h_1 bestimmten Geraden vervollständigen können.

Es folgt daraus der Sekundärlagenparameter ν_a, also der Modul des Risses (Fig. 15). Selbstverständlich konnte der Riß auch bei Ausgang von einem willkürlich angenommenen Wert des Sekundärparameters vollständig sein.

In Fig. 16 haben wir denselben unvollständigen Riß der Fig. 14 vervollständigt, indem wir einen anderen Wert für den Hauptparameter

μ_a des bestimmten Punktes mittels derselben bizentralen Projektion a_1 und a_2 angenommen haben.

Unter Beziehung auf den Satz (5) können wir folgenden Lehrsatz *(10) formulieren: Die vollständige Skizze der Geraden ist unveränderlich gegenüber einer Verwandlung des Moduls.*

Die Bestimmung der bizentralen Projektionen d_1 und d_2 der durch ihre Spuren k_2 und h_1 bestimmten Geraden kann durch Wahl der ortho-

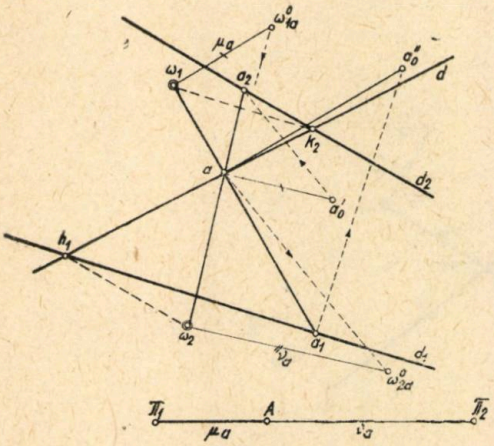


Fig. 16

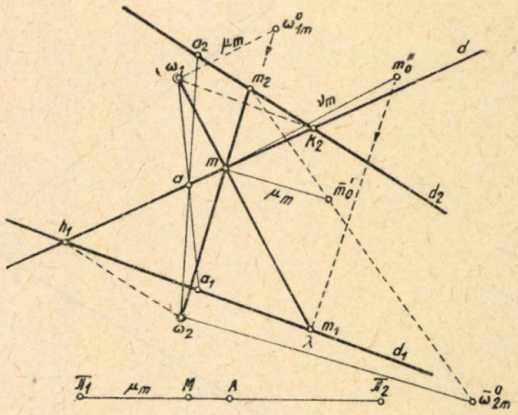


Fig. 17

gonalen Projektion a in der Mitte des Segments $k_2 h_1$ mit Leichtigkeit vorgenommen werden. Unter diesen Bedingungen ist a ebenfalls die Mitte der Segmente $w_1 a_1$ *und* $w_2 a_2$, wobei $a_1' a_2 \parallel w_2 a_1$ ist.

Die Parameter der Position des Punktes A sind in diesem Falle gleich.

Betrachten wir die Skizze der Geraden (Fig. 17), ergänzt durch gleiche Lagenparameter des Punktes A der Geraden und *bestimmen wir den Hauptlagenparameter* μ_m *für den Punkt des Raumes der Geraden, dargestellt durch die bizentralen Projektionen* m_1 *und* m_2.

Der Modul $\lambda = 2\mu_a$ führt uns zum Wert des Hauptlagenparameters $\mu_m = m\overline{m_0}$.

Die Lage des Punktes M ist auf diese Weise auf der Modulskala bestimmt. Es ist klar, daß die umgekehrte Operation nicht vorgenommen werden kann, *d. h. wir können nicht einen Punkt M auf der Modulskala wählen, der der im Raum bestimmten Geraden gehören soll.*

2. *Die parallele Gerade* mit parallelen Grundebenen π_1 und π_2 ist charakterisiert durch die Tatsache, daß zwei ihrer willkürlich gewählten Punkte A und B gleiche Lagenparameter haben. Daraus ergibt sich $\mu_a = \mu_b$ und $\gamma_a = \nu_b$. Diese Gerade hat keine Spuren auf den Grundebenen.

Das beschreibende Studium dieser Geraden stellt nichts Besonderes gegenüber den oben festgelegten Sätzen dar. Die bizentralen Projektionen

d_1 und d_2 der Geraden sind untereinander parallel und parallel zur orthogonalen Projektion d der Geraden auf den parallelen Grundebenen.

3. *Die senkrechte Gerade* zu den parallelen Grundebenen π_1 und π_2 ist charakterisiert durch die Tatsache, dass alle ihre Punkte dieselbe orthogonale Projektion a auf der Darstellungsebene π haben.

Nehmen wir an, wir kennen den Modul λ des Risses und zwei beliebige Punkte A und B der Modulskala. Es seien ω_1 und ω_2 die Projektions-

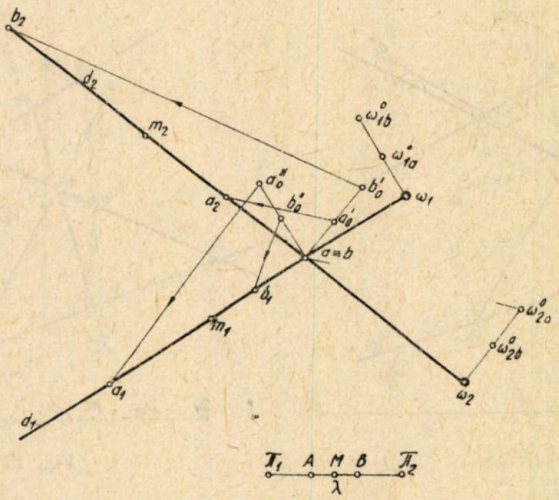


Fig. 18

zentren (Fig. 18) und $a = b$ die orthogonalen Projektionen auf die Ebene π der betrachteten Punkte. Auf den betreffenden Ordnungslinien dieser Punkte ergeben sich ihre bizentralen Projektionen (a_1, a_2) und (b_1, b_2), bei Verwendung der bekannten Vorgangsweisen wie bei der beschreibenden Darstellung des Punktes.

Daraus folgt folgender

Lehrsatz (11): *Die bizentralen Projektionen d_1 und d_2 der auf die Grundebenen senkrechten Geraden decken sich mit den Ordnungslinien eines jeden ihrer Punkte A.*

Betrachten wir in derselben Skizze einen Punkt M der Modulskala und errichten wir die bizentralen Projektionen m_1 und m_2 unter Benutzung des Hauptlagenparameters des Punktes μ_m oder des Moduls λ der Skizze.

Wegen der Übersichtlichkeit der Konstruktion bedienen wir uns derselben Daten auf einem anderen Riss (Fig. 19). Es sei $n_2 \in d_2$ die bizentrale Projektion eines anderen Punktes N der Geraden. *Wie können wir nun die bizentrale Projektion, entsprechend $n_1 \in d_1$, bestimmen, ohne den Rißmodul zu verwenden?*

Um dieses Problem lösen zu können, bemerken wir, dass auf den bizentralen Projektionen d_1 und d_2 drei Punktpaare bestimmt sind, welche sich eindeutig entsprechen. Mit anderen Worten, die Geraden d_1 und d_2

sind eine homographisch Umgewandelte der anderen, wobei diese homographische Umwandlung zwei zentralen Projektionen gleichkommt. Daraus ergibt sich, dass der Satz (6) seine Gültigkeit behält im Falle der auf die parallelen Grundebenen senkrechten Geraden, und folgendermassen formuliert werden kann:

Lehrsatz (6'): *Die auf die parallelen Grundebenen senkrechten Geraden werden in diesem Projektionssystem durch die bizentralen Projektio-*

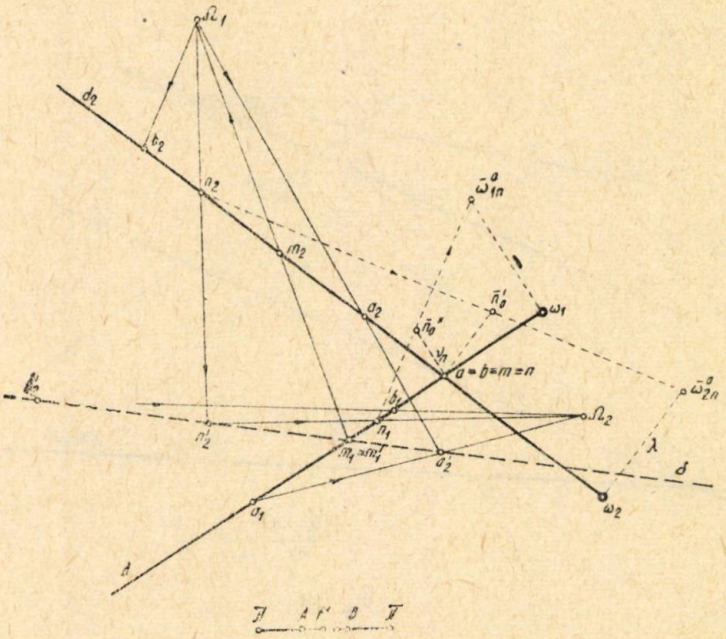


Fig. 19

nen d_1 und d_2, von welchen eine die homographisch Umgewandelte der anderen ist, dargestellt, wobei diese homographische Umwandlung mit zwei zentralen Projektionen gleichwertig ist.

Für die Bestimmung der bizentralen Projektion $n_1 \in d_1$ ist erforderlich, dass wir vorerst die beiden zentralen Projektionen finden sollen, mit welchen die obenerwähnte homographische Umwandlung gleichwertig ist.

Führen wir beispielsweise durch m_1 die willkürlich angenommene Gerade δ und ebenfalls durch m_1 die Gerade $m_1 m_2$, auf welcher wir willkürlich einen Punkt Ω_1 festlegen. Wir fällen auf die Gerade δ vom Punkte Ω_1 die Punkte a_2 und b_2 auf a_2' und b_2'.

Es sei Ω_2 der Schnittpunkt zwischen den Geraden b_2' b_1 und a_1 a_2'.

Die gesuchten zwei zentralen Projektionen sind dadurch bestimmt und haben die Mittelpunkte Ω_1 und Ω_2.

Projektieren wir somit irgendeinen Punkt $n_2 \in d_2$ aus Ω_1 auf n_2' der Geraden δ und verbinden wir hieraut n_2' mit dem Mittelpunkt Ω_2 so erhalten wir die bizentrale Projektion, entsprechend n_1 auf der Geraden d_1, und umgekehrt.

Zur Überprüfung muss die Bestimmung der Lagenparameter des Punktes (n_1, n_2), den wir in erwähnter Weise fanden, den Wert des Moduls λ des Risses ergeben, somit die Lage des Punktes N auf der Modulskala.

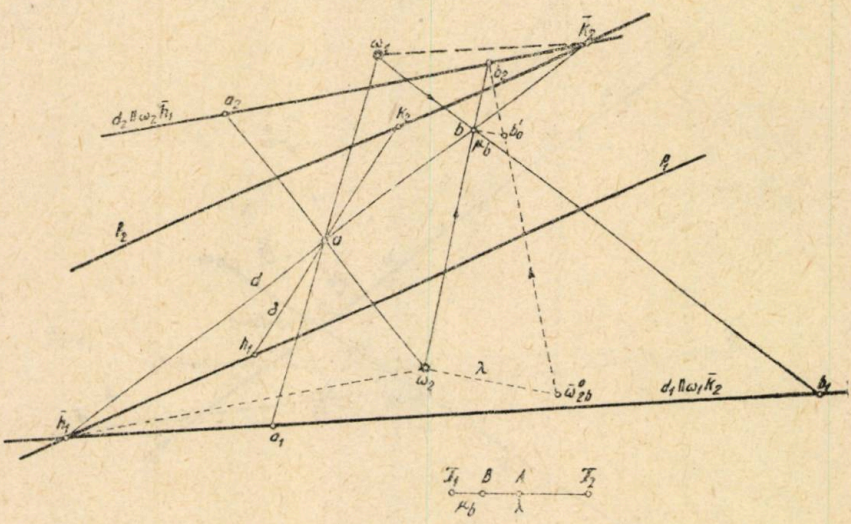


Fig. 20

C. Die Darstellung der Ebenen. Die parallelen Grundebenen π_1 und π_2 schneiden eine beliebige Ebene P nach den parallelen Spuren $P_1 \parallel P_2$, wobei $P_1 \in \pi_2$ und $P_2 \in \pi_2$ ist.

Es seien ω_1 und ω_2 die Mittelpunkte des bizentralen Projektionssystems und zwei willkürlich angenommene Spuren P_1 und P_2 (Fig. 20).

Wir werden die Ebene in diesem bizentralen Projektionssystem durch die Spuren P_1 und P_2 darstellen, indem wir die Spur P_1 als zentrale Projektion auf die Grundebene π_2 des Mittelpunktes ω_1 der Geraden P_1 der Ebene betrachten (der geometrische Ort derjenigen Punkte auf der Ebene, deren Sekundärlagenparameter Null sind), und die Spur P_2 als zentrale Projektion auf die Grundebene π_1 vom Mittelpunkt ω_2 der Geraden P_2 der Ebene (der geometrische Ort der Ebenenpunkte, die zum Hauptlagenparameter Null haben).

Eine beliebige Gerade, enthalten in der Ebene P, wird ihre orthogonale Projektion δ auf der darstellenden Ebene π und die Spuren h_1 und k_2 auf den parallelen Grundebenen haben, wobei $h_1 \in P_1$ und $k_2 \in P_2$ sind.

Es sei a ein Punkt der Geraden δ und ω_1 a und ω_2 a die Ordnungslinien dieses Punktes.

Es ist leicht zu bemerken, daß diese durch Spuren dargestellte Ebene unvollständig ist.

Wir können daher folgenden

Lerhsatz (12) formulieren: *Der durch Spuren bestimmte Riß der Ebene ist unvollständig.*

Wir wollen den Riß dieser Ebene ergänzen. Es sei λ der Modul des vollständigen Risses und A ein beliebiger Punkt der Modulskala, welchen wir als zur Ebene P gehörig betrachten. Es ergeben sich die bizentralen Projektionen a_1 und a_2 dieses Punktes. Durch diese Vorgangsweise ist der Riß der Ebene P vervollständigt worden.

Wir wollen nun die bizentralen Projektionen b_1 und b_2 eines anderen Punktes B der Ebene betrachten, dargestellt durch diesen vollständigen Riß (Fig. 20).

Es sei b die orthogonale Projektion dieses Punktes auf die darstellende Ebene π. Da der Punkt B zur Ebene P gehört, wird die durch die Punkte A und B bestimmte Gerade D ebenfalls im Plan P enthalten sein. Durch Überschneiden der orthogonalen Projektion d der Geraden D auf der Ebene π mit den Spuren der Ebene P_1 und P_2, erhalten wir die Spuren h_1 und k_2 der Geraden D.

Die bizentralen Projektionen d_1 und d_2 der Geraden D werden sofort erhalten gemäß Satz (8), da $a_1 \in d_1$; $h_1 \in d_1$; $d_1 \parallel \omega_1 k_2$, während $a_2 \in d_2$; $k_2 \in d_2$; $d_2 \parallel \omega_2 h_1$ sind.

Die Ordnungslinien des Punktes b schneiden die Geraden d_1 und d_2 in den bizentralen Projektionen b_1 und b_2 des gesuchten Punktes B.

Die Lage des Punktes B der Ebene auf der Modulskala wird sofort festgestellt, z.B. mittels Bestimmung des Hauptlagenparameters μ_b. Wenn $\mu_b = \mu_a$, erhalten wir $d \parallel P_1 \parallel P_2 \parallel d_1 \parallel d_2$.

Auf Grund der Sätze (5) und (10) können wir auch in bezug auf die Ebene folgenden.

Lehrsatz (13) aufstellen: *Der vollständige Riß der Ebene ist unveränderlich gegen die Ummwandlung des Moduls.*

Auf Grund dieser Resultate ist die Darstellung der Ebene mit diesem bizentralen System leicht mittels zweier Parallelen oder mittels zweier zusammenlaufender Geraden durchzuführen.

D. Verhältnisprobleme. Schnitt zwischen zwei Ebenen und Schnitt zwischen einer Geraden und einer Ebene. Es seien ω_1 und ω_2 die Projektionsmittelpunkte, P_1, P_2 die Spuren einer Ebene P und h_1, h_2, die Spuren einer Geraden D (Fig. 21).

Eine beliebige Ebene Q, gelegt durch die Gerade D, wird die Spuren $Q_1 \parallel Q_2$ aufweisen, wobei $h_1 \in Q_1$ und $K_2 \in Q_2$ sind.

Die Schnittgerade Δ zwischen den Ebenen P und Q hat die Spuren h_1 und k_2 auf den parallelen Grundebenen.

Der Schnittpunkt M zwischen der Geraden D und der Ebene P wird die orthogonale Projektion m auf der darstellenden Ebene π aufweisen.

Wir bemerken, dass alle Konstruktionen bis nur auf einem unvollständigen Verhältnisriß ausgeführt wurden. Bestimmen wir den Modul λ des Risses und die Lage des Punktes M auf der Modulskala.

Es ergeben sich die bizentralen Projektionen m_1 und m_2 des Punktes, M, und der Riß wird vollständig.

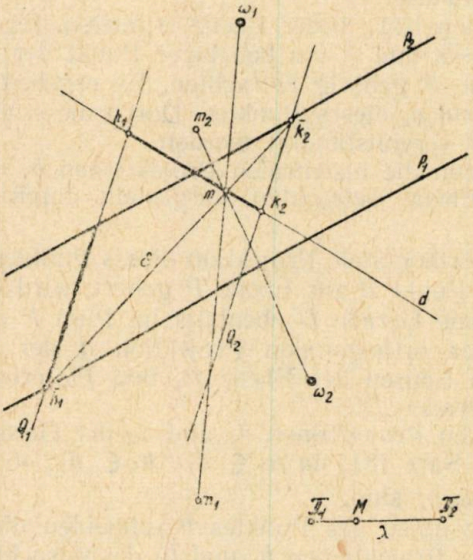


Fig.21

Wir können somit in bezug auf diese Verhältnisprobleme auf Grund der vorher erhaltenen Resultate folgenden

Lehrsatz (14) aufstellen: *Die kompletten Risse der Verhältnisprobleme Ebene-Ebene und Gerade-Ebene sind unveränderlich gegenüber der Verwandllung des Moduls.*

E. Die Erläuterung der biorthogonalen Verhältnisrisse Monge auf Grund des bizentralen Projektionssystems mit zwei parallelen Grundebenen.

Betrachten wir das gewöhnliche Problem des Schnittes zwischen der Geraden D (d, d') und der Ebene $PP_x\ P'$ wobei ox die Erdlinie (Achse) (Fig. 22) im biorthogonalen Projektionssystem Monge ist.

Eine beliebige Niveauebene $H' = \pi_1$ führt uns zu den parallelen Grundebenen π_1 und π_2 des bizentralen Projektionssystems. Die Ebene P wird die Spuren P_1 und P_2 und die Gerade D die Spuren h_1 und k_2 haben.

Da der Rißmodul λ ist, ist der Verhältnisriss Gerade-Ebene komplett.

Eine beliebige Ebene Q durch die Gerade D hat die Spuren Q_1 und Q_2 auf den parallelen Grundebenen und schneidet sich mit der Ebene P

nach der Geraden Δ, deren Spuren auf den parallelen Grundebenen h_1 und k_2 sind. Natürlich ergibt sich aus dem Schnitt der Geraden d und δ die orthogonale Projektion a auf der darstellenden Ebene π des Schnittpunktes A zwischen der Geraden D und der Ebene P.

Nehmen wir die Projektionszentren $\omega_2 = h_1$ und $\omega_1 \equiv \bar{k}_2$ an.

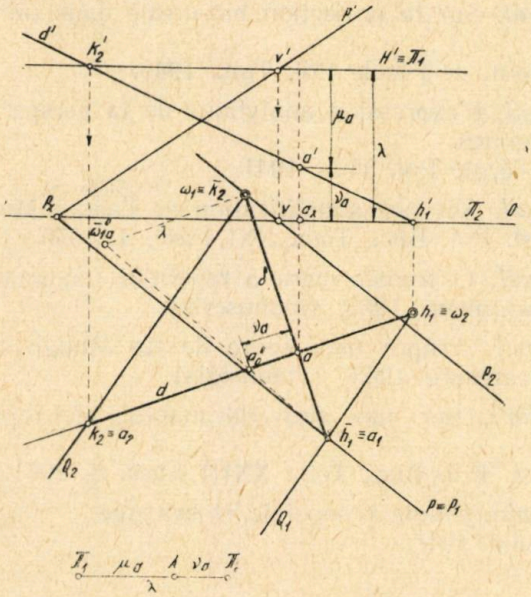


Fig. 22

In dieser Lage werden die bizentralen Projektionen a_1 und a_2 des Punktes A $a_1 \equiv \bar{h}_1$ und $a_2 \equiv k_2$ sein. Die Geraden d und δ werden dadurch Ordnungslinien der Senkrechten in a auf den parallelen Grundebenen.

Die Bestimmung des Sekundärlagenparameters ν_a des Schnittpunktes führt uns zur Vertikalprojektion a', somit zur Lage des Punktes A auf der Modulskala. Es ist selbstverständlich, daß der erhaltene Verhältnisriß unveränderlich ist gegenüber einer Umwandlung des Moduls.

Diese Erläuterung hat uns somit zur Bestimmung einer ganz originellen einfachen Methode, eine Gerade mit einer Ebene zu schneiden, geführt.

Neben der Methode der parallelen oder der zentralen Projektion kann diese neue Methode bei den praktischen, laufenden Anwendungen schöne Resultate ergeben.

Vom Standpunkt der Zahl der Linien, die auf dem Riß gezogen werden, und zwar sechs, ist die Methode perfekt gleichwertig mit der parallelen Projektion.

Katheder der darstellenden Geometrie,
Politechnisches Institut Bukarest

LITERATUR — VERZEICHNIS

1. *Botez Șt. Mihail*, Sur la projection bicentrale Bull scientifique de l'école Pol. Tim., 1934.
2. *Botez Șt. Mihail*, Sur la projection bicentrale dans un espace à quatre dim.
Bull. scient. de l'école Pol. Tim., 1940.
3. *Botez Șt. Mihail*, L'expression analytique de la perspective newtonienne des polygones.
Bull de l'école Pol. Tim., 1941.
4. *Botez Șt. Mihail*, Sur une simplification de l'epure Monge.
Bull. Inst. Pol. Buc., Tom. XXI Fasc. 4, 1959.
5. *Botez Șt. Mihail*, O transformare a reperului fundamental al perspectivei newtoniene, 1963, (manuscris).
6. *Botez Șt. Mihail*, Asupra unei epure de tip Monge cu diedru fundamental oarecare 1963, (manuscris).
7. *Botez Șt. Mihail*, Sur une nouvelle manière de représenter l'espace lineaire.
Bull. Inst. Pol. Buc., Tom. XXIII Fasc. 3, 1961.
8. *N. F. Cetveruhin*, Polnîe i nepolnîe izobrajenie.
Gostehizdat 1947.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC BUCUREȘTI
Tomul XXVI — 1964, Fascicola 3

C.Z. 515

ASUPRA DEPLASĂRILOR DE SPEȚA ÎNTII ÎN EPURA CU DIEDRUL FUNDAMENTAL NUL *

NICOLAE MIRESCU

În comunicarea făcută la sesiunea științifică a cadrelor didactice din Institutul politehnic din București, 17—18 decembrie 1960, prof. Mihail Botez [1] a luat ca reper al reprezentării plane a spațiului riglat un sistem format din două plane paralele: π ($z=0$) și π^* ($z=1$) unde ($\pi \parallel \pi^*$).

Acest mod de reprezentare a fost extins de către conf. A. Tănăsescui [3] și prof. Mihail Botez și șef de lucrări Th. Albu [2] în comunicările ce s-au ținut la sesiunile științifice ale Institutelor de mine din Petroșan și politehnic din Cluj în anul 1963.

S-a arătat astfel că deși se folosește o singură imagine, se pot rezolva cu această epură, cu economie grafică, toate problemele fundamentale ale geometriei descriptive.

În ceea ce urmează ne vom ocupa de aspectul deplasărilor în această epură.

I. *Translația.* Fie F o figură plană a cărei imagine este F_1. Dacă se dă figurii F o mișcare de translație de cevtor $\overline{V} \parallel \pi$ atunci F_1 primește o mișcare de translație de vector echivalent primului (fig. 1). Dacă însă

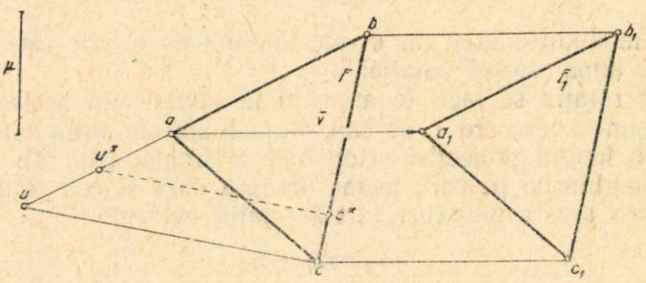


Fig. 1.

*) Lucrare comunicată la sesiunea științifică a cadrelor didactice din Institutul politehnic București, 22—23 februarie 1964.

figura F are o mișcare de translație în planul său, atunci imaginea sa are o mișcare de translație al cărei vector $\overline{V_1}$ este componentul vectorului $\overline{V}$ după direcția corespunzătoare în planul π.

Fie T și T' translațiile definite de vectorii $\overline{OA}=\overline{V}$ și $\overline{OB}=\overline{V^*}$, transformarea TT' fiind definită de vectorul $\overline{OC}$, rezultanta vectorilor $\overline{OA}$ și $\overline{OB}$, imaginea F_1 a figurii F va avea în planul π o mișcare de translație de vector egal cu componentul vectorului $\overline{OC}$ după direcția corespunzătoare din planul π.

Din cele de mai sus rezultă că dacă se aplică figurii obiect o translație, corespunde pentru imaginea sa tot o translație.

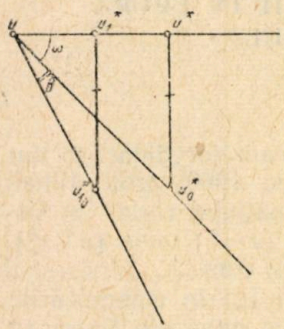


Fig. 2.

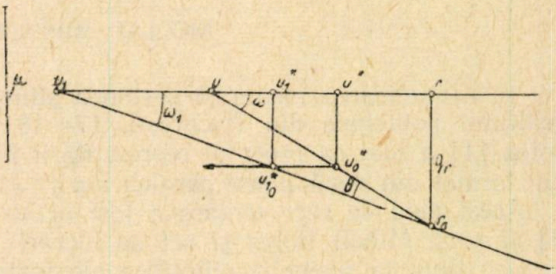


Fig. 3.

II. *Rotația.* 1) O figură F rotită în jurul unui ax perpendicular pe planul imaginilor se transformă într-o figură F_1 congruentă cu F. Imaginile f și f_1 vor fi de asemenea două figuri congruente.

Să luăm ca figură o dreaptă D (u, u^*) pe care o rotim în planul său proiectant (fig. 2), în jurul urmei u. În acest caz, urma secundară u^* a dreptei primește o mișcare de translație în lungul proiecției ortogonale a dreptei ocupînd o poziție u_1^* astfel încît:

$$u\,u_1{}^* = \mu \operatorname{cotg}(\omega \pm \theta)$$

unde μ este modulul epurei, iar θ este unghiul de rotație care este pozitiv sau negativ, după sensul rotației.

2) Dacă rotația se face de asemeni în planul său proiectant, dar în jurul unui punct oarecare r al său, atunci ambele urme ale dreptei se deplasează în lungul proiecției ortogonale a dreptei (fig. 3). Dacă notăm cu ω și ω_1 unghiurile pe care le fac dreapta dată și cea rotită cu planul π, atunci între aceste unghiuri există relația evidentă:

$$\omega_1 = \omega \pm \theta \qquad (1)$$

unde θ este unghiul de rotație al cărui semn depinde de sensul rotației. Notînd cu q_r cota punctului r, se observă că între segmentele ru și ru_1 există relația:

$$ru \operatorname{cotg} \omega - ru_1 \operatorname{cotg} \omega_1 = 0 \qquad (2)$$

care este relația ce ne permite să construim cele două urme ale dreptei rotite dacă se cunoaște semnul și valoarea unghiului de rotație.

3) Fie dreapta $D(uu^*)$ căreia îi aplicăm o rotație R în jurul lui u în planul său proiectant de un unghi θ (fig. 4). Transformata dreptei prin această rotație este dreapta uA_1, în care $A_1 \leftrightarrow A$. Dacă acestei drepte îi dăm o rotație R' de unghi θ_1 în jurul punctului A_1, se obține $A_1\overline{u}$ cu $A_1u = A_1\overline{u}$, avînd ca urmă punctul $v = A_1v\ u\ u^*$. Unghiul ω_1 al dreptei obți-

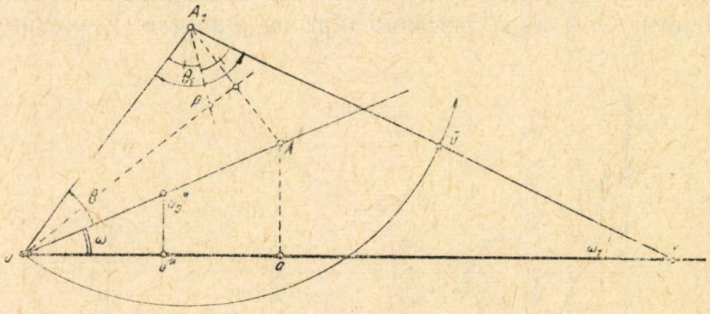


Fig. 4.

nută după ce s-a aplicat dreptei date produsul de rotații RR', este dat de

$$\omega_1 = 180^0 - (\theta + \theta_1 + \omega)$$

In această transformare dată de produsul RR' există un punct P invariant care se găsește la intersecția bisectoarelor unghiurilor θ și θ_1 și este cuprins în planul proiectant al dreptei considerate. Dacă $\theta + \theta_1 = 0$ acest punct este aruncat la ∞, deoarece, transformata dreptei D prin produsul RR' este paralelă cu dreapta dată.

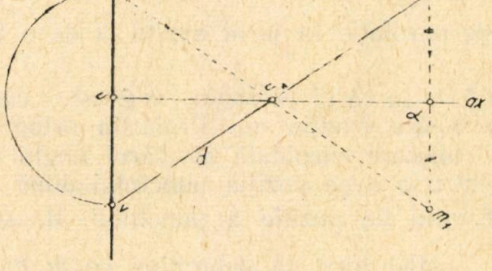


Fig 5.

III. *Simetria.* Fie un punct m al unei drepte $D(vu^*)$ și să construim simetricul său în raport cu un ax $(u\ u^*)$ care e linie de cea mai mare pantă în planul determinat de D și ax. Simetricul său m_1 se găsește pe simetrica dreptei $(v\ u^*)$ în raport cu axul considerat (fig. 5).

Simetria considerată face parte din grupul K_2, după clasificarea lui Feodorov, care este format din transformarea identică și din simetria față de o dreaptă, acesta fiind grupul care nu conține rotații.

Avem evident că produsul SS' (în care S și S' sînt două simetrii) se reduce la o rotație în jurul punctului de intersecție al celor două axe de un unghi $\varphi = 2\,\theta$ ($\widehat{\theta}$ este unghiul axelor).

IV. *Deplasarea elicoidală.* Să considerăm deplasarea elicoidală a unui punct M în jurul unui ax X perpendicular pe planul π. Deplasarea elicoi-

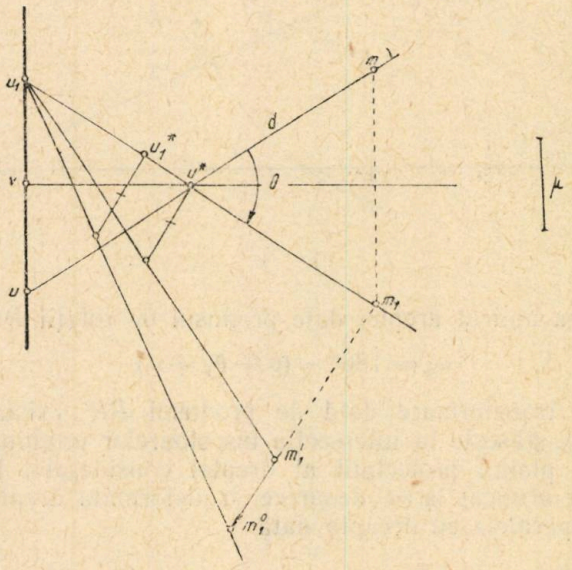


Fig. 6

dală este definită de o rotație în jurul axului și de o translație paralelă cu X (fig. 6).

Fie punctul $M \in D$, a cărui proiecție $m \in nu^*$. căruia aplicîndu-i-se o rotație, ocupă în epură poziția m_1. Proiecția ortogonală a punctului căreia i s-a dat o mișcare elicoidală al cărui unghi de rotație este θ coincide cu m_1; pentru a avea poziția punctului după deplasarea elicoidală trebuie ca vectorul de poziție a punctului M_1 să facă cu $u_1 m_1'$ un unghi $m_1' \widehat{u_1} m_1^0$ astfel încît să determine pe $m_1 m_1'$ vectorul $m_1' m_1^0$ egal cu vectorul de translație, ceea ce implică deplasarea urmei secundare u^* în u_1^*.

Din cele de mai sus rezultă că: *dacă într-o rotație a unui punct urma secundară a razei vectoare se deplasează pe proiecția dreptei rotite, atunci punctul transformat este obținut printr-o deplasare elicoidală.*

Observăm că dacă deplasarea urmei secundare se face către urma principală, punctul are o mișcare ascendentă ; în caz contrar, mișcarea este descendentă.

In acest referat s-au studiat numai deplasările de speța întîia, deoarece acestea intervin curent în problemele obișnuite de geometrie descriptivă.

Catedra de geometrie descriptivă și desen (I)
Institutul politehnic București

BIBLIOGRAFIE

1. *Botez Șt. Mihail* — Sur une nouvelle manière de représeter l'espace linéaire. Buletinul Inst. politehnic București, Tomul XXIII — fascicola 3 — 1961.

2. *Botez Șt. Mihail, Albu Theodor* — Asupra unei perspective cu plane fundamentale paralele. — Comunicare la sesiunea științifică a cadrelor didactice. Institutul politehnic — Cluj, mai 1963.

3. *Tănăsescu Aurelian* — Asupra sistemului de proiecție cu diedrul fundamental nul. — Comunicare la sesiunea științifică a cadrelor didactice, Institutul de mine — Petroșani, 8—10 martie 1963.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC BUCUREȘTI
Tomul XXVI — 1964, Fascicola 3

MECANICĂ

CZ 621-3

81569 10/65

LEFORDITVA

MECANISME PENTRU TRASAREA CU VITEZĂ CONSTANTĂ, A ELIPSELOR *)

N. I. MANOLESCU, P. ANTONESCU

§ 1. *Introducere*

Printre problemele care se pun de industrie, în realizarea planului de dezvoltare a economiei naționale, apar foarte multe care revin spre rezolvare teoriei mecanismelor.

Una din aceste probleme s-a pus catedrei de teoria mecanismelor și a mașinilor din Institutul politehnic București de către Uzinele Griviţa Roșie, căreia i s-a trasat prin noul profil fixat construirea de recipiente pentru industria chimică.

Fundurile acestor recipiente au forma unui elipsoid de rotație (denumit de uzină „fund eliptic") și sînt compuse dintr-o rozetă centrală (fig. 1) al cărei diametru măsurat într-un plan perpendicular pe axa longitudinală a recipientului variază de la 780 mm pînă la 1600 mm (corespunzător unui diametru al recipientului de la 2000 mm pînă la 3800 mm) și dintr-un număr de 7 pînă la 11 segmenți (petale) în funcție de diametrul acestuia

Confecționarea fundurilor se realizează prin sudarea electrică între ei a segmenților și a acestora cu rozeta centrală.

Conducerea manuală a electrodului a dat și dă naștere la dificultăți serioase în realizarea unei viteze de înaintare periferice constante.

Automatizarea procesului tehnologic de sudare a fundurilor eliptice impune construirea unui mecanism al cărui element condus să conțină în planul său un punct care să descrie o elipsă cu viteză constantă.

---

*) Lucrare comunicată la sesiunea științifică a cadrelor didactice din Institutul politehnic București, 22—23 februarie 1964.

În tehnică sînt cunoscute numeroase mecanisme plane articulate, care descriu elipse riguroase, fără însă ca în realizarea construcției lor să se fi pus — după cunoștința noastră — condiția trasării ei cu viteză constantă.

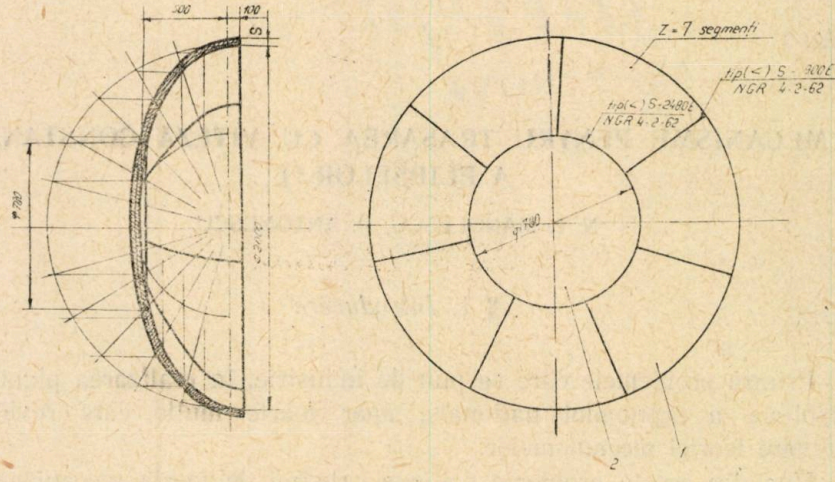


Fig. 1

§ 2. *Alegerea mecanismului caracteristic*

În rezolvarea problemei s-a pornit de la cel mai cunoscut mecanism plan articulat al cărui element condus conține în planul său un punct ce descrie o elipsă (fig. 2).

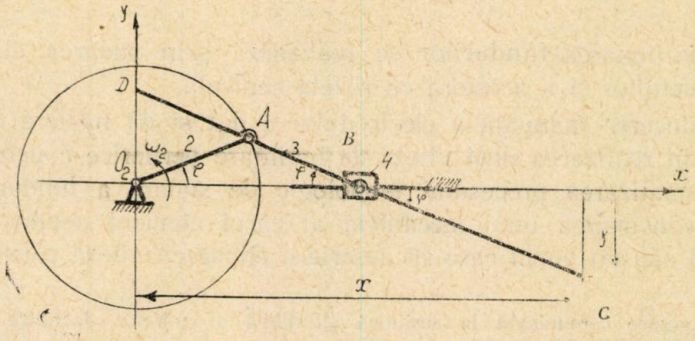


Fig. 2

Se știe că atunci cînd la mecanismul bielă-manivelă din fig. 2 se alege $O_2A=AB=AD=r$, punctul C aflat pe prelungirea bielei descrie o elipsă ale cărei ecuații parametrice în funcție de unghiul φ sînt:

$$x=(2r+a)\cos\varphi \qquad (1)$$

$$y=-a\sin\varphi$$

unde: $BC=a$

Ecuația traiectoriei punctului C este deci:

$$\frac{x^2}{(2r+a)^2}+\frac{y^2}{a^2}=1 \qquad (2)$$

Semiaxele elipsei sînt:

$2r+a$ = semiaxa mare, corespunzătoare diametrului recipientului;

a = semiaxa mică corespunzătoare bombamentului fundului eliptic al recipientului (înălțimea fundului).

Raportul dintre semiaxele elipsei fundului este același pentru toate dimensiunile recipienților:

$$\frac{1000}{500}=\frac{1100}{550}=\cdots=\frac{1900}{950}=2$$

În consecință pentru ca punctul G să descrie o elipsă identică va trebui ca

$$\frac{2r+a}{a}=2$$

de unde: $a=2r \qquad (3)$

În calculele ce urmează se va păstra însă ambii parametri (r și a) ai elipsei, urmînd ca înlocuirea dată de (3) să se facă mai tîrziu în ecuația legii de mișcare.

§ 3. *Calculul vitezei v_C a punctului C care descrie elipsa*

Se construiește planul vitezelor rabătute (rotit cu 90°) corespunzător unei viteze unghiulare ω_2 a manivelei O_2A (fig. 3).

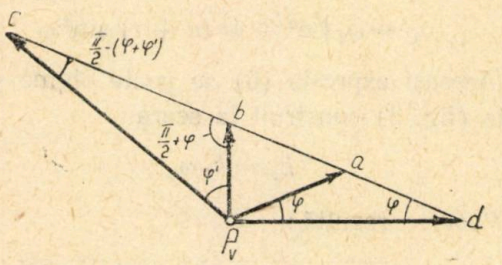


Fig. 3

Din acest plan al vitezelor rabătate rezultă viteza v_B a punctului B:

$$v_B = k_v\,(P_v b) = k_v\,2\,(P_v a)\sin\varphi = 2\,v_A \sin\varphi = 2r\omega_2 \sin\varphi \qquad (3a)$$

Din $(\triangle) P_v bc$ se poate scrie:

$$\frac{(P_v c)}{\sin\left(\frac{\pi}{2}+\varphi\right)} = \frac{(P_v b)}{\sin\left[\frac{\pi}{2}-(\varphi+\varphi')\right]} \quad \text{sau} \qquad (3b)$$

$$\frac{v_C}{\cos\varphi} = \frac{v_B}{\cos(\varphi+\varphi')} \quad \text{de unde:} \qquad (3c)$$

$$v_C = v_B \frac{\cos\varphi}{\cos(\varphi+\varphi')} = \frac{2r\omega_2 \sin\varphi\cos\varphi}{\cos\varphi\cos\varphi' - \sin\varphi\sin\varphi'} \quad \text{sau} \qquad (3d)$$

$$v_C = \frac{2r\omega_2}{\cos\varphi'} \cdot \frac{1}{\frac{1}{\sin\varphi} - \frac{1}{\cos\varphi}\operatorname{tg}\varphi'} \qquad (4)$$

Determinarea unghiului φ pe care-l face vectorul v_C cu axa Ox se poate obține fie din planul vitezelor, fie direct din ecuațiile parametrice (1).

Astfel din (1) prin derivare în raport cu timpul rezultă:

$$\frac{dx}{dt} = -(2r+a)\,\omega_2 \sin\varphi \qquad (4a)$$

$$\frac{dy}{dt} = -a\,\omega_2 \cos\varphi \qquad (4b)$$

de unde

$$\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg}\varphi' = \frac{a}{2r+a}\operatorname{ctg}\varphi \qquad (5)$$

Introducînd în (4) valorile lui $tg\,\varphi'$ și $\cos\varphi'$ se obține:

$$v_C = \omega_2 \sqrt{a^2 + 4r\,(a+r)\,\sin^2\varphi} \qquad (6)$$

Observație. Aceeași expresie (6) se poate obține și direct din planul vitezelor rabătute (fig. 3) construit la scara:

$$k_v = k_l\,\omega_2 \qquad (6a)$$

Astfel din $(\triangle)\ P_v bc$ rezultă:

$$(P_v c) = \sqrt{(P_v b)^2 + (bc)^2 + 2\,(P_v b)\,(bc)\sin\varphi} \qquad (6b)$$

din care, făcînd înlocuirile :

$$(P_v\, b) = \frac{v_B}{k_v} = \frac{2r\,\omega_2 \sin\varphi}{k_l\,\omega_2} = \frac{2r \sin\varphi}{k_l} \tag{6c}$$

$$(bc) = \frac{v_{CB}}{k_v} = \frac{a\,\omega_2}{k_l\,\omega_2} = \frac{a}{k_l} \tag{6d}$$

$$(P_v\, c) = \frac{v_C}{k_v} = \frac{v_C}{k_l\,\omega_2}, \tag{6e}$$

se obține expresia (6).

§ 4. *Determinarea legii de variație a vitezei unghiulare* ω_2 *pentru cazul cînd* $v_C = constant$

Pentru ca viteza v_C a vîrfului electrodului să fie constantă (determinată fiind de condițiile tehnologice de sudură) va trebui ca ω_2 (viteza unghiulară a elementului O_2A din fig. 2) *să depindă numai de unghiul* φ, toate celelalte mărimi din expresia (6) inclusiv v_C rămînînd constante.

Cu alte cuvinte :

$$\omega_2 = \frac{v_C}{\sqrt{a^2 + 4r\,(a+r)\,\sin^2\varphi}} = \omega_2(\varphi) = \frac{d\varphi}{dt} \tag{7}$$

Din (7) se observă că :

$$\text{pentru } \varphi = 0 \qquad \omega_{2\max} = \frac{v_C}{a} \tag{8}$$

$$\text{pentru } \varphi = \frac{\pi}{2} \qquad \omega_{2\min} = \frac{v_C}{2r + a} \tag{9}$$

$$\text{și deci :} \quad \frac{\omega_{2\max}}{\omega_{2\min}} = \frac{2r + a}{a} = 2 \tag{10}$$

Va trebui deci determinată legea de variație a unghiului φ în funcție de timpul t, lege dată de relația :

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{v_C}{\sqrt{a^2 + 4r\,(a+r)\,\sin^2\varphi}} \tag{10a}$$

care se mai poate scrie și :

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{1}{A\sqrt{B^2 - \cos 2\varphi}} \tag{11}$$

în care :

$$A = \frac{1}{v_C}\sqrt{2r\,(a+r)} \tag{12}$$

$$B^2 = \frac{(a+r)^2 + r^2}{2r(a+r)} \tag{13}$$

Din (11) rezultă:

$$t = A \int_0^{\varphi} \sqrt{B^2 - \cos 2\varphi}\, d\varphi \qquad (14)$$

Această lege de mișcare se poate realiza în două feluri:

a) manivela O_2A se transformă în tachet oscilant pe care îl va acționa o camă rotativă cu viteză unghiulară constantă;

b) manivela O_2A se transformă în roată dințată eliptică, pe care o va acționa o altă roată dințată eliptică cu viteză unghiulară constantă.

Mai departe se studiază ambele posibilități de realizare a legii de mișcare (14).

Realizarea mecanismului cu ajutorul camei rotative este reprezentată schematic în fig. 4.

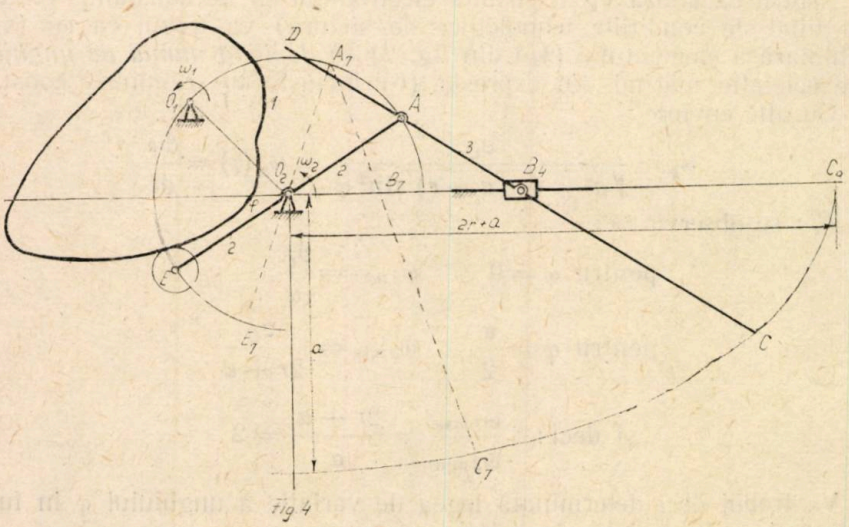


Fig. 4

Pentru determinarea profilului camei 1 care să imprime tachetului oscilant 2 legea de mișcare dată de relația (14) este necesară, în primul rînd, integrarea acesteia.

Pentru integrarea relației (14) se scrie:

$$\sqrt{B^2 - \cos 2\varphi} = (B^2 - \cos 2\varphi)^{\frac{1}{2}} \qquad (14a)$$

pe care dezvoltînd-o în serie se obține:

$$(B^2 - \cos 2\varphi)^{\frac{1}{2}} = B - \frac{1}{2} B^{-1} \cos 2\varphi - \frac{1}{8} B^{-3} \cos^2 2\varphi - \qquad (14b)$$

$$- \frac{1}{16} B^{-5} \cos^3 2\varphi - \frac{5}{128} B^{-7} \cos^4 2\varphi - \cdots$$

Integrala (14) devine:

$$t = A\int_0^{\varphi}\left[B - \frac{1}{2}B^{-1}\cos 2\varphi - \frac{1}{8}B^{-3}\cos^2 2\varphi - \frac{1}{16}B^{-5}\cos^3 2\varphi - \right. \tag{14c}$$

$$\left. - \frac{5}{128}B^{-7}\cos^4 2\varphi - \cdots\right]d\varphi$$

sau:

$$t = AB\varphi - \frac{A}{4B}\sin 2\varphi - \frac{A}{16B^3}\int_0^{\varphi}(1+\cos 4\varphi)\,d\varphi - \frac{A}{64B^5}\int_0^{\varphi}(\cos 6\varphi + \tag{14d}$$

$$+ 3\cos 2\varphi)\,d\varphi - \frac{5A}{512B^7}\int_0^{\varphi}(1+\cos 4\varphi)^2\,d\varphi - \cdots$$

Efectuînd și celelalte integrale se obține:

$$\frac{t}{A} = B\varphi - \frac{1}{4B}\sin 2\varphi - \frac{1}{16B^3}\varphi - \frac{1}{64B^3}\sin 4\varphi - \frac{1}{384B^5}\sin 6\varphi - \tag{14e}$$

$$- \frac{3}{128B^5}\sin 2\varphi - \frac{5}{512B^7}\varphi - \frac{5}{1024B^7}\sin 4\varphi - \frac{5}{1024B^7}\varphi -$$

$$- \frac{5}{8192B^7}\sin 8\varphi - \cdots$$

sau:

$$\frac{t}{A} = B\left(1 - \frac{1}{16B^4} - \frac{15}{1024B^8}\right)\varphi - \left(\frac{1}{4B} + \frac{3}{128B^5}\right)\sin 2\varphi - \tag{15}$$

$$- \left(\frac{1}{64B^3} + \frac{1}{1024B^7}\right)\sin 4\varphi - \frac{1}{384B^5}\sin 6\varphi - \frac{5}{8192B^7}\sin 8\varphi - \cdots$$

Expresia (15) dă legea generală de mișcare a tachetului oscilant acționat de cama 1 (sau a roții dințate eliptice) pentru realizarea unei viteze v_C constante la periferia unei elipse cu semiaxele date de ecuația (2).

Pentru cazul fundurilor eliptice caracterizate de relația (3) valorile lui A și B din (12) și (13) sînt respectiv:

$$A = \frac{1}{v_C}\sqrt{2r(a+r)} = \frac{r\sqrt{6}}{v_C} \tag{12'}$$

și

$$B = \sqrt{\frac{(a+r)^2 + r^2}{2r(a+r)}} = \sqrt{\frac{5}{3}} = 1{,}291 \tag{13'}$$

Cu aceste valori se calculează coeficienţii din legea de mişcare (15) :

$$B\left(1-\frac{1}{16\,B^4}-\frac{15}{1024\,B^8}\right)=1{,}291\left(1-\frac{9}{16.25}-\frac{15.81}{1024.625}\right)= \tag{15a}$$

$$=1{,}291\,(1-0{,}0225-0{,}0019)=1{,}2595$$

$$B\left(\frac{1}{4B^2}+\frac{3}{128\,B^6}\right)=1{,}291\left(\frac{3}{4.5}+\frac{3.27}{128.125}\right)=1{,}291\,(0{,}15+ \tag{15b}$$

$$+0{,}0051)=0{,}2002$$

$$B\left(\frac{1}{64\,B^4}+\frac{5}{1024\,B^8}\right)=1{,}291\left(\frac{9}{64.25}+\frac{5.81}{1024.625}\right)=1{,}291\,(0{,}0056+ \tag{15c}$$

$$+0{,}00063)=0{,}0080$$

$$B\,\frac{1}{384\,B^6}=1{,}291\,\frac{27}{384.125}=0{,}0007 \tag{15d}$$

$$B\,\frac{5}{8192\,B^8}=1{,}291\,\frac{5.81}{8192.625}=0{,}0001 \tag{15e}$$

Cu aceste valori expresia (15) devine :

$$\frac{t}{A}=1{,}2595\,\varphi-0{,}2002\sin 2\varphi-0{,}008\sin 4\varphi-0{,}0007\sin 6\varphi-$$

$$-0{,}0001\sin 8\varphi \tag{16}$$

Legea de mişcare va fi suficient de fidel reprodusă dacă se vor reţine numai primii doi termeni din membrul al doilea.

În felul acesta legea de mişcare pe baza căreia urmează să se proiecteze profilul camei sau roţile dinţate eliptice este :

$$\frac{t}{A}=1{,}2595\,\varphi-0{,}2002\sin 2\varphi \tag{17}$$

sau ţinînd seama de (12′) :

$$t=\frac{r\sqrt{6}}{v_c}\,(1{,}2595\,\varphi-0{,}2002\sin 2\varphi) \tag{17a}$$

care se mai poate scrie :

$$\boxed{t=\frac{r\sqrt{6}}{5\,v_c}\,(6{,}3\,\varphi-\sin 2\varphi)} \tag{17′}$$

§ 5. *Determinarea legii de mișcare* $t=t(\varphi)$ *pentru fundul eliptic cu Ø 2000 mm*

Corespunzător acestei dimensiuni grosimea tablei este $\delta=16$ mm, pentru care se prescrie o viteză de sudare de:

$$v_C = 23\cdots25 \text{ m/h} = 0{,}64\cdots0{,}7 \text{ cm } s^{-1} \qquad (17b)$$

(aceasta pentru sudarea automată)
Se alege $v_C = 0{,}7$ cm s^{-1}.
Pentru $D=2000$ mm rezultă:

$2r+a=1000$ mm de unde ținînd seama de (3)

se obține: $r=250$ mm $=25$ cm
Constanta A din (17) va avea valoarea:

$$A = \frac{r\sqrt{6}}{v_C} = \frac{25\sqrt{6}}{0{,}7} = 87{,}48\, s \qquad (17c)$$

În felul acesta ecuația (17′) devine:

$$\boxed{t = 110\,\varphi - 17{,}5 \sin 2\varphi} \qquad (18)$$

Celelalte ecuații, $t=t(\varphi)$, corespunzătoare celorlalte funduri eliptice depind de valoarea lui A.

Se întocmește astfel tabela de mai jos:

I.

1. D [mm] diametrul fundului	2. r [cm] raza manivelei	A [s] $A=\frac{r\sqrt{6}}{v_C}$	D [mm]	r [cm]	A [s]
2 000	25	87,48	3 000	37,5	131,2
2 200	27,5	96,4	3 200	40	140,0
2 400	30	104,1	3 400	42,5	148,8
2 600	32,5	113,8	3 600	45	157,5
2 800	35	122,5	3 800	47,5	166,2

Pentru proiectarea camei sau a roților dințate eliptice care să realizeze legea de mișcare $t=t(\varphi)$ dată de (18) este necesară trasarea diagramei $\varphi=\varphi(t)$; cu alte cuvinte în relația (18) trebuie explicitat unghiul φ (măsurat în radiani) funcție de timp (măsurat în secunde).

Această explicitare se poate face în două moduri: grafic și analitic.

§ 6. *Determinarea funcțiilor* $\varphi=\varphi(t)$ și $\omega_2=\omega_2(t)$

a. Metoda grafică.

Se construiește graficul funcției $t=t(\varphi)$ prin puncte, valorile lui $\varphi = 0° \ldots 90°$ luîndu-se, la scară, în radiani: $\varphi = 0° \ldots \frac{\pi}{2}$. În fig. 5 este trasată această curbă, care este rezultanta a două curbe:

$$t(\varphi) = t_1(\varphi) + t_2(\varphi) \tag{18'}$$

unde: $t_1(\varphi) = 110\,\varphi \qquad t_2(\varphi) = -17{,}5 \sin 2\varphi$ (18a)

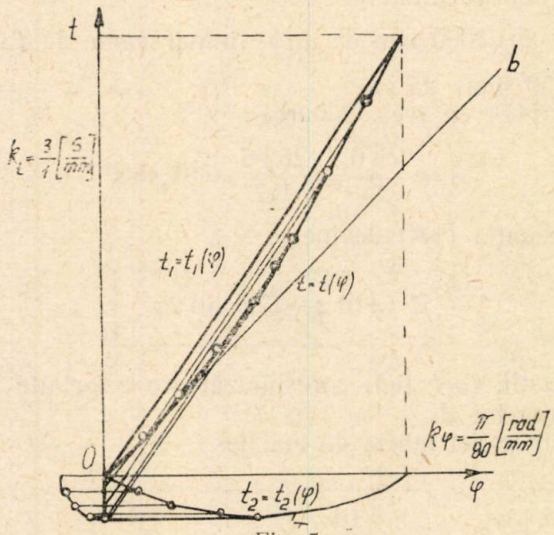


Fig. 5

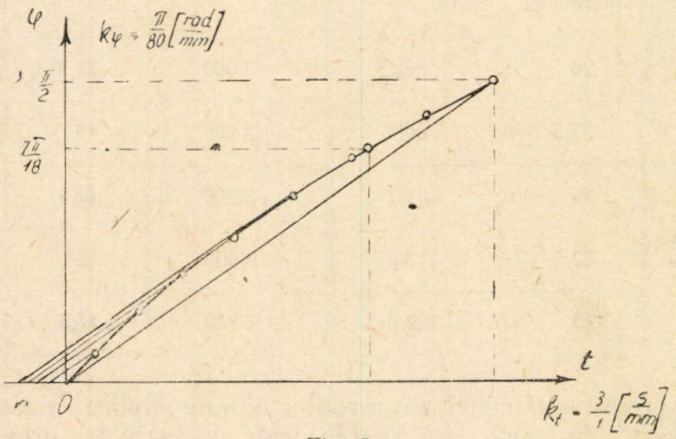


Fig. 6

Prin rotirea curbei în jurul bisectoarei *Ob* cu 180° se obține curba $\varphi=\varphi(t)$ redată în fig. 6.

Avînd curba $\varphi = \varphi(t)$ prin derivare grafică se poate construi curba $\omega_2 = \omega_2(t)$ (fig. 7 și 8).

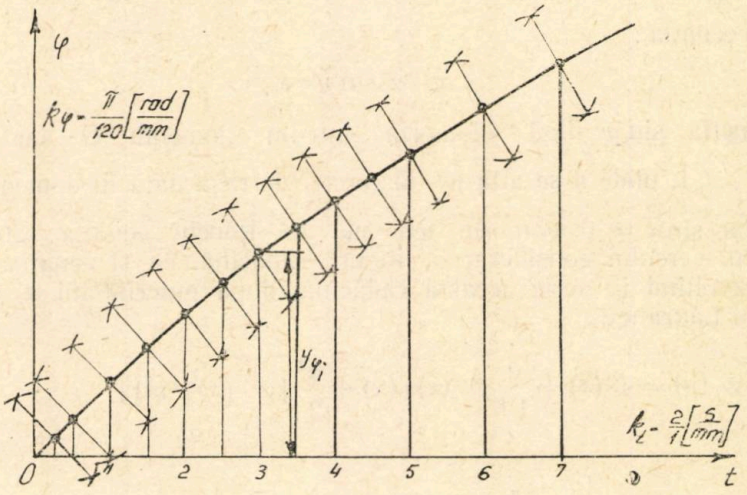


Fig. 7

b. Metoda analitică.
Ecuația (18) este de forma :

$$t = a\,\varphi - b \sin 2\varphi \qquad (18'b)$$

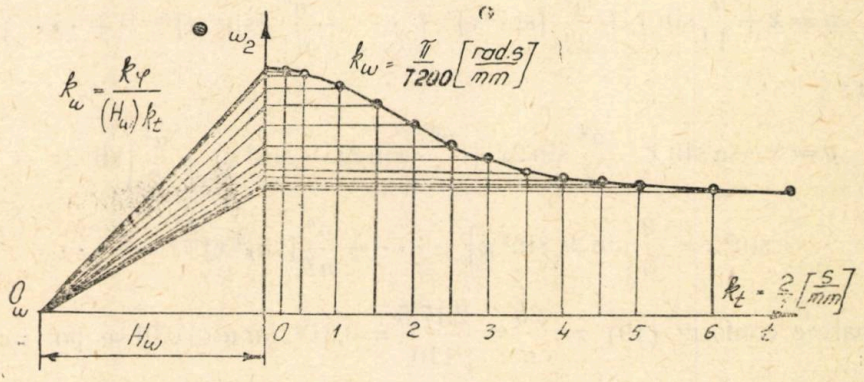


Fig. 8

sau :

$$\frac{t}{a} = \varphi - \frac{b}{a} \sin 2\varphi \qquad (18'c)$$

și notînd :

$$2\varphi = y; \quad \frac{2b}{a} = \alpha \text{ și } \frac{2t}{a} = x \tag{19}$$

rezultă ecuația :

$$y - \alpha \sin y = x \tag{20}$$

Funcția $\sin y$ fiind olomorfă într-un domeniu D iar raportul $\left|\frac{\alpha \sin y}{y - x}\right| < 1$, unde y se află pe un cerc C de rază dată în domeniul considerat, iar $\sin x \neq 0$, conform teoremei lui Rouché ecuația (20) are în interiorul cercului considerat o singură rădăcină, ca și ecuația $y - x = 0$.

Dezvoltînd în serie această rădăcină, după puterile lui α, se obține seria lui Lagrange :

$$\varnothing(y) = \varnothing(x) + \frac{\alpha}{1!}\varnothing'(x) f(x) + \frac{\alpha^2}{2!}[\varnothing'(x) f^2(x)]' + \cdots + \tag{21}$$

$$+ \frac{\alpha^n}{n!}[\varnothing'(x) f^n(x)]^{(n-1)} + \cdots$$

unde înlocuind :

$$\varnothing(y) = y; \quad \varnothing(x) = x \text{ și } f(x) = \sin x \tag{21a}$$

se obține :

$$y = x + \frac{\alpha}{1!}\sin x + \frac{\alpha^2}{2!}[\sin^2 x]' + \cdots + \frac{\alpha^n}{n!}[\sin^n x]^{(n-1)} + \cdots \tag{21'}$$

sau :

$$y = x + \alpha \sin x + \frac{\alpha^2}{2}\sin 2x + \frac{\alpha^3}{2}(\sin 2x - \sin^2 x) + \frac{\alpha^4}{2}\Big(\sin 2x - \tag{21'a}$$

$$- \sin^3 x - \frac{2}{3}\sin 2x \sin^2 x\Big) + \cdots + \frac{a^n}{n!}[\sin^n x]^{(n-1)} + \cdots$$

Deoarece conform (19) $\alpha = \frac{2b}{a} = \frac{2.17{,}5}{110} = 0{,}318$, iar $\alpha^4 \cong 0{,}01$ se pot lua în considerare, cu suficientă aproximație, numai primii patru termeni și o parte din al cincilea :

$$y = x + \alpha \sin x + \frac{\alpha^2}{2}(1 + \alpha + \alpha^2)\sin 2x - \frac{\alpha^3}{2}(1 + \alpha)\sin^3 x \tag{21''}$$

sau făcînd înlocuirile din (19) se găsește funcția $\varphi = \varphi(t)$ sub forma:

$$\varphi = 0{,}0091\, t + 0{,}159 \sin\frac{t}{55} + 0{,}035 \sin\frac{2t}{55} - 0{,}01 \sin^3\frac{t}{55} \qquad (22)$$

Relația (22) reprezentată grafic, la aceeași scară, urmărește suficient de fidel curba $\varphi = \varphi(t)$ din fig. 6.

Acest lucru s-a făcut dîndu-se lui t valori din 5 în 5 secunde, în (22), pentru care s-au obținut valorile lui φ în radiani așa cum se vede în tabela de mai jos:

II.

t [s]	0	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
φ [rad]	0,000	0,0661	0,1218	0,1964	0,2611	0,3239	0,3847	0,4431	0,5017	0,5561	0,6101

55	60	65	70	75	80	85	90	95	100	105
0,6571	0,7091	0,7554	0,7968	0,8437	0,8841	0,9252	0,9640	1,0014	1,0426	1,0893

110	115	120	125	130	135	140	145	150	155	160
1,1155	1,15475	1,18755	1,2238	1,2637	1,2996	1,33025	1,3715	1,41807	1,44449	1,48097

Funcția $\omega_2 = \omega_2(t)$ se determină prin derivarea funcției (22) în raport cu timpul t.

$$\frac{d\varphi}{dt} = \omega_2 = 0{,}0091 + \frac{0{,}159}{55}\cos\frac{t}{55} + \frac{0{,}07}{55}\cos\frac{2t}{55} - \frac{0{,}03}{55}\sin^2\frac{t}{55}\cdot\cos\frac{t}{55} \qquad (23)$$

sau: $$\omega_2 = 0{,}0091 + 0{,}0029\cos\frac{t}{55} + 0{,}00127\cos\frac{2t}{55} - 0{,}000545\sin^2\frac{t}{55}\cdot\cos\frac{t}{55} \qquad (23')$$

Curba $\omega_2 = \omega_2(t)$ se trasează după valorile date în tabela de mai jos (fig. 8) :

t [s]	0	5	10	15	20	25	30	35	40
ω_2 [rad s^{-1}]	0,01327	0,01324	0,013133	0,012952	0,012702	0,012414	0,012062	0,011672	0,011258

45	50	55	60	65	70	75	80	85
0,010827	0,010401	0,009871	0,009551	0,009181	0,008812	0,008464	0,0081708	0,0079209

90	95	100	105	110	115	120	125	130
0,0077147	0,0075436	0,0074675	0,0073515	0,0072785	0,007233	0,007230	0,007214	0,007232

§ 7. *Determinarea profilului camei pentru realizarea legii de mișcare* $\varphi = \varphi(t)$

Pentru ca punctul C (fig. 4) să se deplaseze pe toată lungimea de sudare, unghiul φ trebuie să varieze între 0° și 70° din care cauză se lucrează în continuare cu curba $\varphi = \varphi(t)$ cuprinsă între $t = 0 \ldots 125$ secunde.

Cama ce urmează să realizeze legea de mișcare $\varphi = \varphi(t)$ va fi cu tachet oscilant și se va proiecta după cum urmează : la scara $k_l \left[\frac{m}{mm}\right]$ se măsoară față de punctul O_1 (arbitrar ales) distanța $O_1O_2 = O_2E = O_2A = r$ pe direcția care formează cu orizontala unghiul α. Apoi din O_2 ca centru și cu raza O_2E, la scara k_l se descrie un arc de cerc pe care se măsoară, începînd de pe orizontală, arcele : $(\widehat{E_0E_i}) = (\overline{O_2E})\varphi_i = O_2E\frac{k_\varphi}{k_l}(y_{\varphi i}) = k\,(y_{\varphi i})$ [mm]

unde $(y_{\varphi i})$ se măsoară pe fig. 7 în mm, iar k_φ este scara unghiurilor în $\left[\frac{rad}{mm}\right]$

Cu piciorul compasului în O_1 și cu raza $(\overline{O_1O_2})$, (fig. 9) se descrie un arc de cerc de mărime dată β care se împarte în i părți egale corespunzătoare lui φ_i (pe desen 1′, 2′, ... 7′).

Tot din O_1 ca centru se duc arce de cerc, cu raze variabile $(\overline{O_1E_i})$, în sensul trigonometric. Aceste arce intersectate pe rînd cu arce de cerc de rază constantă și egală cu $(\overline{O_2E})$ și cu centrele pe cercul de rază O_1O_2 în

punctele corespunzătoare indicelui lui E (ex. arcul de cerc cu centrul în 3′ se intersectează cu arcul de cerc cu raza $(O_1\overline{E_3})$ dînd punctul 3) determină în final punctele E_0, 1, 2, ... 7, care unite printr-o curbă continuă formează profilul teoretic al camei.

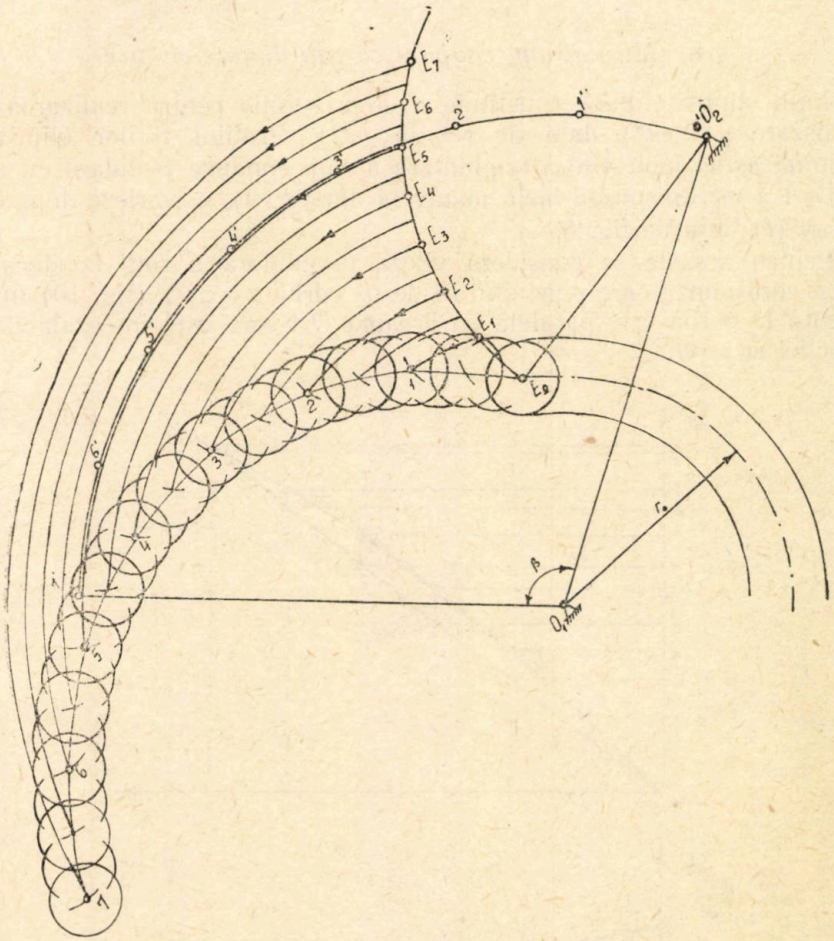


Fig. 9

Pentru o mai precisă trasare a acestui profil se pot lua puncte intermediare. Din punctele 0, 1, 2, ... i precum și din cele intermediare se duc cercuri cu raza $(\rho) = \frac{\rho}{k_l}$ [mm] care este raza rolei tachetului oscilant și care se alege constructiv.

După cum rezultă din figură, profilul activ (de ridicare) al camei se obține ca înfășurătoarea cercurilor de rază (ρ).

Profilul de coborîre, unghiul de coborîre și unghiul de staționare pe cercul de bază se aleg constructiv.

Pentru asigurarea permanentă a contactului dintre rolă și camă, pe aceasta din urmă se practică un canal a cărui axă este chiar profilul teoretic.

Raza cercului de bază se ia constructiv $r_0 = O_1E_0$, acesta racordîndu-se cu curba de ridicare pentru a evita blocarea tachetului.

§ 8. *Calculul angrenajului cu roți dințate eliptice*

Roțile dintre eliptice constituie a doua soluție pentru realizarea legii de mișcare $\varphi = \varphi(t)$ dată de relația (22). Profilul roților eliptice se determină astfel încît viteza unghiulară a roții conduse (solidară cu manivela O_2A a mecanismului bielă manivelă din fig. 4) să varieze după legea $\omega_2 = \omega_2\ (t)$ dată de fig. 8.

Pentru aceasta se consideră viteza unghiulară a roții conducătoare $\omega_1 = ct.$ corespunzătoare punctului M de pe curba $\varphi = \varphi(t)$ (fig. 10) în care tangenta la curbă este paralelă cu dreapta OA care este integrala lineară a funcției $\omega_1 = ct.$

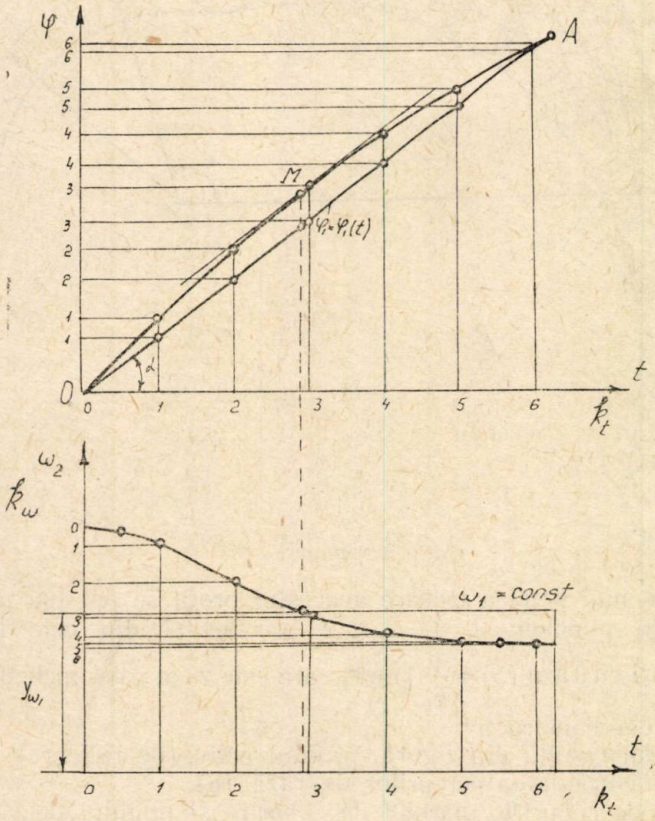


Fig. 10

Pentru construirea celor două curbe de rulare se alege (fig. 11) distanța O_1O_2 între axele de rotație a celor două roți.

Din punctul O_1 se măsoară, pe o direcție perpendiculară pe O_1O_2, ordonatele din diagrama $\omega_2 = \omega_2(t)$ (fig. 10), la aceeași scară k_ω $\left[\frac{rads^{-1}}{mm}\right]$. Din O_2 pe o direcție perpendiculară pe O_1O_2, în sens opus primei măsurători, se ia distanța $(O_2a) = (y\omega_1)$ din aceeași diagramă.

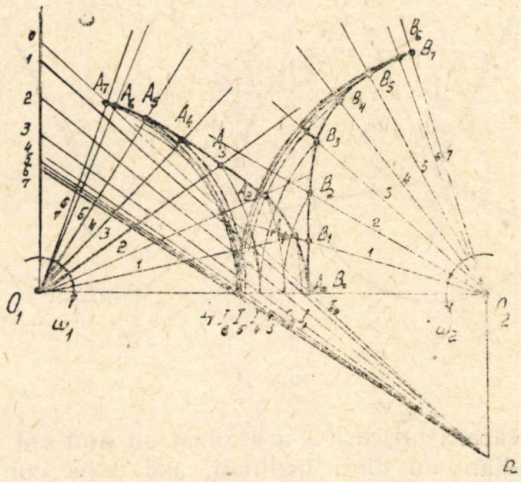


Fig. 11

Se unește punctul „a" cu punctele 0, 1, 2, ... obținîndu-se, în acest fel, pe direcția O_1O_2 punctele I_0, I_1, I_2, I_3, ... I_7, care sînt tocmai centrele instantanee de rotație (CIR) relative ale mișcării (angrenării) pentru poziția respectivă.

Din punctul O_2 se măsoară unghiuri proporționale cu ordonatele măsurate pe diagrama $\varphi = \varphi(t)$ iar din O_1 unghiuri proporționale cu ordonatele măsurate pe diagrama $\varphi_1 = \varphi_1(t)$ din fig. 10 (acestea din urmă sînt unghiuri egale pentru intervale de timp egale dată fiind mișcarea constantă a elementului conducător $\omega_1 = ct$.

Cu compasul în O_1 și cu deschiderile O_1I_0, O_1I_1, O_2I_2, ... se duc arce de cerc, care intersectează razele vectoare de același ordin în punctele respective A_0, A_1, A_2, ... aparținînd curbei de rulare a roții conducătoare.

Cu piciorul compasului în O_2 și deschiderile O_2I_0, O_2I_1, O_2I_2, ... se duc arce de cerc care intersectează razele vectoare corespunzătoare (O_2O_1, O_2I, O_22, ...) în punctele B_0, B_1, B_2, ... aparținînd curbei de rulare a roții conduse.

Legea de mișcare (22) impusă roții conduse (O_2) este necesară pentru un unghi de rotire a acesteia de cca. 70° (fig. 4) din care cauză curbele de rulare (sectoarele dințate) A_0—A_7 și B_0—B_7 sînt suficiente pentru reali-

zarea mișcării punctului C (căruciorului de sudat) pe întreaga porțiune de sudat a petalelor. Problema care se pune în acest caz este: cum se poate realiza mișcarea de oscilație (balansare) a roții conduse (O_2), aceasta trebuind ca după rotirea cu cca. 70° să se întoarcă în poziția inițială pentru ca astfel punctul C să-și reia mișcarea din aceeași poziție (C_0).

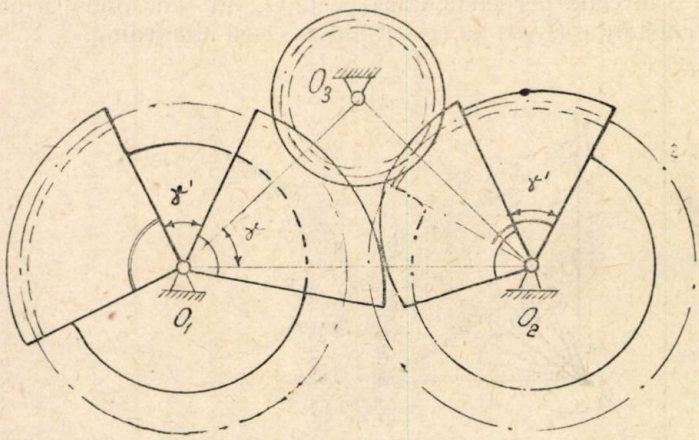


Fig. 12

Această inversare a mișcării s-a realizat cu ajutorul unei roți dințate cilindrice intermediare cu dinți înclinați, așa după cum se observă în schița alăturată (fig. 12).

§ 9. *Calculul de alegere a reductorului*

Cunoscînd turația n_m pe care trebuie să o aibă cama sau roata dințată eliptică conducătoare și alegînd pentru acționare un motor electric asincron cu turația n_M rezultă raportul de multiplicare a reductorului $i = \frac{n_M}{n_m}$.

Acest raport fiind de ordinul miilor, se poate realiza cu ajutorul unui reductor planetar cu schema cinematică din fig. 13.

Acest mecanism planetar simplu se obține din mecanismul planetar diferențial prin fixarea roții z_1 (al doilea element conducător).

In cazul mecanismului diferențial, prin imobilizarea brațului portsatelit S se poate scrie raportul:

$$i_{13}^{s} = \frac{\omega_3 - \omega_s}{\omega_1 - \omega_s} = \frac{z_2'}{z_3} \cdot \frac{z_1}{z_2} \qquad (24)$$

sau:

$$\frac{n_m - n_M}{n_1 - n_M} = \frac{z_1 z_2'}{z_2 z_3} \qquad (25)$$

Pentru $n_1=0$ se obține mecanismul planetar din figură cu-n singur grad de mobilitate :

$$\frac{n_m - n_M}{-n_M} = 1 - \frac{n_m}{n_M} = \frac{z_1 z_2'}{z_2 z_3} \qquad (26)$$

de unde :

$$i_{s3}^1 = \frac{n_m}{n_M} = 1 - i_{13}^s = 1 - \frac{z_1 z_2'}{z_2 z_3} = \frac{1}{i} \qquad (27)$$

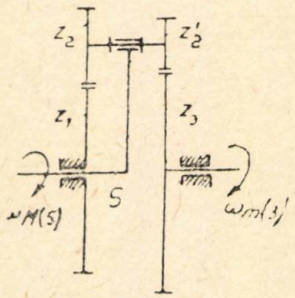


Fig 13

Numărul de dinți se determină astfel ca să verifice ultima relație. Mai trebuie verificată relația constructivă :

$$m_n (z_1 + z_2) = m_a' (z_2' + z_3) \qquad (28)$$

dacă : $\frac{z_1 + z_2}{z_2' + 2_3} \neq 1$ atunci se iau înclinații diferite pentru dinți rezul- (29)
tînd $m_a' \neq m_a$ (modulul aparent).

Catedra de teoria mecanismelor
Institutul politehnic București

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC BUCUREȘTI
Tomul XXVI — 1964, Fascicola 3

CHIMIE - FIZICĂ

C.Z. 541.132

DIE TRENNUNG VON IONEN MIT NAHELIEGENDEN PHYSIKALISCH-CHEMISCHEN EIGENSCHAFTEN DURCH DIFFUSION IN IONENAUSTAUSCHERN

V. PĂRĂUȘANU

Die ungleichmässige Verteilung einiger Substanzen im Zwischenphasengleichgewicht wie auch die Unterschiede der Massenübertragungsgeschwindigkeiten können Trenn-und Reinigungsmethoden dieser Substanzen darstellen. Die fraktionierte Destillation, die Extraktion mit selektiven Lösungsmitteln sind Beispiele, die auf der ungleichmässigen Verteilung einiger Substanzen im Gleichgewicht beruhen ; die Thermodiffusion und die Diffusion durch poröse Wände dagegen, fussen auf dem Unterschied der Massenübertragungsgeschwindigkeit dieser Substanzen.

Obwohl beim Ionenaustausch beide Möglichkeiten anwendbar sind, ist bisher in der Praxis nur die Methode des Zwischenphasengleichgewichtes benützt worden. Die auf dem Unterschiede der Austauschgeschwindigkeiten der Substanzen in Lösung und Ionenaustauscher beruhende Trennmethode ist in der Fachliteratur [1] als möglich angeführt worden, doch ist sie bisher nicht untersucht worden.

Haben die Gleichgewichtskonstanten einiger Austauschprozesse K_{AB}, K_{BC} . . . eins naheliegende Werte, so ist die Trenung der Ionen A, B, C, aus der Lösung nach der Gleichgewichtsmethode sehr schwierig. Untercheiden sich die Diffusionskoeffizienten D_A, D_B, C und ändert sich das Verhältnis $/D_B$ mit der Temperatur, so kann die Diffusionserscheinung einer Trennmethode dieser Ionen zugrunde liegen und zwar in dem Felde, in dem die bestimmende Stufe des Austauschprozesses von der Diffusion im Korn dargestellt wird.

Dieses ist der Fall der besonders wichtig ist da, um ein Vorherrschen der Diffusion im Film zu erreichen, die Lösung durch die Austauschkolonne mit einer genügend kleinen Geschwindigkeit fliessen muss, wodurch das System nahe dem Gleichgewicht kommt und sich somit ein Abfallen des Trenneffektes bemerkbar macht.

Zwischen den Diffusionskoeffizienten in Körnern einiger anorganischen Ionen können Unterschiede der Grössenordnung 10^3 auftreten, wogegen die Diffusionskoeffizienten im Film derselben Ionen dieselbe Grös-

senordnung aufweisen. Naheliegende Werte der Diffusionskoeffizienten im Film zeigen an, dass die Trennung durch diese Diffusion in der Praxis nicht anwendber ist.

Im Falle von Lösungen die zwei Ionen enthalten erreicht man den besten Trenneffekt wenn sich das System im Gleichgewich befindet. Bei Ionenpaaren mit sehr naheliegenden physikalisch-chemischen Eigenschaften weichen die Gleichgewichtskonstanten wenig vom Werte eins ab und somit ist eine Trennung dieser Ionen auf diesem Wege unmöglich, sogar dann wenn die Diffusionsgeschwindigkeiten dieser Ionen grosse Unterschiede aufweisen.

Es kann aber bewiesen werden dass, wenn in das System ein drittes Ion eingeführt wird, das Unterbrechen des Prozesses vor dem Gleichgewicht zu einem grösseren Selektivitätsverhältnis führt als bei Gleichgewichtseinstellung.

In diesem Falle aber weist die Methode den Nachteil auf, dass die zu trennenden Ionen durch ein drittes Ion verunreinigt werden und aus diesem Grunde muss dieses Ion so ausgewählt werden, dass es aus dem System in der letzten Phase des Reinigungsprozesses leicht entfernt werden kann.

Zur Trennung von in der Praxis häufig angetroffenen Ionen schlagen wir als ternäres Ion Na^+ vor, welches in der letzten Reinigungsphase leicht durch Elektrolyse oder durch Ionenaustausch bei Gleichgewicht entfernt werden kann. Die Wahl des Ions Na^+ ist auch dadurch gerechtfertigt da *NaCl* eine billige und leicht erhaltbare Substanz ist, welche nicht spezielle Korrosionsschutzvorrichtungen der Austauschkolonnen erfordert.

Um den Ausdruck für das Trennkriterium unter diesen Bedingungen abzuleiten, betrachten wir ein Lösungsvolumen *Vml* von der totalen Konzentration C_0 welches in äquivalenten Fraktionen x_0 Ione X_1, w_0 Ione X_2 und den Rest Natrium enthält. Die Lösung befindet sich in Berührung mit einem Volumen Vml Na-Ionith mit einer Trennkapaziät q_0 m val/ml in Form von kreisförmigen Körnern mit einem Halbmesser von r cm.

Die Arbeitstemperatur ist T_0 und die Diffusionskoeffizienten:

$$D_{x_1^{2+}-N_a^+} = D_1 \text{ cm}^2/\text{s} \qquad D_{x_2^{2+}-N_a^+} = D_2 \text{ cm}^2/\text{s}$$

Es wird unter Bedingungen gearbeitet in denen die Diffusionskoeffizienten während des ganzen Prozesses konstant bleiben. Um solche Bedingungen zu erreichen darf sich die Zusammensetzung des Ionenaustauschers zwischen dem Anfangs-und Gleichgewichtszustand nicht merklich ändern, d.h.:

$$\begin{aligned} x_0 &\ll 1 \\ w_0 &\ll 1 \\ VC_0 &\ll p\, q_0 \end{aligned} \tag{1}$$

Die Fraktionskonzentrationen bei Gleichgewicht bezeichnen wir, wie folgt:

x_e — für X_1 in flüssiger Phase
w_e — für X_2 in flüssiger Phase
y_e — für X_1 in fester Phase
z_e — für X_2 in fester Phase

Das Massenwirkungsgesetz führt zum Ausdruck:

$$\frac{1}{K} = \frac{z_e}{w_e} \cdot \frac{(1 - x_e - w_e)^2}{(1 - y_e - z_e)^2} \cdot \frac{C_0}{q_0} = \frac{y_e (1 - x_e - w_e)^2}{x_e (1 - y_e - 2_e)^2} \cdot \frac{C_0}{q_0}$$

wo K die Gleichgewichtskonstante des Austausches X_1^{2+} — Na^+ ist, die wie schon angeführt der Gleichgewichtskonstanten des Austausches X_2^{2+} — — Na^+ gleich ist.

Unter Berücksichtigung der Gleichung (1) können die Klammern $(1 - x_e - w_e)$ $(1 - y_e - z_e)$, gleich 1 angenähert werden. Aus dem Ausdruk Gleichgewichtskonstanten lässt sich ableiten:

$$y_e \cong \frac{1}{K} \cdot \frac{q_0}{C_0} \cdot x_e \tag{2}$$

$$z_e \cong \frac{1}{K} \cdot \frac{q_0}{C_o} \cdot w_e \tag{2'}$$

Das Massenerhaltungsgesetz für X_1^{2+} und bezw. X_2^{2+} bei Gleichgewicht führt zu:

$$C_0 V x_e + q_0 v y_e = C_0 v x_0 \tag{3}$$

$$C_0 V w_e + q_0 v z_e = C_0 V w_0 \tag{3'}$$

Aus den Ausdrücken (2, 2', 3, 3') ergibt sich:

$$x_e = \frac{x_0}{1 + \frac{1}{k} \cdot \frac{u}{V} \cdot \frac{q_0^2}{C_0^2}} \tag{4}$$

$$y_e = \frac{\frac{1}{k} \cdot \frac{q_0}{C_0} \cdot x_o}{1 + \frac{1}{k} \cdot \frac{v}{V} \cdot \frac{q_0^2}{C_0^2}} \tag{5}$$

$$w_e = \frac{w_0}{1 + \frac{1}{k} \cdot \frac{v}{V} \cdot \frac{q_0^2}{C_0^2}} \tag{6}$$

$$z_e = \frac{\frac{1}{k} \cdot \frac{q_0}{C_0} \cdot w_0}{1 + \frac{1}{k} \cdot \frac{v}{V} \cdot \frac{q_0^2}{C_0^2}} \tag{7}$$

Für $\frac{1}{k} \cdot \frac{v}{V} \cdot \frac{q_0^2}{C_0^2} \ll 1$, wird der Nenner der Ausdrücke (4) und (6) gleich 1, und folglich $x_e \cong x_0$ und $w_e \cong w_0$.

Unter diesen Bedingungen können die Kontaktkonzentrationen für die Zeit t, das heisst z und w konstant angesehen werden, da $x_e < x < x_0$ und $w_e < w < w_0$ und es kann die Gleichung (4) zur Berechnung des Gleichgewichtseinstellungsgrades F verwendet werden:

$$F_{x_1} = \left[1 - \exp\left(-\frac{\pi^2 D_1 t}{r^2}\right)\right]^{1/2} \qquad 1/2$$

$$F_{x_2} = \left[1 - \exp\left(-\frac{\pi^2 D_2 t}{r^2}\right)\right]^{1/2} \qquad 1/2$$

Wie festgelegt ist $F_{x_1} = y/y_e$, $F_{x_2} = z/z_e$

Für die Konzentrationen in den Körnern zum Zeitpunkt t, die für X_1 durch den äquivalenten Bruch mit y und für X_2 entsprechend mit z bezeichnet werden, ergibt sich:

$$y = x_0 \cdot \frac{q_0}{C_0} \cdot \frac{1}{k} \cdot \frac{\left[1 - \exp\left(-\frac{\pi^3 D_1 t}{r^2}\right)\right]^{1/2}}{1 + \frac{1}{k} \cdot \frac{v}{V} \cdot \frac{q_0^2}{C_0^2}}$$

$$z = w_0 \cdot \frac{q_0}{C_0} \cdot \frac{1}{k} \cdot \frac{\left[1 - \exp\left(-\frac{\pi^2 D_2 t}{r^2}\right)\right]^{1/2}}{1 + \frac{1}{k} \cdot \frac{v}{V} \cdot \frac{q_0^2}{C_0^2}} \qquad (8)$$

oder durch einsetzen:

$$\pi^2 t / r^2 = \tau \qquad \frac{1}{k} \cdot \frac{v}{V} \cdot \frac{q_0^2}{c_0^2} = \alpha$$

erhält man:

$$y = x_0 \frac{q_0}{C_0 k} \cdot \frac{1}{1+\alpha} \sqrt{1 - e^{-D_1 \tau}}$$

$$z = w_0 \cdot \frac{q_0}{C_0 k} \cdot \frac{1}{1-\alpha} \sqrt{1 - e^{-D_2 \tau}} \qquad (8')$$

Die äquivalenten Brüche in der Lösung zum Zeitpunkt t und zwar x für X_1 und w für X_2 können aus y und z unter Verwendung des Massenerhaltungsgesetzes abgeleitet werden:

$$C_0 V x + q_0 v y = C_0 V x_0$$
$$C_0 V w + q_0 v z = C_0 V w_0 \qquad (9)$$

Durch Einsetzen von (8) ergibt sich

$$x = x_0 \left[1 - \frac{\alpha}{1+\alpha}\sqrt{1 - e^{-D_1\tau}}\right]$$
$$w = w_0 \left[1 - \frac{\alpha}{1+\alpha}\sqrt{1 - e^{-D_2\tau}}\right] \qquad (10)$$

Der Selektivitätsfaktor S_D ist durch das Verhältnis der Molenbrüche der Ionen in den beiden Phasen festgelegt:

$$S_D = \frac{q X_1}{q X_2} \Big/ \frac{C X_1}{C X_2} = \frac{y w}{z x} \qquad (11)$$

Durch Einsetzen der Werte für y, z, x, w aus den Ausdrücken (8) und (10) ergibt sich:

$$S_D = \frac{\sqrt{1 - e^{-D_1\tau}}}{\sqrt{1 - e^{-D_2\tau}}} \cdot \frac{1 - \frac{1}{1+\alpha}\sqrt{1 - e^{-D_2\tau}}}{1 - \frac{1}{1+\alpha}\sqrt{1 - e^{-D_1\tau}}} \qquad (12)$$

Aus Gleichung (12) geht hervor:

für		
$D_1 > D_2$	$S_D > 1$	X_1 wird vom Ionenaustauscher zurückgehalten
$D_1 = D_2$	$S_D = 1$	
$D_1 < D_2$	$S_D < 1$	X_2 wird vom Ionenaustauscher zurückgehalten

Ist $D_1 > D_2$ und $S_D > 1$ so bemerkt man:

S_D fällt mit der Zeit t und somit mit der Grösse τ, S_D wächst mit dem Verhältnis D_1/D_2, S_D nimmt den grössten Wert an für $\tau \to 0$.

Laboratorium für physikalische Chemie
Politechnisches Institut Bukarest

LITERATUR

W. A. Griesbach. — Angew. Chemie, 1955, 66, 17.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC BUCUREȘTI
Tomul XXVI — 1964, Fascicola 3

CHIMIE

C.Z. 669.587

METODE RAPIDE DE ANALIZĂ A SĂRURILOR DIN BĂILE GALVANICE

C. BEJAN, I. NICULESCU, F. POPESCU, A. M. IANCU

În lucrarea de față s-au stabilit metode de analiză rapidă ale sărurilor din băile galvanice de cuprare, zincare, cadmiere, nichelare și alămire. Lucrarea s-a efectuat pentru a veni în sprijinul întreprinderilor care produc amestecuri de săruri galvanice și fac galvanizări.

Cercetările au fost orientate în scopul găsirii metodelor celor mai rapide totdeodată și cele mai exacte de dozare a ionilor componenți ai băii.

Din nenumăratele metode indicate în literatură pentru dozarea ionilor ce se găseau în băile galvanice ne-am oprit asupra metodelor de dozare volumetrică și în special asupra acelora care permiteau dozarea unui ion în prezența altora fără o prealabilă separare a lui din amestec. Cum majoritatea reactivilor clasici nu permiteau acest lucru am orientat cercetările spre dozări complexonometrice, dozări foarte precise și care se pretau excelent dozării ionilor din amestecurile destul de complexe ale băilor galvanice.

Analiza sărurilor băii de alămire

Conținut:

$CuCO_3$	0,080
$ZnCO_3$	0,220
Na_2SO_4	0,200
Na_2CO_3	0,190
NaCN	0,130
Na_2SO_3	0,200

Acest amestec de săruri s-a solubilizat într-o soluție apoasă de cianură de sodiu (conținutul în cianură fiind cunoscut) preparîndu-se o soluție 0,01 molară, în raport cu ionul de cupru, la balon cotat.

Ionii dozați :

Ionii dozați : Cu^{2+}, Zu^{2+}, CN^-

Dozarea Cu^{2+} și Zn^{2+}.

Reactivi, soluții și indicatori folosiți :

— Soluție 0,01M complexon III.
— Soluție tampon bazică ($pH = 10$) conținînd la 1 litru 54 g clorură de amoniu și 350 ml amoniac concentrat.
— Soluție sulfat de magneziu 0,01M.
— Indicator amestec solid de negru eriocrom *T* și clorură de sodiu în raportul 1/100 (indicatorul se recomandă să fie proaspăt preparat altfel se observă greu virajul).
— Soluție formaldehidă 10%.
— Soluție cianură de potasiu 5%.

Modul de lucru. Pe o probă din soluția de analizat se dozează suma celor doi cationi printr-o titrare indirectă (I). La 10 ml soluție de analizat se adaugă 2 ml acid sulfuric concentrat, se evaporă sub nișă pînă la apariția de vapori albi, se răcește, se diluiază cu apă la 100 ml și se adaugă 40 ml soluție complexon 0,01 M și 2 ml soluție tampon bazică pentru 100 ml soluție. Se adaugă circa 1 mg indicator negru eriocrom *T*, cînd soluția se colorează în albastru și se retitrează excesul de complexon cu sulfat de magneziu pînă la virajul de la albastru la roșu.

Notăm cu :

A = nr. ml soluție complexon adăugat în exces.
B = nr. ml soluție sulfat de magneziu folosiți în dozarea excesului de complexon.

Pe o altă probă se dozează numai zincul (I).

Se iau 10 ml soluție, se adaugă 2 ml soluție tampon, 5 ml soluție cianură de potasiu (cantitatea de soluție de cianură se adaugă pînă la decolorarea soluției, iar un eventual exces de cianură nu are nici o influență negativă asupra dozării). Se adaugă 1 mg indicator negru eriocrom *T* cînd soluția se colorează în albastru. Se adaugă apoi soluție formaldehidă 10% pînă ce culoarea se schimbă în roșu. Ionii de Zn^{2+} puși în libertate se titrează cu soluție complexon 0,01 M pînă la virarea culorii în albastru închis.

Notăm în continuare :

t = factorul soluției de sulfat de magneziu.

C = nr. ml soluție complexon 0,01 M folosiți în dozarea ionilor de zinc.

Calcule :

1 ml soluție complexon corespunde la 0,000654 g Zn.

g Zn în proba analizată = $C \times 0{,}000654$

1 ml soluție complexon corespunde la 0,000634 g Cu
g Cu în proba analizată = (A — B.f — C) 0,000634.

Dozarea Cu^{2+} și Zn^{2+} în prezența $Fe^{2+,3+}$.

Se utilizează aceleași soluții ca în metoda precedentă însă modul de lucru este puțin diferit.

Se iau 10 ml soluție, se adaugă 50 ml soluție complexon, 2 ml soluție tampon, 10 ml cianură de potasiu și 1 mg indicator negru eriocrom *T*. Soluția se colorează în albastru. Se titrează excesul de complexon cu o soluție de sulfat de magneziu pînă la virarea culorii în roșu.

Notăm cu:

B = nr. mol soluție sulfat de magneziu folosiți în titrare. În modul acesta s-a dozat suma ionilor zinc și cupru.

Într-o probă separată se dozează ionul zinc.

Se iau 10 ml soluție, 2 ml soluție tampon, 5 ml soluție cianură de potasiu, 1 mg indicator negru eriocrom *T*. Se adaugă soluție formaldehidă pînă la colorarea soluției în roșu, apoi se titrează cu complexon pînă la virarea în albastru net.

Notăm în continuare:

C = ml soluție complexon folosiți în titrare.

Calcule:

g Zn în proba analizată = C × 0,000654
g Cu în proba analizată = (50 — B.f —C) 0,000634.

Dozarea ionului CN^-

Soluții și indicatori folosiți:

— Soluție azotat de argint 0,1 N sau 0,01 N
— Soluție hidroxid de sodiu 10%.

Modul de lucru: Se iau 30 ml soluție, se alcalinizează cu soluție hidroxid de sodiu 10% (circa 5 ml) și se titrează cu soluție azotat de argint pînă la o slabă tulbureală.

Reacții:

1. $$2KCN + AgNO_3 = K[Ag(CN)_2] + KNO_3$$

Sfîrșitul titrării se observă prin formarea precipitatului de cianură de argint.

2. $$K[Ag(CN)_2] + AgNO_3 = 2AgCN + KNO_3$$

Calculul cantității de ioni CN^- se face după ecuația (1):

1 mg $AgNO_3$ 0,1 N corespunde la 2 × 0,0026 g CN^-

g CN^- în proba analizată = nr. ml sol. $AgNO_3$ × 0,0052.

Analiza sărurilor băii de zinc acidă

Conținut :

$Al_2(SO_4)_3 \cdot 18\,H_2O$	0,084
NaCl	0,089
H_3BO_3	0,073
$ZnSO_4$	0,755

Solubilizarea s-a făcut preparîndu-se o soluție 0,01 M în raport cu ionul zinc.

Ionii dozați : Zn^{2+}, H_3BO_3

Dozarea Zn^{2+}

Soluții și indicatori folosiți :
— Soluție complexon III 0,01 M
— Soluție tampon bazică ($NH_4Cl + NH_4OH$)
— Amestec de 1/100 indicator negru eriocrom *T* cu clorură de sodiu.

Modul de lucru : Se iau 10 ml soluție, 2 ml soluție tampon, se diluiază cu apă pînă la 100 ml. Se adaugă indicator, se titrează cu soluție complexon III. Culoarea roșie virează în albastru (I).

Calcule :

$$g\ Zn = \text{nr. ml complexon} \times 0{,}000654$$

Dozarea H_3BO_3.

Reactivi și indicatori folosiți :
— Hidroxid de sodiu 0,1 N.
— Soluție saturată de carbonat de sodiu.
— Acid sulfuric 25%.
— Glicerină, căreia i s-a neutralizat în prealabil aciditatea cu hidroxid de sodiu în prezență de fenolftaleină pînă la slab roz.
— Indicatori : fenolftaleină, metilorange, sau roșu de metil.

Modul de lucru : Se iau 10 ml soluție și se precipită zincul la cald cu o soluție saturată de carbonat de sodiu adăugată în exces. Se răcește. Se aduce precipitatul și soluția într-un balon cotat de 250 ml, se lasă precipitatul să se depună și se filtrează circa 150 ml printr-un filtru uscat, prinzîndu-se filtratul într-un vas uscat. Din filtrat se iau cu o pipetă 50 ml, se adaugă cîteva picături de roșu de metil, se acidulează slab cu acid sulfuric 25% (pînă la virarea în roz a indicatorului) se fierbe trei minute și se răcește. Se titrează cu o soluție de hidroxid de sodiu 0,1 N pînă ce indicatorul virează de la roșu la galben. Numărul de ml de hidroxid de sodiu folosiți în această titrare nu interesează deoarece au fost legați de acidul sulfuric adăugat de noi necesar punerii în libertate a acidului boric.

În continuare se adaugă cîteva picături de fenolftaleină, se titrează cu hidroxid de sodiu (titrare citită) pînă la culoarea roz. Se adaugă apoi 20 ml glicerină care decolorează soluția. Se continuă titrarea pînă ce apare din nou culoarea. Se adaugă mai multă glicerină și se repetă procesul pînă ce adăugarea ei nu mai produce decolorarea soluției. Se citește la biuretă numărul de mililitri hidroxid de sodiu folosiți din momentul adăugării fenolftaleiniei (2.3).

Calcul :

1 ml hidroxid de sodiu 0,1 N dozează 0,0061 g H_3BO_3
g H_3BO_3 = nr. ml NaOH × f × 0,0061
f = factorul soluției de hidroxid de sodiu 0,1 N.

Analiza sărurilor băii de zinc cianurică

Conținut :

$ZnCO_3$	0,480
Na_2CO_3	0,165
NaCl	0,166
NaCN	0,208

Amestecul de săruri pentru baia de zinc cianurică s-a solubilizat într-o soluție de cianură de sodiu (conținutul în cianură fiind cunoscut) și s-a preparat o soluție 0,01 M în raport cu zincul.

Ioni dozați : Zn^{2+}, CN^-, Cl^-

Dozarea Zn^{2+} complexonometric.

Soluții și indicatori folosiți :

— Soluție complexon III 0,01 M
— Soluție tampon bazică.
— Soluție formaldehidă 10%.
— Indicator solid : amestec de negru eriocrom *T* cu clorură de sodiu 1%.

Modul de lucru : Se iau 10 ml soluție, se adaugă 2 ml soluție tampon, 1 mg indicator și 5 ml formaldehidă pînă la apariția culorii roșii. Se titrează cu complexon III pînă la virarea culorii din roșu în albastru închis. (1)

Calcul :

g Zn = nr. ml complexon × 0,000654.

Dozarea zincului cu ferocianură de potasiu.

Soluții și indicatori folosiți :

— Soluție acid sulfuric 25%.
— Sulfat de amoniu solid.

— Indicatori: difenilamină în soluție alcoolică 1%.
— Soluție ferocianură de potasiu 0,1 N al cărui factor se stabilește prin titrare directă la rece cu soluție de permanganat de potasiu 0,1 N.

Modul de lucru: Se iau 50 ml soluție într-un balon conic se adaugă 25 ml acid sulfuric 25% și aproximativ 10 g sulfat de amoniu. Se adaugă cîteva picături de difenilamină, se titrează cu ferocianură de potasiu pînă ce culoarea albastră închis a soluției trece în albastru deschis. (2, 3).

Reacția:

$$2K_4[Fe(CN)_6] + 3ZnSO_4 = Zn_3K_2[Fe(CN)_6]_2 + 3K_2SO_4$$

Calcule:

1 ml soluție de ferocianură de potasiu .. 1,5 × 0,00654 g Zn
g Zn = nr. ml sol $K_4Fe(CN)_6 \times F \times 0{,}00981$
F = factorul soluției de ferocianură de potasiu 0,1 N.

Observații:

Metoda de dozare a zincului cu ferocianură se poate utiliza atît pentru baia de zinc acidă cît și pentru cea cianurică.

Metoda cu ferocianură nu se poate aplica în cazul cînd baia conține și fier, deoarece reacționează cu ferocianura și nu se mai observă virajul.

În cazul prezenței fierului se utilizează doar metoda complexonometrică adaptată acestui caz. Se lucrează în modul următor:

Se iau 10 ml soluție, se adaugă 2 ml soluție tampon 5 ml soluție formaldehidă și indicator. Se adaugă formaldehidă pînă ce soluția se colorează în roșu, apoi se titrează cu complexon pînă la virarea culorii în albastru. Calculele sînt identice ca cele în absența fierului.

Dozarea Cl^- și CN^- cînd sînt în prezență.

Modul de lucru: Se iau 50 ml soluție, se titrează cu azotat de argint pînă ce apare o slabă tulbureală care indică sfîrșitul reacției de dozare a ionului cian și se citesc numărul de ml utilizați. (1). Se continuă titrarea cu azotat de argint în prezență de cromat de argint care indică sfîrșitul reacției de dozare a ionului clor. Se citesc numărul de ml azotat de argint utilizați pentru titrarea clorului. (B).

Calcul:

g CN = 2 × 0,0026 × A ml$AgNO_3$
A = nr. ml azotat de argint folosiți pentru dozarea ionului acid.

g Cl^- = B × 0,00354

B = nr. ml soluție azotat de argint folosiți pentru dozarea ionului clor.

Analiza sărurilor băii de cuprare

Conținut :

Na_2CO_3	0,250
Na_2SO_3	0,250
Na_2SO_4	0,250
NaCN	0,095
CuCN	0,160

Solubilizarea amestecului de săruri s-a făcut într-o soluție de cianură de sodiu (conținutul în cianură fiind cunoscut) și s-a făcut o soluție 0,01 M în raport cu cupru.

Ioni dozați :

$$Cu^{2+},\ CN^-,\ SO_3^{2-},\ CO_3^{2-}$$

Dozarea Cu^{2+}.

a. Dozarea complexonometrică.
b. Dozarea iodometrică.

Soluții și indicatori folosiți :
— Soluție complexon III 0,01 M.
— Soluție tampon bazică.
— Soluție sulfat de magneziu 0,01 M.
— Indicator solid eriocrom T + clorură de sodiu (1 : 100)
— Indicator solid murexid + clorură de sodiu (1 : 100)
— Acid sulfuric concentrat.

Modul de lucru. 1a. Se măsoară exact 10 ml soluție ce se aduce într-un pahar conic. Se adaugă 2 ml acid sulfuric concentrat, se evaporă sub nișă pînă la apariția de vapori albi, se răcește, se diluiază cu apă la 100 ml, se adaugă 40 ml soluție complexon și 2 ml soluție tampon. Se adaugă 1 mg indicator negru eriocrom *T* cînd soluția se colorează în albastru și se retitrează excesul de complexon cu soluție de sulfat de magneziu pînă la virajul culorii de la albastru la roșu.

Se notează :

A = nr. ml soluție complexon adăugat în exces.
B = nr. ml soluție sulfat de magneziu 0,01 M folosiți în dozarea excesului de complexon.
f = factorul soluției de sulfat de magneziu.

Calcule :

$$g\ Cu = (A - B \times f)\ 0{,}000634$$

2 a. Se iau 10 ml soluție, se adaugă 2 ml acid sulfuric concentrat se evaporă sub nișă pînă la apariția de vapori albi, se răcește și se diluiază

cu apă pînă la 100 ml. Se adaugă 2 ml soluție tampon, 1 mg indicator murexid și se titrează cu complexon III pînă la virarea culorii din galben în violet (I).

Calcule:

$$g\ Cu = nr.\ ml\ complexon \times 0{,}000634.$$

Dozarea CN^-.

Soluții și indicatori folosiți:

— Soluție hidroxid de sodiu 10%.
— Soluție azotat de argint 0,1 N.

Modul de lucru: Se iau 30 ml soluție, se alcalinizează cu solutie hidroxid de sodiu, se dozează cu soluție azotat de argint pînă la slabă tulbureală, dată de cianura de argint (2, 3, 4).

Dozarea SO_3^{2-}

Soluții și indicatori folosiți:

— Soluție clorură de bariu 30%.
— Soluție de iod 0,01 N de factor cunoscut.
— Soluție amidon ca indicator.

Modul de lucru: Se iau 50 ml soluție într-un pahar de 400 ml se diluiază cu apă distilată la 100 ml și se încălzește pînă aproape de fierbere. Se precipită cu exces de soluție de clorură de bariu 30% ionii carbonat, sulfit și sulfat. Se lasă precipitatul să se răcească și se filtrează pe o hîrtie filtru bandă albastră, spălîndu-se bine precipitatul și paharul cu apă fierbinte. După ce precipitatul s-a scurs bine de apă se ia hîrtia cu precipitatul și se desface deasupra paharului în care s-a făcut precipitarea și cu un jet puternic de apă se aduce precipitatul cantitativ în pahar. Se adaugă 1 ml amidon, se titrează suspensia de precipitat sub agitare puternică cu soluție de iod 0,01 N pînă la culoarea de albastru pal care persistă. (3).

Calcul:

$g\ SO_3^{2-} = A \times f \times 0{,}0004$
A = nr. ml sol. iod folosiți în titrare și
f = factorul soluției de iod.

Observații:

Reacția depinde de proprietățile oxidate ale iodului în prezență de apă.

$$I_2 + H_2O = 2HI + O$$

Oxigenul liberat oxidează SO_3^{--} la SO_4^{--} cantitativ.

$$Na_2SO_3 + O = Na_2SO_4$$

Cele două ecuații pot fi combinate:

$$Na_2SO_3 + H_2O + I_2 = Na_2SO_4 + 2\ HI.$$

Dozarea directă a ionului sulfit nu se poate face deoarece sărurile din baie conțin și alți ioni reducători ca ionul cian care ar consuma iod. Din acest motiv se precipită ionul sulfit ca sulfit de bariu, iar precipitatul se spală bine pentru a îndepărta urmele de cian.

Dozarea CO_3^{2-}.

Soluții și reactivi folosiți:

— Soluție acid clorhidric 0,1 N de factor cunoscut.
— Indicator metilorange.
— Soluție clorură de bariu 30%.

Modul de lucru: Se iau 50 ml soluție într-un pahar de 400 ml se diluiază la 100 ml, se încălzește pînă aproape de fierbere, se precipită cu exces de soluție de clorură de bariu. Se lasă precipitatul să se răcească și se filtrează pe hîrtie de filtru bandă albastră. Se spală bine precipitatul și paharul cu apă fierbinte. Se aduce hîrtia cu precipitatul în paharul inițial adăugîndu-se 200 ml apă distilată și cu ajutorul baghetei se fărămițează hîrtia de filtru cu precipitat pînă ce dă o suspensie. Se adaugă apoi 6 picături de metilorange și se titrează cu soluție acid clorhidric sub o agitare energetică pînă la virarea culorii galbene a indicatorului în slab roz. (2).

Prin această titrare s-a determinat suma ionilor carbonat și sulfit deoarece ambele precipitate de carbonat de bariu și sulfit de bariu sînt descompuse de acid clorhidric.

Calcul:

$$g\ CO_3^{2-} = (B \times f_{HCl} - A \times f_I)\ 0.003.$$

unde:

A = nr. ml soluție iod.

B = nr. ml soluție HCl

Analiza sărurilor băii de cadmiere

Conținut:

NaCN	0,301
$Cd(CN)_2$	0,301
Na_2SO_4	0,402

Se solubilizează în apă adăugîndu-se eventual, dacă solubilizarea se face greu un exces cunoscut de cianură de potasiu.

Ionii dozați: Cd^{2+}, CN^-

Dozarea Cd^{2+}.

Soluții și indicatori folosiți:
— Soluție complexon III 0,01 M.
— Soluție cianură de potasiu 5%.
— Soluție formaldehidă 10%.
— Soluție tampon bazică.
— Indicator solid negru eriocrom *T* + clorură de sodiu (1 : 100).

Modul de lucru: Dozarea ionului cadmiu se face identic cu dozarea ionului zinc prin metoda complexonometrică.

Calcul:

1 ml sol. complexon 0,01 M corespunde la 0,001124 g Cd^{2+}

Observații:

Dozarea cu ferocianură de potasiu indicată în literatură (2, 3, 6) nu dă rezultate exacte la calcul deoarece nu se obțin compuși unitari ci amestecuri variabile ce conțin produși de forma: $K_2Cd[Fe(CN)_6]$; $Cd_2[Fe(CN)_6]$; $Cd_3K_6[Fe(CN)_6]_4$ (5, 7).

Analiza sărurilor băii de nichelare

Conținut:

Na_2SO_4	0,150
NH_4Cl	0,060
H_3BO_3	0,090
$NiSO_4$	0,710

Ioni dozați: Ni^{2+}.

Dozarea nichelului.

Soluții și indicatori folosiți:
— Soluție complexon 0,01 M.
— Soluție amoniac concentrată.
— Indicator murexid (1 parte murexid + 10 părți clorură de sodiu).

Modul de lucru: Se iau 5 ml soluție baie, se adaugă 25 ml amoniac concentrat, se diluiază cu 50 ml apă distilată, se lasă să stea 15 minute. Se adaugă indicator murexid pînă ce soluția se colorează în galben, apoi se titrează cu complexon pînă la coloratie roz-violacee.

Calcul:

1 ml complexon, 0,01 M ..... corespunde la 0,0005869 g Ni

Catedra de chimie anorganică și analitică
Institutul politehnic București

BIBLIOGRAFIE

1. *R. Pribil*, Complexonii în chimia analitică, trad. limba cehă. Ed. Teh. Buc., 1961 pag. 254, 255, 271, 292, 346, 347, 411.
2. *V. I. Lainer*, Bazele galvanostegiei, trad. limba rusă. Ed. Teh., 1956, pag. 363, 373, 462, 556, 634.
3. *K. Langford*, Analyse de bains de galvanoplastie, Ed. Teh., 1960, Paris.
4. *I. Salase*, Traité de galvanoplastie. Dunod III-éme. Ed. 1956.
5. *Jour. Indian Chem. Soc.* Vol. 33. Nr. 3, 1956.
6. *Arthur I. Vogel*, Quantitative inorganic analysis, pag. 163, 371, 374.
7. *Tananaev, Kozlov*, Zhur. Anal. Kim. 1955 Nr. 6 pag. 149.
8. *Fresenius*, Handbuch der analytischen Chemie. Vol. III, Ed., 1953, Berlin.
9. *J. analit. him.* U.R.S.S. XI, 1956, pag. 710—713 Nr. 6.
10. *Zavod. lab.* U.R.S.S. XXII, 1956, Nr. 2, pag. 165, 166.
11. *J. Rocz. Chem.* R. P. Polonă, 31 (1957), Nr. 2, pag. 669—675.
12. *Chem. pharm.* 5 (30), 1955, Nr. 2, pag. 34—35.
13. *Zavod. Lab.* U.R.S.S., 1956, nr. 5, pag. 165, 166.
14. *Roczniki Chimii*, R. P. Polonă, 30, (1956), nr. 2, pag. 613—618.
15. *Zavod. lab.* U.R.S.S. XXII, 1956, Nr. 6, pag. 1266—1291.
16. *Galvanotehnica*, Nr. 5, mai 1958, pag. 131.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC BUCUREȘTI
Tomul XXVI — 1964, Fascicola 3

REZISTENȚA MATERIALELOR

C.Z. 539.4

ASUPRA UNOR ASPECTE ALE REZISTENȚEI ȚEVILOR *)

I. ZAMFIRESCU

1. Asupra eforturilor unitare pe direcția tangentei

1.1 — Expresia efortului unitar pe direcția tangentei într-o țeavă cu pereți groși solicitată la presiune interioară p_i și exterioară p_e uniform distribuție, este cunoscută:

$$\sigma_t = \frac{p_i r_i^2 - p_e r_e^2}{r_e^2 - r_i^2} + \frac{r_i^2 r_e^2 (p_i - p_e)}{r^2 (r_e^2 - r_i^2)}$$

unde r_i și r_e sînt razele interioare, respectiv exterioare ale țevii; această expresie se mai poate pune sub forma:

$$\sigma_t = \frac{1}{a-1}\left[p_i\left(\frac{a}{u}+1\right) - a p_e\left(1+\frac{1}{u}\right)\right]. \tag{1}$$

unde

$$a = \frac{r_e^2}{r_i^2} \text{ și } u = \frac{r^2}{r_i^2}.$$

Primele două derivate ale efortului σ_t în raport cu r sînt:

$$\frac{d\sigma_t}{dr} = -\frac{2ar_i^2}{a-1}(p_i - p_e)\frac{1}{r^3} \tag{2}$$

$$\frac{d^2\sigma_t}{dr^2} = \frac{6ar_i^2}{a-1}(p_i - p_e)\frac{1}{r^4}. \tag{3}$$

*) Vezi articolul *„Unele aspecte ale rezistenței țevilor"* publicat în Buletinul Institutului politehnic București. Nr. 6/1963.

1.2 — Efortul σ_t este pozitiv, negativ sau egal cu zero. Punem aceste condiții în relația (1), ceea ce conduce la relația:

$$\frac{p_i}{p_e} \geq \frac{a\left(1+\frac{1}{u}\right)}{\frac{a}{u}+1}. \tag{4}$$

Membrul al doilea al acestei relații, corespunzător feței interioare ($r=r_i$, $u=1$), devine:

$$\alpha = \frac{2a}{a+1} \tag{5}$$

iar pentru fața exterioară ($r=r_e$, $u=a$) devine

$$\beta = \frac{a+1}{2} \tag{6}$$

1.3. — *Condiția pentru ca* σ_t *să fie efort de compresiune pe toată grosimea peretelui țevii* ($\sigma_t < 0$).

Din relația (1) rezultă pentru $\sigma_t < 0$, condiția

$$\frac{p_i}{p_e} < \frac{a\left(1+\frac{1}{u}\right)}{\frac{a}{u}+1}. \tag{7}$$

Ținînd seamă că σ_t este o funcție continuă în raport de r, dacă avem $\sigma_t < 0$ pe fața interioară și pe fața exterioară, atunci avem $\sigma_t < 0$ pe toată grosimea peretelui țevii.

Punînd condiția pentru fața interioară ($\sigma_{tt} < 0$), rezultă din (5) și (7)

$$\frac{p_i}{p_e} < \alpha \tag{8}$$

iar pentru fața exterioară, ținînd seama de (6) și (7),

$$\frac{p_i}{p_e} < \beta. \tag{9}$$

Observăm că avem

$$1 < a < \frac{2a}{a+1} < \frac{a+1}{2} \text{ adică } 1 < a < \alpha < \beta \tag{10}$$

și deci, ca cele două condiții (8) și (9) să fie satisfăcute concomitent, *este necesar și suficient ca să fie satisfăcută condiția (8) pentru a avea* $\sigma_t < 0$ *pe toată grosimea peretelui țevii.*

Deoarece $\alpha > 1$, rezultă că putem avea $\frac{p_i}{p_e} < 1$ și deci din (2) rezultă că σ_t este crescătoare iar din (3) că curba reprezentativă are concavitatea către — σ_t ca în fig. 1.a sau că putem avea $p_i/p_e < 1$ și deci σ_t este descrescătoare iar curba are concavitatea către $+\sigma_t$, ca în fig. 1.c.

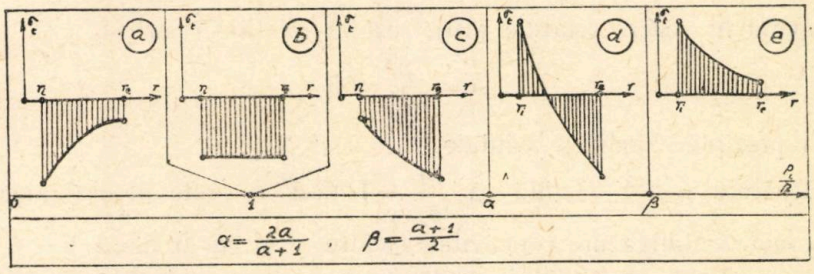


Fig. 1

1.4. — *Condiția ca* σ_t *să fie efort de întindere pe toată grosimea peretelui țevii* ($\sigma_t > 0$).

Din relația (1), rezultă, pentru a avea $\sigma_t > 0$, condiția

$$\frac{p_i}{p_e} > \frac{a\left(1+\frac{1}{u}\right)}{\frac{a}{u}+1}. \tag{11}$$

Raționînd ca în cazul precedent, se găsește pentru fața interioară condiția

$$\frac{p_i}{p_e} > \alpha \tag{12}$$

iar pentru fața exterioară condiția

$$\frac{p_i}{p_e} > \beta \tag{13}$$

Ținînd însă seamă de (10), rezultă că *relația (13) reprezintă condiția necesară și suficientă pentru ca* σ_t *să fie efort de întindere pe toată grosimea peretelui țevii.*

Deoarece $\beta > 1$ rezultă $\frac{p_i}{p_e} > 1$ și deci σ_t este descrescătoare iar curba reprezentativă are concavitatea către $+\sigma_t$ ca în fig. 1.e.

1.5. — *Condițiile ca* σ_t *să fie efort de întindere pe o porțiune din grosimea peretelui țevii* ($\sigma_t > 0$) *și compresiune pe cealaltă porțiune* ($\sigma_t < 0$).

a. — Să căutăm condițiile pentru ca σ_t *să fie întindere spre interior și compresiune spre exterior.* În acest caz trebuiesc satisfăcute concomitent relațiile (12) și respectiv (9) adică

$$\frac{p_i}{p_e} > \alpha \text{ și } \frac{p_i}{p_e} < \beta,$$

sau, avînd în vedere relațiile (10), rezultă relațiile restrînse

$$\alpha < \frac{p_i}{p_e} < \beta \tag{14}$$

care reprezintă condițiile căutate.

Deoarece $\alpha > 1$, rezultă că $\frac{p_i}{p_e} > 1$ deci σ_t este descrescătoare iar curba reprezentativă are concavitatea către $+\sigma_t$ ca în fig. 1.d.

b. — Să căutăm condițiile pentru ca σ_t să fie compresiune spre interior și întindere spre exterior. În acest caz trebuiesc satisfăcute concomitent relațiile (5) și respectiv (10) adică

$$\frac{p_i}{p_e} < \alpha \text{ și } \frac{p_i}{p_e} > \beta.$$

Ținînd seamă de relația (10), cele două relații precedente nu pot fi satisfăcute concomitent și *deci nu se poate obține compresiune pe fața interioară și întindere pe fața exterioară, oricare ar fi valorile presiunilor* p_i *și* p_e *ci numai invers.*

1.6. — *Condiția ca* σ_t *să fie constantă pe toată grosimea peretelui țevii* ($\sigma_t = \text{const.}$)

Pentru aceasta este necesar să avem $\frac{d\sigma_t}{dr} = 0$ ceea ce are loc pentru $p_i = p_e = p$. Deci $\frac{p_i}{p_e} = 1$, care reprezintă condiția căutată.

Introducînd această condiție în (1) rezultă

$$\sigma_t = -p_i = -p_e = -p \tag{15}$$

adică efortul σ_t, atunci cînd este constant, este o compresiune care are valoarea presiunii și sens contrar acesteia (fig. 1.b).

1.7. — *În peretele țevii se poate realiza o suprafață neutră din punct de vedere al efortului unitar pe direcția tangentei.*

Condiția unei suprafețe neutre în peretele țevii se obține din (1) făcînd $\sigma_t = 0$ *ceea ce dă, ținînd seamă de (4),*

$$\frac{p_i}{p_e} = \frac{a + \frac{a}{u}}{\frac{a}{u} + 1} \tag{16}$$

de unde

$$u = \frac{a(p_i - p_e)}{ap_e - p_i} \tag{17}$$

sau, înlocuind pe u cu $\frac{r^2}{r_i^2}$

$$r = r_e \sqrt{\frac{p_i - p_e}{ap_e - p_i}} \tag{18}$$

Această suprafață neutră este cilindrică dreaptă, avînd aceeași axă cu țeava. Ea este reală dacă în (18) sînt satisfăcute concomitent condițiile

$$p_i > p_e \text{ și } ap_e > p_i$$

care se pot restrînge la relațiile

$$p_e < p_i < ap_e. \tag{19}$$

De asemenea, suprafața este reală dacă sînt satisfăcute concomitent condițiile:

$$p_i < p_e \text{ și } ap_e < p_e$$

care se restrîng la

$$ap_e < p_i < p_e.$$

însă, deoarece $a > 1$, aceste relații nu sînt posibile deci condițiile *ca suprafața neutră dată de relația (18) să fie reală, sînt numai condițiile (19).*

Existența suprafeței neutre implică variația de la negativ la pozitiv sau invers a efortului unitar σ_t și de aceea condițiile (19) trebue să fie compatibile cu condițiile (1). Într-adevăr, relațiile (19) se mai pot scrie

$$1 < \frac{p_i}{p_e} < a$$

care sînt compatibile cu relațiile (14) deoarece $\alpha > 1$ și $\beta > a$ adică dacă relațiile (14) sînt satisfăcute, suprafața neutră este reală.

1.8. — *Observație* — Din relația (8) și ținînd seamă de (10), rezultă că efortul σ_t poate să fie întindere și pentru domeniul

$$1 < \frac{p_i}{p_e} < \alpha \tag{20}$$

în care deci $p_i > p_e$. *Rezultă că țeava cu pereți groși poate fi solicitată la compresiune pe direcția tangentei pe toată grosimea peretelui său, chiar pentru valori ale presiunii interioare mai mari decît ale presiunii exterioare, cu condiția ca să fie satisfăcută relația (20), ceea ce pare neverosimil.*

2. Asupra deformațiilor specifice pe direcția tangentei

2.1. — *Cazul țevii deschise la capete și solicitate numai la presiune interioară și exterioară, uniform distribuite.*

2.1.1. — *Formule de bază.*

Expresia deformațiilor specifice pe direcția tangentei, în cazul cînd țeava este supusă numai la presiune interioară și exterioară, uniform distribuite, este cunoscută sub forma

$$\varepsilon_t = \frac{2}{3E}\left[\frac{p_i r_i^2 - p_e r_e^2}{r_e^2 - r_i^2} + \frac{2r_i^2 r_e^2 (p_i - p_e)}{r^2 (r_e^2 - r_i^2)}\right]$$

care se mai scrie, folosind notațiile stabilite

$$\varepsilon_t = \frac{2}{3E(a-1)}\left[p_i\left(\frac{2a}{u}+1\right) - a p_e\left(1+\frac{2}{u}\right)\right]. \tag{21}$$

Primele două derivate în raport cu r sînt

$$\frac{d\varepsilon_t}{dr} = -\frac{8a r_i^2}{3E(a-1)}(p_i - p_e)\frac{1}{r^3} \tag{22}$$

$$\frac{d^2\varepsilon_t}{dr^2} = \frac{8a r_i^2}{E(a-1)}(p_i - p_e)\frac{1}{r^4}. \tag{23}$$

2.1.2. — *Notații auxiliare.*

Deformația ε_t este pozitivă, negativă sau egală cu zero, dacă este satisfăcută una din relațiile cuprinse în

$$\frac{p_i}{p_e} \gtrless \frac{a\left(1+\frac{2}{u}\right)}{\frac{2a}{u}+1}. \tag{23a}$$

Membrul al doilea, corespunzător feței interioare ($r = r_i$, $u = 1$), devine

$$\alpha_1 = \frac{3a}{2a+1} \tag{23b}$$

iar pentru fața exterioară ($r = r_e$, $u = a$), devine

$$\beta_1 = \frac{a+2}{3} \tag{23c}$$

2.1.3. — *Condiția ca* ε_t *să fie scurtare pe toată grosimea peretelui țevii* ($\varepsilon_t < 0$).

Punînd această condiție în (21), rezultă

$$\frac{p_i}{p_e} < \frac{a\left(1+\frac{2}{u}\right)}{\frac{2a}{u}+1}. \tag{24}$$

Raționînd ca la 1.3, se obține pentru fața interioară condiția dată de (23.b) și (24)

$$\frac{p_i}{p_e} < \alpha_1 \tag{25}$$

iar pentru fața exterioară, condiția dată de (23.c) și (24)

$$\frac{p_i}{p_e} < \beta_1. \tag{26}$$

Se observă că

$$1 < a < \frac{3a}{2a+1} < \frac{a+2}{3} \text{ sau } 1 < a < \alpha_1 < \beta_1 \tag{27}$$

și deci, pentru ca cele două condiții (25) și (26) să fie satisfăcute concomitent, este necesar și suficient ca să fie satisfăcută *relația (25) care reprezintă deci condiția pentru ca să avem* $\varepsilon_t < 0$ *pe toată grosimea peretelui țevii.*

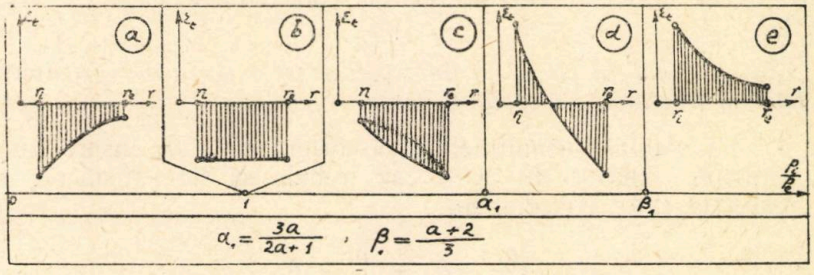


Fig. 2.1

De asemenea, din (25) și (27) se observă că $\frac{p_i}{p_e}$ poate fi mai mare sau mai mic decît 1.

Pentru $\frac{p_i}{p_e} < 1$, ε_t este crescătoare iar curba reprezentativă are concavitatea către $-\varepsilon_t$ ca în figura 2.1.a în timp ce pentru $\frac{p_i}{p_e} > 1$, ε_t este descrescătoare iar curba are concavitatea către $+\varepsilon_t$ ca în fig. 2.1.c.

2.1.4. — *Condiția ca* ε_t *să fie alungire pe toată grosimea peretelui țevii* ($\varepsilon_t > 0$).

Din (21) rezultă condiția

$$\frac{p_i}{p_e} > \frac{a\left(1+\frac{2}{u}\right)}{\frac{2a}{u}+1}. \tag{28}$$

La fel ca în cazul precedent, se obține pentru fața interioară condiția

$$\frac{p_i}{p_e} > \alpha_1 \tag{29}$$

iar pentru fața exterioară, condiția

$$\frac{p_i}{p_e} > \beta_1. \tag{30}$$

Avînd în vedere simultaneitatea condițiilor (29), (30) și relațiile (27), rezultă că este necesar și suficient să fie satisfăcută *relația (30) care reprezintă deci condiția pentru ca* ε_t *să fie alungire pe toată grosimea peretelui țevii.*

Din (27) și (30) rezultă că $\frac{p_i}{p_e} > 1$ și prin urmare ε_t este descrescătoare avînd curba reprezentativă cu concavitatea către $+\varepsilon_t$, ca în fig. 2.1.e.

2.1.5. — *Condiția ca* ε_t *să fie pozitivă pe o parte din grosimea peretelui țevii și negativă pe cealaltă parte.*

a — Să stabilim condițiile ca să avem $\varepsilon_t > 0$ înspre interior și $\varepsilon_t < 0$ înspre exterior. În acest caz trebuie să fie satisfăcute relațiile (29), respectiv (26), concomitent

$$\frac{p_i}{p_e} > \alpha_1 \text{ și } \frac{p_i}{p_e} < \beta_1$$

care se mai pot scrie restrîns sub forma

$$\alpha_1 < \frac{p_i}{p_e} < \beta_1. \tag{31}$$

Relațiile (31) reprezintă deci condițiile ca ε_t *să fie alungire pe porțiunea dinspre interiorul peretelui țevii și scurtare pe cealaltă porțiune.*

Din (27) și (31) rezultă că $\frac{p_i}{p_e} > 1$ deci ε_t este descrescătoare iar curba reprezentativă are concavitatea către $+\varepsilon_t$ ca în fig. 2.1.d.

b — Să stabilim în ce condiții se poate realiza $\varepsilon_t < 0$ înspre interior și $\varepsilon_t > 0$ înspre exterior. În acest caz trebuie să fie satisfăcute simultan relațiile (25), respectiv (30)

$$\frac{p_i}{p_e} < \alpha_1 \text{ și } \frac{p_i}{p_e} > \beta_1.$$

dar ținînd seamă de (27) rezultă că aceasta nu este posibil și deci *oricare ar fi valorile presiunilor* p_i, p_e, *nu se poate realiza în peretele țevii scurtare pe direcția tangentei înspre interior și alungire înspre exterior, ci numai invers.*

2.1.6. — *Condiția ca* ε_t *să fie constantă pe toată grosimea peretelui țevii* ($\varepsilon_t = \text{const.}$).

În acest caz $\frac{d\varepsilon_t}{dr} = 0$ de unde $p_i = p_e = p$ adică $\frac{p_i}{p_e} = 1$ care reprezintă condiția căutată.

Introducînd această condiție în (21), rezultă

$$\varepsilon_t = -\frac{2}{3E} p \tag{32}$$

adică, atunci *cînd deformația pe direcția tangentei este constantă, ea are valoarea (32) și este o scurtare (fig. 2.1.b.)*

2.1.7. — *În peretele țevii se poate realiza o suprafață neutră din punct de vedere al deformației specifice pe direcția tangentei* ($\varepsilon_t = 0$).

Într-adevăr, punînd condiția $\varepsilon_t = 0$ în (21), se obține

$$\frac{p_i}{p_e} = \frac{a\left(1 + \frac{2}{u}\right)}{\frac{2a}{u} + 1} \tag{33}$$

de unde

$$u = \frac{2a(p_i - p_e)}{ap_e - p_i} \tag{34}$$

sau

$$r = r_e \sqrt{\frac{2(p_i - p_e)}{ap_e - p_i}} \tag{35}$$

care reprezintă o suprafață cilindrică, dreaptă, avînd aceeași axă ca țeava.

Pentru ca această suprafață să fie reală, este necesar să fie satisfăcute simultan relațiile

$$p_i - p_e > 0 \text{ și } ap_e - p_i > 0$$

de unde

$$p_e < p_i < ap_e$$

adică

$$1 < \frac{p_i}{p_e} < a \tag{36}$$

sau să fie satisfăcute simultan relațiile

$$p_i - p_e < 0 \text{ și } ap_e - p_i < 0$$

de unde

$$ap_e < p_i < p_e$$

adică

$$a < \frac{p_i}{p_e} < 1. \tag{37}$$

Se observă însă că relațiile (36), sînt posibile, în timp ce relațiile (37) nu sînt posibile deoarece întotdeauna avem $a > 1$. Prin urmare *condițiile ca să se poată realiza în peretele țevii o suprafață neutră din punct de vedere al deformației specifice pe direcția tangentei, sînt date de relațiile (36).*

Relațiile (36) trebuie să fie compatibile cu relațiile (31). Observînd că avem $\frac{3a}{2a+1} < 1$ și $\frac{a+2}{3} > a$, rezultă că între (31) și (36) este într-adevăr compatibilitate și că relațiile (31) implică și faptul că suprafața neutră este reală.

2.1.8. — *Observație* — Din relația (25) și (27) rezultă că ε_t este scurtare și pentru domeniul

$$1 < \frac{p_i}{p_e} < \alpha_1 \tag{38}$$

în care deci $p_i > p_e$. *Rezultă că țeava poate suferi scurtare pe direcția tangentei, chiar dacă presiunea interioară este mai mare decît presiunea exterioară, cu condiția ca să fie satisfăcută relația (25) ceea ce pare, la prima vedere, neverosimil.*

2.2. — *Cazul țevii deschise la capete și solicitate atît la presiune interioară și exterioară cît și la un efort axial* F, *care nu produce flambaj.*

2.2.1. — *Formule de bază*

Relația care dă deformația în acest caz este

$$\varepsilon_t = \frac{2}{3E}\left[\frac{p_i r_i^2 - p_e r_e^2}{r_e^2 - r_i^2} + \frac{2r_i^2 r_e^2 (p_i - p_e)}{r^2 (r_e^2 - r_i^2)} - \frac{F}{2\pi (r_e^2 - r_i^2)}\right] \tag{39}$$

care se mai scrie, cu notațiile cunoscute,

$$\varepsilon_t = \frac{2}{3E(a-1)}\left[p_i\left(\frac{2a}{u} + 1\right) - p_e a\left(1 + \frac{2}{u}\right) - \frac{F}{2\pi r_i^2}\right] \tag{40}$$

unde F este un efort axial constant, uniform distribuit pe aria secțiunii țevii, exprimat în valoare algebrică.

Primele două derivate ale funcției ε_t din relațiile precedente sînt aceleași ca în cazul cînd țeava este supusă numai la presiune interioară și exterioară, deci ele sînt date de relațiile (22) și (23).

2.2.2. — *Notații auxiliare.*

Pentru stabilirea condițiilor de obținerea unei deformații pozitive, negative sau nule, se determină, ca mai înainte, raportul $\frac{p_i}{p_e}$ din expresia (40), corespunzător cazurilor respective, obținîndu-se

$$\frac{p_i}{p_e} \gtrless \frac{a\left(1+\frac{2}{u}\right)+\frac{F}{p_e 2\pi r_i^2}}{\frac{2a}{u}+1}. \tag{41}$$

Membrul al doilea al acestei relații, corespunzător feței interioare sau exterioare, devine pentru fața interioară ($r = r_i$, $u = 1$)

$$\alpha_2 = \frac{a}{2a+1}\left(3+\frac{F}{ap_e 2\pi r_i^2}\right) \tag{42}$$

iar pentru fața exterioară ($r = r_e$, $u = a$)

$$\beta_2 = \frac{a+2}{3}+\frac{F}{p_e 6\pi r_i^2}. \tag{43}$$

2.2.3. — *Condiția ca ε_t să fie scurtare pe toată grosimea peretelui țevii* ($\varepsilon_t < 0$).

Punînd în (40) condiția $\varepsilon_t < 0$, relația (41), corespunzătoare, este

$$\frac{p_i}{p_e} < \frac{a+\frac{2a}{u}+\frac{F}{p_e 2\pi r_i^2}}{\frac{2a}{u}+1}. \tag{41a}$$

a — Să considerăm cazul $0 < \frac{p_i}{p_e} < 1$. In acest caz ε_t este crescătoare avînd curba reprezentativă cu concavitatea către — ε_t ca în fig 2.2.a, astfel că dacă avem $\varepsilon_t < 0$ pe fața exterioară, avem implicit $\varepsilon_t < 0$ pe toată grosimea peretelui țevii.

Condiția ca să avem $\varepsilon_t < 0$ pe fața exterioară este, ținînd seamă de (41) și (43),

$$\frac{p_i}{p_e} < \beta_2 \tag{44}$$

care arată că β_2 poate fi oricît de mare, dar deoarece $\frac{p_i}{p_e} > 0$, atunci β_2 trebuie să fie limitat inferior : $\beta_2 > 0$ sau

$$\frac{a+2}{3} + \frac{F}{p_e 6\pi r_i^2} > 0$$

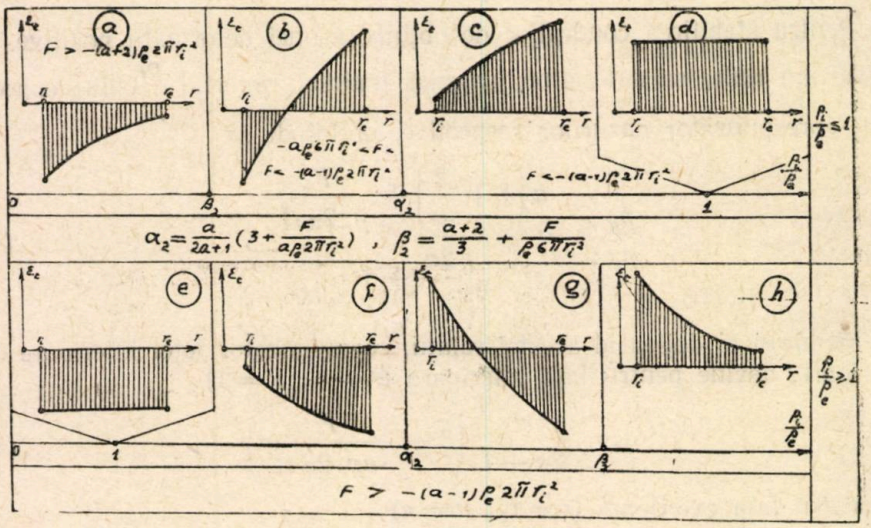


Fig. 2.2

de unde

$$F > -(a+2)\, p_e\, 2\pi r_i^2. \tag{45}$$

Relațiile (44) și (45) reprezintă condițiile pentru a avea $\varepsilon_t < 0$ *în cazul* $\frac{p_i}{p_e} < 1$.

b. — Să considerăm cazul $\frac{p_i}{p_e} > 1$. În acest caz ε_t este descrescătoare, avînd curba reprezentativă cu concavitatea către $+\varepsilon_t$ ca în fig. 2.2. f, astfel că dacă avem $\varepsilon_t < 0$ pe fața interioară, avem $\varepsilon_t < 0$ pe toată grosimea peretelui țevii.

Condiția ca să avem $\varepsilon_t < 0$ pe fața interioară este, ținînd seamă de (41 a) și (42)

$$1 < \frac{p_i}{p_e} < \alpha_2 \tag{46}$$

care arată că α_2 poate fi oricît de mare dar trebuie să satisfacă și condiția de limită inferioară : $\alpha_2 > 1$ sau

$$\frac{a}{2a+1}\left(3 + \frac{F}{a p_e 2\pi r_i^2}\right) > 1$$

de unde

$$F > -(a-1)\, p_e\, 2\pi r_i^2. \tag{47}$$

Relațiile (46) și 47) sînt condițiile ca să avem $\varepsilon_t < 0$ *pentru cazul* $\frac{p_i}{p_e} > 1$.

2.2.4. *Condițiile ca* ε_t *să fie alungire pe toată grosimea peretelui țevii* ($\varepsilon_t > 0$).

Relația (40) dă pentru $\varepsilon_t > 0$ expresia corespunzătoare pentru (41)

$$\frac{p_i}{p_e} > \frac{a + \frac{2a}{u} + \frac{F}{p_e\, 2\pi r_i^2}}{\frac{2a}{u} + 1}. \tag{41 b}$$

a. — Să considerăm cazul $\frac{p_i}{p_e} < 1$ în care ε_t este crescătoare iar curba respectivă este ca în fig. 2.2.c, astfel că dacă avem $\varepsilon_t > 0$ pe fața interioară, avem $\varepsilon_t > 0$ pe toată grosimea peretelui țevii.

Spre a avea $\varepsilon_t > 0$ pe fața interioară, ținînd seamă de (42) și (41 b), rezultă condiția

$$\frac{p_i}{p_e} > \alpha_2 \tag{48}$$

care arată că α_2 poate fi oricît de mic dar deoarece $\frac{p_i}{p_e} < 1$ atunci α_2 trebuie să fie limitat superior : $\alpha_2 < 1$ ceea ce dă condiția suplimentară

$$F < -(a-1)\, p_e\, 2\pi r_i^2. \tag{49}$$

Relațiile (48) și (49) sînt condițiile pentru a avea $\varepsilon_t > 0$ pentru cazul $\frac{p_i}{p_e} < 1$.

b. — Să considerăm cazul $\frac{p_i}{p_e} > 1$ în care ε_t este reprezentată ca în fig. 2.2.h, astfel că dacă avem $\varepsilon_t > 0$ pe fața exterioară, avem $\varepsilon_t > 0$ în toată grosimea peretelui țevii.

Din (43) și (41 b) rezultă condiția

$$\frac{p_i}{p_e} > \beta_2 \tag{50}$$

în care β_2 poate fi oricît de mic și nu este limitat nici superior deoarece nici $\frac{p_i}{p_e}$ nu este limitat superior astfel că *relația (50) este condiția unică pentru a avea* $\varepsilon_t > 0$ *pe toată grosimea peretelui țevii, în cazul* $\frac{p_i}{p_e} > 1$.

2.2.5. — *Condițiile ca* ε_t *să fie alungire pe o porțiune dinspre interior a peretelui țevii și scurtare pe cealaltă porțiune* ($\varepsilon_{ti} > 0$, $\varepsilon_{te} < 0$).

În acest caz rezultă că ε_t este descrescătoare, deci $\frac{p_i}{p_e} > 1$, și are curba reprezentativă ca în fig. 2.2.g iar ε_t este pozitivă pe fața interioară și negativă pe fața exterioară și deci trebuiesc satisfăcute simultan, conform relațiilor (41 b) și (42), condiția

$$\frac{p_i}{p_e} > \alpha_2$$

și respectiv, conform relațiilor (41 a) și (43), condiția

$$\frac{p_i}{p_e} < \beta_2$$

sau

$$\alpha_2 < \frac{p_i}{p_e} < \beta_2 \tag{51}$$

ceea ce implică limitarea lui β_2 impusă de $\frac{p_i}{p_e} > 1$ și anume

$$\beta_2 > 1$$

și legătura între α_2 și β_2 și anume

$$\alpha_2 < \beta_2 .$$

Ambele conduc la condiția

$$F > -(a-1)\, p_e\, 2\pi r_i^2 . \tag{52}$$

Relațiile (51) și (52) reprezintă deci condițiile ca ε_t *să fie alungire înspre interiorul peretelui țevii și scurtare înspre exteriorul acestuia.*

2.2.6. — *Condițiile ca* ε_t *să fie scurtare pe o porțiune dinspre interiorul țevii și alungire pe cealaltă porțiune* ($\varepsilon_{ti} < 0$, $\varepsilon_{te} > 0$).

În acest caz ε_t este crescătoare deci $\frac{p_i}{p_e} < 1$ avînd curba reprezentativă ca în fig. 2.2. b, iar ε_t este negativă pe fața interioară și pozitivă pe fața exterioară astfel că trebuiesc satisfăcute simultan, conform relațiilor (41 a) și (42), condiția

$$\frac{p_i}{p_e} < \alpha_2$$

și, respectiv, conform relațiilor (41 b) și (43), condiția

$$\frac{p_i}{p_e} > \beta_2$$

sau

$$\beta_2 < \frac{p_i}{p_e} < \alpha_2 \tag{53}$$

Relația (53) implică limita superioară a lui β_2 impusă de $\frac{p_i}{p_e} < 1$ și anume

$$\beta_2 < 1.$$

De asemenea, pentru α_2, implică limita inferioară impusă de $\frac{p_i}{p_e} > 0$ și anume

$$\alpha_2 > 0$$

precum și legătura între α_2 și β_2 și anume

$$\beta_2 < \alpha_2.$$

Pentru $\beta_2 < 1$ condiția este

$$F < -(a-1)\, p_e\, 2\pi r_i^2$$

pentru $\alpha_2 > 0$, condiția este

$$F < -a p_e\, 6\pi r_i^2 \tag{54}$$

iar pentru $\beta_2 < \alpha_2$ condiția este

$$F < -(a-1)\, p_e\, 2\pi r_i^2$$

care, comparate, conduc la șirul restrîns de inegalități

$$-a p_e\, 6\pi r_i^2 < F < -(a-1)\, p_e\, 2\pi r_i^2 \tag{55}$$

care este posibil, deoarece $3a > a - 1$.

Relațiile (53) și (55) reprezintă condițiile ca ε_t să fie scurtare înspre interiorul țevii și alungire înspre exterior.

2.2.7. — *Condițiile ca ε_t să fie constantă pe toată grosimea peretelui țevii* ($\varepsilon_t = \text{ct.}$).

Aceste condiții sînt realizate dacă $\frac{d\varepsilon_t}{dr} = 0$, ceea ce se obține dacă $\frac{p_i}{p_e} = 1$ sau $p_i = p_e = p$ care, introdusă în (40), dă

$$\varepsilon_t = -\frac{2}{3E}\left[p + \frac{F}{(a-1)\, 2\pi r_i^2}\right]. \tag{56}$$

Deformația ε_t *este o constantă pozitivă deci alungire constantă* (fig. 2.2. d), dacă

$$F < -(a-1)\, p\, 2\pi r_i^2 \tag{57 a}$$

și constantă negativă, deci *scurtare constantă* (fig. 2.2. e), dacă

$$F > -(a-1)\, p\, 2\pi r_i^2 \tag{57 b}$$

2.2.8. — *In peretele țevii se poate realiza o suprafață neutră din punct de vedere al deformațiilor pe direcția tangentei* ($\varepsilon_t = 0$).

Această suprafață se obține din (40), făcînd $\varepsilon_t = 0$:

$$u = \frac{2a(p_i - p_e)}{ap_e - p_i + \dfrac{F}{2\pi r_i^2}} \tag{58}$$

sau

$$r = r_e \sqrt{\frac{2(p_i - p_e)}{ap_e - p_i + \dfrac{F}{2\pi r_i^2}}}\,. \tag{59}$$

Suprafața este reală dacă sînt îndeplinite simultan condițiile

$$\frac{p_i}{p_e} > 1 \text{ și } F > (p_i - ap_e)\, 2\pi r_i^2 \tag{60}$$

sau condițiile

$$\frac{p_i}{p_e} < 1 \text{ și } F < (p_i - ap_e)\, 2\pi r_i^2 \tag{61}$$

Se constată că relațiile (60) sînt compatibile cu relația (52) adică, dacă este satisfăcută (52) care condiționează existența unei stări de deformare pozitivă spre interior și negativă spre exterior, suprafața neutră este reală.

De asemenea, relațiile (61) sînt compatibile cu relația (55) adică, dacă este satisfăcută condiția (55) ca ε_t să fie scurtare pe o porțiune dinspre interiorul peretelui și alungire pe cealaltă, atunci suprafața neutră este reală.

2.2.9. — *Observația 1.* — Din relația (47) rezultă că chiar dacă țeava este supusă la presiune interioară mai mare decît presiunea exterioară precum și la eforturi axiale de compresiune, ea poate avea deformații negative deci scurtare pe direcția tangentei deși acest lucru pare neverosimil.

2.2.10. — *Observația 2.* — Din relația (55) rezultă că putem alege efortul F astfel ca deformația ε_t să fie o constantă egală cu zero. Aceasta are loc pentru

$$F = -(a-1)\, p\, 2\pi r_i^2. \tag{62}$$

2.3. — *Cazul țevii închise la capete și solicitate numai la presiune interioară și exterioară, uniform distribuite.*

2.3.1. — *Formule de bază.*

Expresia deformației specifice pe direcția tangentei în acest caz, este cunoscută :

$$\varepsilon_t = \frac{1}{3E}\left[\frac{p_i r_i^2 - p_e r_e^2}{r_e^2 - r_i^2} + \frac{4 r_i^2 r_e^2 (p_i - p_e)}{r^2 (r_e^2 - r_i^2)}\right]$$

care se mai poate scrie, cu notațiile stabilite

$$\varepsilon_t = \frac{1}{3E(a-1)}\left[p_i\left(\frac{4a}{u}+1\right) - a p_e\left(1+\frac{4}{u}\right)\right] \tag{63}$$

Primele două derivate sînt

$$\frac{d\varepsilon_t}{dr} = -\frac{8 a r_i^2}{3E(a-1)}(p_i - p_e)\frac{1}{r^3} \tag{64}$$

$$\frac{d^2\varepsilon_t}{dr^2} = \frac{8 a r_i^2}{E(a-1)}(p_i - p_e)\frac{1}{r^4}. \tag{65}$$

2.3.2. — *Notații auxiliare.*

Deformația ε_t este pozitivă, negativă sau nulă, dacă în expresia (63) raportul p_i/p_e satisface relația

$$\frac{p_i}{p_e} \gtrless \frac{a\left(1+\frac{4}{u}\right)}{\frac{4a}{u}+1}. \tag{66}$$

Membrul al doilea al acestei relații, corespunzător celor două fețe ale peretelui țevii, devine pentru fața interioară ($r = r_i$, $u = 1$)

$$\alpha_3 = \frac{5a}{4a+1} \tag{67}$$

iar pentru fața exterioară ($r = r_e$, $u = a$):

$$\beta_3 = \frac{a+4}{5}. \tag{68}$$

2.3.3. — *Condițiile ca ε_t să fie scurtare pe toată grosimea peretelui țevii* ($\varepsilon_t < 0$).

Dacă ε_t este scurtare pe ambele fețe ($\varepsilon_{ti} < 0$, $\varepsilon_{te} < 0$), atunci ε_t este scurtare pe toată grosimea peretelui.

Pentru fața interioară, condiția respectivă este, ținînd seamă de (66) și (67),

$$\frac{p_i}{p_e} < \alpha_3 \tag{69}$$

iar pentru fața exterioară, ținînd seamă de (66) și (68),

$$\frac{p_i}{p_e} < \beta_3 \tag{70}$$

care trebuie să fie satisfăcute concomitent. Deoarece însă

$$1 < \frac{5a}{4a+1} < \frac{a+4}{5} \text{ adică } 1 < \alpha_3 < \beta_3, \tag{71}$$

rezultă că relația (69) reprezintă condiția necesară și suficientă pentru ca ε_t *să fie negativă pe toată grosimea peretelui țevii.*

Avînd în vedere relațiile (71), rezultă că $\frac{p_i}{p_e} \gtrless 1$ deci ε_t poate fi descrescătoare pentru $p_i/p_e > 1$ și în acest caz curba reprezentativă are concavitatea către $+\varepsilon_t$ ca în figura 2.3.c. dar ε_t poate fi și crescătoare pentru $\frac{p_i}{p_e} < 1$ și în acest caz curba are concavitatea către $-\varepsilon_t$ ca în figura 2.3.a.

2.3.4. — *Condiția ca* ε_t *să fie alungire pe toată grosimea peretelui țevii* ($\varepsilon_t > 0$).

Procedînd ca în cazul precedent, se obține pentru fața interioară

$$\frac{p_i}{p_e} > \alpha_3 \tag{72}$$

iar pentru fața exterioară

$$\frac{p_i}{p_e} > \beta_3 \tag{73}$$

Relațiile (72) și (73) trebuind să fie satisfăcute concomitent. și ținînd seamă de relația (71), rezultă că *este necesar și suficient să fie satisfăcută relația (73) pentru ca* ε_t *să fie pozitivă pe toată grosimea peretelui țevii.*

Din relațiile (71) și (73) rezultă că $\frac{p_i}{p_e} > 1$ și deci ε_t este o funcțiune de r descrescătoare iar curba reprezentativă are concavitatea către $+\varepsilon_t$, ca în fig. 2.3.e.

2.3.5. — *Condițiile ca* ε_t *să fie alungire pe o porțiune din peretele țevii și scurtare pe cealaltă porțiune.*

a. — Să căutăm condițiile ca ε_t să fie alungire pe fața interioară și scurtare pe fața exterioară. ($\varepsilon_{ti} > 0$, $\varepsilon_t < 0$).

În acest caz, funcția ε_t este descrescătoare și ținînd seamă de (64), rezultă că trebuie să avem $\frac{p_i}{p_e} > 1$ iar (65) arată că concavitatea curbei reprezentative este către + ε_t ca în fig. 2.3.d.

Trebuind să avem $\varepsilon_{ti} > 0$, trebuie să fie satisfăcută relația (72); trebuind să avem $\varepsilon_{te} < 0$, trebuie să fie satisfăcută relația (70) adică trebuie să avem simultan:

$$\frac{p_i}{p_e} > \alpha_3, \quad \frac{p_i}{p_e} < \beta_3.$$

Ținînd seama de (71), aceste condiții se restrîng la

$$1 < \alpha_3 < \frac{p_i}{p_e} < \beta_3. \tag{74}$$

Relațiile (74) reprezintă deci *condițiile pentru ca în peretele țevii să existe, concomitent, alungire înspre interiorul țevii și scurtare înspre exteriorul țevii.*

b. — Să căutăm condițiile ca ε_t să fie scurtare pe fața interioară și alungire pe fața exterioară.

În acest caz ε_t este crescătoare și, raționînd ca în cazul precedent, se găsește că $\frac{p_i}{p_e} < 1$ și că trebuie să avem, pentru fața interioară, satisfăcută relația (69) iar pentru fața exterioară, relația (73), simultan:

$$\frac{p_i}{p_e} < \alpha_3 \text{ și } \frac{p_i}{p_e} > \beta_3.$$

Ținînd însă seamă de (71), aceste condiții nu pot fi satisfăcute simultan prin urmare *nu se poate obține în peretele țevii, oricare ar fi valorile presiunilor* $\frac{p_i}{p_e}$, *alungire pe direcția tangentei înspre interior și scurtare înspre exterior ci numai invers.*

2.3.6. — *Condiția ca* ε_t *să fie constantă pe toată grosimea peretelui țevii* ($\varepsilon_t = \text{ct}$).

Pentru aceasta trebuie ca $\frac{d\varepsilon_t}{dr} = 0$ pentru orice valoare a lui r ceea ce se obține dacă $\frac{p_i}{p_e} = 1$ care este condiția căutată.

Făcînd în (63), înlocuirile $p_i = p_e = p$, se obține

$$\varepsilon_t = -\frac{p}{3E} \tag{75}$$

adică, în cazul *cînd* ε_t *este constantă în peretele țevii, ea are expresia dată de (75) și este o scurtare (fig. 2.3.b).*

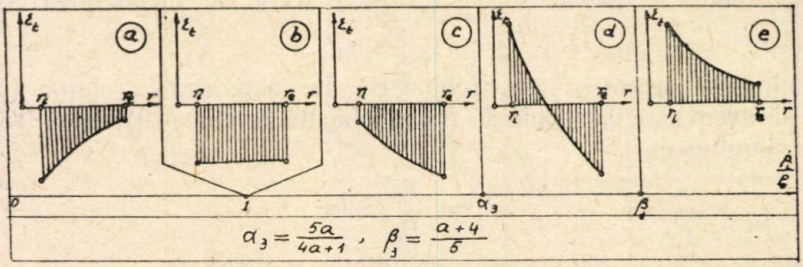


Fig. 2.3

Variația deformației specifice pe direcția tangentei ε_t în peretele țevii închise la capete, solicitate numai la presiune interioară p_i și exterioară p_e uniform distribuite.

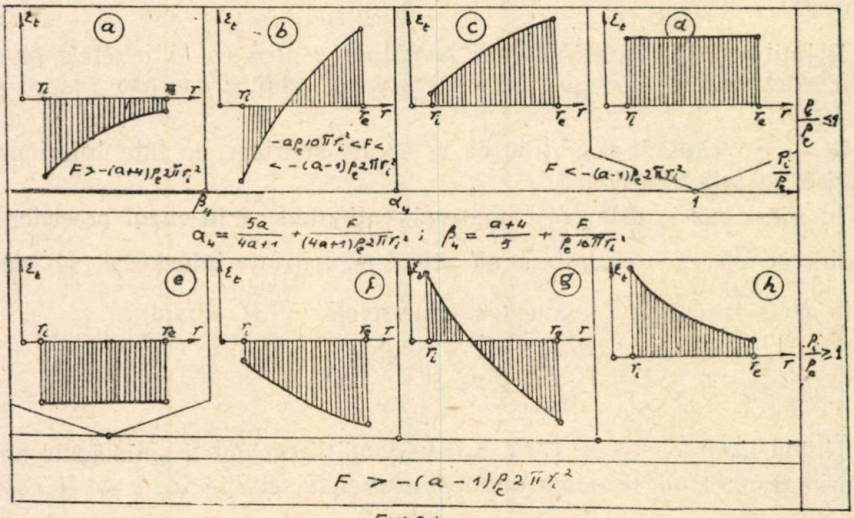


Fig. 2.4

Variația deformației specifice pe direcția tangentei ε_t în peretele țevii închise la capete solicitate atît la presiune interioară p_i și exterioară p_e, cît și la un efort axial F care nu produce flambaj.

2.3.7. — *În peretele țevii se poate realiza o suprafață neutră din punct de vedere al deformațiilor pe direcția tangentei* ($\varepsilon_t = 0$).

Punînd în (63) condiția $\varepsilon_t = 0$, se obține

$$u = \frac{4a(p_i - p_e)}{ap_e - p_i} \tag{76}$$

sau

$$r = 2r_e \sqrt{\frac{p_i - p_e}{ap_e - p_i}} \tag{77}$$

care este, ca și în cazurile precedente, o suprafață cilindrică dreaptă avînd aceeași axă ca și țeava.

Suprafața neutră este reală dacă sînt satisfăcute concomitent relațiile

$$\frac{p_i}{p_e} > 1 \text{ și } \frac{p_i}{p_e} < a.$$

Ca și în cazul 2.1.7, se verifică de asemenea că aceste relații sînt compatibile cu relațiile (74) adică, dacă acestea sînt satisfăcute, atunci suprafața (77) este reală.

2.3.8. — *Observație.* Din relația (69), se deduce că ε_t poate fi negativă chiar pentru valori ale presiunii interioare mai mari decît ale presiunii exterioare ceea ce, la prima vedere, pare neverosimil.

2.4. — *Cazul țevii închise la capete și solicitate, atît la presiune interioară și exterioară uniform distribuite, cît și la un efort axial, de asemenea uniform distribuit, dar care nu produce flambaj.*

2.4.1. — *Formule de bază.*

Expresia deformației ε_t, în acest caz, este cunoscută

$$\varepsilon_t = \frac{1}{3E}\left[\frac{p_i r_i^2 - p_e r_e^2}{r_e^2 - r_i^2} + \frac{4r_i^2 r_e^2 (p_i - p_e)}{r^2 (r_e^2 - r_i^2)} - \frac{F}{\pi (r_e^2 - r_i^2)}\right]$$

care se mai scrie

$$\varepsilon_t = \frac{1}{3E(a-1)}\left[p_i\left(\frac{4a}{u} + 1\right) - ap_e\left(1 + \frac{4}{u}\right) - \frac{F}{\pi r_i^2}\right]. \tag{78}$$

Primele două derivate sînt aceleași ca în cazul 2.3 adică sînt date de formulele (64) și (65).

2.4.2. — *Notații auxiliare.*

Pentru valoarea deformației ε_t pozitivă, negativă sau egală cu zero, din relația (78), se obține

$$\frac{p_i}{p_e} \gtrless \frac{a\left(1 + \frac{4}{u}\right) + \frac{F}{p_e \pi r_i^2}}{\frac{4a}{u} + 1}. \tag{79}$$

Membrul al doilea al relației (79) devine pentru fața interioară ($r = r_i$, $u = 1$)

$$\alpha_4 = \frac{5a}{4a+1} + \frac{F}{(4a+1)\, p_e\, \pi r_i^2} \tag{80}$$

iar pentru fața exterioară ($r = r_e$, $u = a$)

$$\beta_4 = \frac{a+4}{5} + \frac{F}{p_e\, 5\pi r_i^2}. \tag{81}$$

2.4.3. — *Condițiile ca ε_t să fie scurtare pe toată grosimea peretelui țevii* ($\varepsilon_t < 0$).

Condițiile (79) devin

$$\frac{p_i}{p_e} < \frac{a\left(1+\frac{4}{u}\right) + \frac{F}{p_e\, \pi r_i^2}}{\frac{4a}{u}+1}. \tag{82}$$

a. — Să considerăm cazul $\frac{p_i}{p_e} < 1$. Raționînd ca la 2.2.3, curba reprezentativă este ca în fig. 2.4.a și se găsește că dacă $\varepsilon_t < 0$ pe fața exterioară, avem $\varepsilon_t < 0$ în toată grosimea peretelui țevii, de unde rezultă condiția

$$\frac{p_i}{p_e} < \beta_4. \tag{83}$$

Deoarece însă $\frac{p_i}{p_e} > 0$, trebuie ca să avem

$$\beta_4 > 0$$

de unde condiția suplimentară

$$F > -(a+4)\, p_e\, \pi r_i^2. \tag{84}$$

Relațiile (83) și (84) reprezintă deci condițiile ca în peretele țevii deformația pe direcția tangentei să fie o scurtare în cazul cînd $p_i/p_e < 1$.

b. — Să considerăm cazul $\frac{p_i}{p_e} > 1$. În acest caz, curba reprezentativă este ca în fig. 2.4. f, iar condiția necesară și suficientă este dată de condiția pe suprafața interioară:

$$\frac{p_i}{p_e} < \alpha_4 \tag{85}$$

care, deoarece $p_i/p_e > 1$, implică și

$$\alpha_4 > 1$$

de unde condiția suplimentară

$$F > -(a-1)\, p_e \pi r_i^2. \tag{86}$$

Relațiile (85) și (86) reprezintă deci condițiile ca ε_t *să fie scurtare pe toată grosimea peretelui țevii, în cazul* $p_i/p_e > 1$.

2.4.4. — *Condițiile ca* ε_t *să fie alungire pe toată grosimea peretelui țevii* ($\varepsilon_t > 0$).

Condițiile (79) devin în acest caz

$$\frac{p_i}{p_e} > \frac{a\left(1+\frac{4}{u}\right)+\frac{F}{p_e\,\pi\, r_i^2}}{\frac{4a}{u}+1}. \tag{82 a}$$

a. — Pentru $\frac{p_i}{p_e} < 1$, curba reprezentativă este ca în fig. 2.4.c, iar condițiile căutate sînt date de condiția pe fața interioară :

$$\frac{p_i}{p_e} > \alpha_4. \tag{87}$$

Deoarece $\frac{p_i}{p_e} < 1$, trebuie ca $\alpha_4 < 1$ de unde condiția suplimentară

$$F < -(a-1)\, p_e \pi r_i^2. \tag{88}$$

Relațiile (87) și (88) reprezintă condițiile ca deformația ε_t *să fie alungire pe toată grosimea peretelui țevii.*

b. — Pentru cazul $\frac{p_i}{p_e} > 1$, curba reprezentativă este ca în fig. 2.4.h, iar condițiile căutate sînt date de condiția pe fața exterioară :

$$\frac{p_i}{p_e} > \beta_4. \tag{89}$$

In acest caz, pentru β_4 și implicit pentru F nu se impunea condiție suplimentară și deci *relația (89) reprezintă condiția unică pentru ca deformația pe direcția tangentei să fie alungire pe toată grosimea peretelui țevii, în cazul* $p_i/p_e > 1$.

2.4.5. — *Condițiile ca* ε_t *să fie alungire înspre interior și scurtare înspre exterior* ($\varepsilon_{ti} > 0$, $\varepsilon_{te} < 0$).

In acest caz ε_t este descrescătoare deci $p_i/p_e > 1$, iar curba reprezentativă este ca în fig. 2.4.g.

Pentru a avea $\varepsilon_t > 0$ pe o porțiune dinspre interior este necesar și suficient ca pe fața interioară să avem $\varepsilon_{ti} > 0$ deci

$$\frac{p_i}{p_e} > \alpha_3$$

și analog, pentru fața exterioară ($\varepsilon_{te} < 0$)

$$\frac{p_i}{p_e} < \beta_4$$

care, trebuind să fie satisfăcute concomitent, conduc la

$$\alpha_4 < \frac{p_i}{p_e} < \beta_4. \tag{90}$$

ceea ce implică condițiile

$$\beta_4 > 1 \text{ și } \alpha_4 < \beta_4. \tag{91}$$

Ambele condiții conduc la condiția suplimentară

$$F > -(a-1)\, p_e \pi r_i^2. \tag{92}$$

Relațiile (90) și (92) sînt deci condițiile ca ε_t să fie alungire înspre interior și scurtare înspre exterior.

2.4.6. — *Condițiile ca ε_t să fie scurtare pe fața interioară și alungire pe fața exterioară* ($\varepsilon_{ti} < 0$, $\varepsilon_{te} > 0$).

Deformația fiind în acest caz crescătoare, avem $\frac{p_i}{p_e} < 1$ iar curba reprezentativă este ca în figura 2.4.b.

Condiția $\varepsilon_{ti} < 0$ implică

$$\frac{p_i}{p_e} < \alpha_4$$

iar condiția $\varepsilon_{te} > 0$ implică

$$\frac{p_i}{p_e} > \beta_4$$

și deci, ținînd seamă de simultaneitatea lor, rezultă condițiile restrînse

$$\beta_4 < \frac{p_i}{p_e} < \alpha_4. \tag{93}$$

Relația (93) implică condițiile

$$\alpha_4 > 0,\ \beta_4 < 1,\ \beta_4 < \alpha_4 \tag{94}$$

din care, prima duce la

$$F > -a\,p_e\,5\pi\,r_i^2 \tag{95}$$

iar celelalte două la

$$F < -(a-1)\,p_e\,\pi\,r_i^2$$

care se restrîng la șirul de inegalități

$$-a\,p_e\,5\pi\,r_i^2 < F < -(a-1)\,p_e\,\pi\,r_i^2 \tag{96}$$

care este posibil deoarece $5a > a-1$.

Relațiile (93) și (96) sînt deci condițiile ca ε_t *să fie scurtare înspre interior și alungire înspre exterior.*

2.4.7. —*Condițiile ca* ε_t *să fie constantă pe toată grosimea peretelui țevii* ($\varepsilon_t = \text{ct.}$).

Condiția $\frac{d\varepsilon_t}{dr} = 0$, independent de r, se obține dacă

$$\frac{p_i}{p_e} = 1 \tag{97}$$

care reprezintă condiția ca ε_t să fie constantă.

Punînd $p_i = p_e = p$ în expresia deformației ε_t din (78), se obține

$$\varepsilon_t = -\frac{1}{3E}\left[p + \frac{F}{(a-1)\,\pi\,r_i^2}\right]. \tag{98}$$

Deformația ε_t *este o alungire constantă dacă*

$$F < -(a-1)\,p\,\pi\,r_i^2 \tag{99}$$

ca în fig. 2.4.d.

Deformația ε_t *este o scurtare constantă dacă*

$$F > -(a-1)\,p\,\pi\,r_i^2 \tag{100}$$

ca în fig. 2.4.e.

2.4.8. — *În peretele țevii se poate realiza o suprafață neutră din punct de vedere al deformației pe direcția tangentei* ($\varepsilon_t = 0$).

Această suprafață rezultă din (78) în care facem $\varepsilon_t = 0$ și este dată de

$$u = \frac{4a(p_i - p_e)}{ap_e - p_i + \dfrac{F}{\pi\,r_i^2}} \tag{101}$$

sau

$$r = 2r_e\sqrt{\frac{p_i - p_e}{ap_e - p_i + \dfrac{F}{\pi\,r_i^2}}}. \tag{102}$$

Expresia (102) este reală dacă

$$p_i/p_e > 1 \text{ și } F > (p_i - ap_e)\,\pi r_i^2 \tag{103}$$

sau dacă

$$p_i/p_e < 1 \text{ și } F < (p_i - ap_e)\,\pi r_i^2. \tag{104}$$

Relația a doua din (103) este satisfăcută dacă se înlocuiește p_i cu p_e deoarece membrul al doilea al său se micșorează și ea devine

$$F > -(a-1)\,p_e\,\pi r_i^2$$

ceea ce dovedește că relațiile (103) sînt compatibile cu relația (92).

De asemenea, relațiile (104) sînt compatibile cu relațiile (96) adică, dacă este satisfăcut șirul (96) suprafața (102) este reală.

2.4.9. — *Observația 1.* — La 2.4.3 b. am găsit că ε_t este scurtare în cazul $\frac{p_i}{p_e} > 1$ pentru F satisfăcînd relația (86) adică *este posibil ca țeava să fie supusă la o presiune interioară mai mare decît presiunea exterioară și la un efort axial de compresiune și totuși deformația pe direcția tangentei să fie o scurtare* ($\varepsilon_t < 0$), *ceea ce pare neverosimil.*

2.4.10. — *Observația 2.* — Din relația (98) se poate obține pentru F o valoare pentru care ε_t este o constantă egală cu zero. Valoarea ei este

$$F = -(a-1)\,p\,\pi r_i^2 \tag{62}$$

care este aceeași ca și în cazul țevii deschise la capete.

3. Concluzii

Se observă că în cazul efortului unitar și deformațiilor specifice pe direcția tangentei, folosind parametrul variabil p_i/p_e se pune în evidență toate modurile de variație ale acestora.

Din această cercetare rezultă că :

— presiunea interioară și exterioară pot fi alese astfel ca țeava să fie supusă pe direcția tangentei fie numai la compresiune, fie numai la întindere și respectiv la scurtare sau alungire, fie atît la compresiune cît și la întindere concomitent și respectiv la scurtare și alungire concomitent ;

— în peretele țevii se pot realiza suprafețe cilindrice neutre în raport de eforturile și deformațiile pe direcția tangentei, ale căror raze sînt funcțiuni de forțele exterioare :

— există valori pentru presiunea interioară p_i, presiunea exterioară p_e și efortul axial F, pentru care chiar dacă $p_i > p_e$ și $F_e < 0$, țeava capătă deformații negative pe direcția tangentei, ceea ce pare neverosimil la prima vedere ;

— există eforturi axiale pentru care țeava nu suferă deformații pe direcția tangentei, oricare ar fi valorile, egale, ale celor două presiuni.

Este de remarcat că concluziile deduse pentru ε_t sînt analoage cu cele deduse pentru ε_r din articolul „UNELE ASPECTE ALE REZISTENȚEI ȚEVILOR" publicat în Bul. I.P.B. nr. 6/1963.

Rezultatele obținute sînt reprezentate în diagramele din fig. 1, 2.1, 2.2, 2.3, și 2.4.

Catedra de mecanică
Institutului politehnic București

BIBLIOGRAFIE

1. *Beliaev-N.M.* — Rezistența materialelor. Trad. din limba rusă. — Ed. Tehnică, 1956.
2. *Buzdugan Gh.* — Curs de rezistența materialelor. Ed. Tehnică, 1957.
3. *Buzdugan Gh. și colab.* — Culegere de probleme de rezistența materialelor. Ed. Tehnică, 1955.
4. *Filonenco Borodici — M.M. și colab.* — Curs de rezistența materialelor, Trad. din limba rusă, Ed. Tehnică, 1952.
5. *Larman — E.K.* — Proiectarea gurilor de foc. Traducere din limba rusă, Inst. doc. Tehnică, 1950.
6. *Ponomarev — K.D. și colab.* — Bazele metodelor moderne de calcul în construcția de mașini. Ed. Masghiz. Moscova, 1952.
7. *Zamfirescu — I. Gh.* — Unele aspecte ale rezistenței țevilor. Buletinul Inst. politehnic București, nr. 6/1963.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC BUCUREŞTI
Tomul XXVI — 1964, Fascicola 3

C.Z. 629.19.

ASUPRA VIBRAŢIILOR FORŢATE ALE RACHETELOR CU ÎNCĂRCĂRI PERTURBATOARE DISCONTINUI

AL. MARINESCU, C. GUŢA

Notaţii

Oxz — sistem de axe legat de racheta nedeformată (fig. 1)
l — lungimea structurii rachetei.
z — deflecţiunea rachetei într-un punct oarecare.
γ — greutatea specifică a materialului structurii.
g — acceleraţia gravitaţiei.
k' — coeficientul de forfecare.
I — momentul de inerţie al secţiunii transversale a rachetei.
A — aria secţiunii transversale a rachetei.
E — modulul de elasticitate,
G — modulul de forfecare.
$F(x, t)$ — forţa perturbatoare.
$g_a(x)$ — coeficientul forţelor de amortizare internă.
$R_a(x)$ — coeficientul forţelor de readucere.
$A_e(x)$ — coeficientul forţelor de amortizare aerodinamică.
ϱ — densitatea aerului.
$\Phi_n(x)$ — funcţia formei modale.
M — numărul Mach.
$m(x)$ — massa pe unitatea de lungime într-un punct oarecare al rachetei.

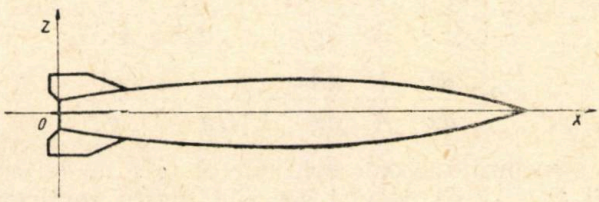


Fig. 1

Într-o lucrare anterioară [1] s-a stabilit, considerînd racheta ca o grindă de secţiune şi masă variabilă, ecuaţia generală a vibraţiilor forţate unde s-a ţinut seama de efectul inerţiei de rotaţie şi al forfecării,

de efectul amortizării interne și aerodinamice, precum și de efectul forțelor aerodinamice de readucere.

În lucrarea citată s-au studiat într-un caz particular vibrațiile forțate ale rachetei datorită unor forțe perturbatoare armonice.

În lucrarea de față se studiază vibrațiile forțate ale rachetei în prezența unor încărcări perturbatoare discontinui.

Asemenea genuri de forțe pot apare fie datorită comenzilor fie ciocnirilor cu particule meteorice sau altor cauze.

Vom presupune că forțele discontinui care apar sînt de tipul celor care admit o transformată Laplace.

În acest caz este cu totul indicat să căutăm soluția ecuației vibrațiilor forțate cu ajutorul transformatei Laplace.

După referința [1] ecuația vibrațiilor forțate este:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(EI\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right)+C_0\frac{\partial^4 z}{\partial x^2\,\partial t^2}+C_1\frac{\partial^4 z}{\partial t^4}+C_2\frac{\partial^3 z}{\partial x^3}+C_4\frac{\partial^3 z}{\partial x\,\partial t^2}+$$

$$+C_4\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+C_5\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}+A_e(x)\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial t}+R_a(x)\frac{\partial z}{\partial x}+g_a(x)\begin{vmatrix} z \\ \frac{\partial z}{\partial t}\end{vmatrix}\times\frac{\partial z}{\partial t}=F(x,t) \tag{1}$$

unde:

$$C_0=-\frac{I\gamma}{g}\left(1+\frac{E}{k'G}\right)$$

$$C_1=\frac{I\gamma^2}{g^2 k' G}$$

$$C_2=EI\frac{1}{A}\frac{dA}{dx}-E\frac{dI}{dx}$$

$$C_3=E\frac{dI}{dx}\frac{\gamma}{k'Gg}-\frac{I\gamma}{g}\frac{1}{A}\frac{dA}{dx}$$

$$C_4=E\frac{dI}{dx}\frac{1}{A}\frac{dA}{dx}-\frac{E}{I}\left(\frac{dI}{dx}\right)^2$$

$$C_5=\frac{E}{I}\left(\frac{dI}{dx}\right)^2\frac{\gamma}{k'Gg}-E\frac{d^2I}{dx^2}\frac{\gamma}{k'Gg}-$$

$$-2E\frac{dI}{dx}\frac{1}{A}\frac{dA}{dx}\frac{\gamma}{k'Gg}+\frac{\gamma A}{g}.$$

Dealungul structurii rachetei mărimile A și I nu se anulează astfel încît coeficienții $C_0 \ldots C_5$ de mai sus sînt funcții continue.

Să punem sub o formă convenabilă ecuația de mai sus [1].

Scriind că

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(EI\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right)=E\frac{d^2I}{dx^2}\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+2E\frac{dI}{dx}\frac{\partial^3 z}{\partial x^3}+EI\frac{\partial^4 z}{\partial x^4} \tag{2}$$

și admițînd că toți coeficienții pot fi puși sub forma unor polinoame $Q_m(x)$, atunci ecuația (1) va deveni, făcînd $g_a \approx 0$

$$Q_0 \frac{\partial^4 z}{\partial x^4} + Q_1 \frac{\partial^4 z}{\partial x^2 \partial t^2} + Q_2 \frac{\partial^4 z}{\partial t^4} + Q_3 \frac{\partial^3 z}{\partial x^3} + Q_4 \frac{\partial^3 z}{\partial x \partial t^2} +$$

$$+ Q_5 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + Q_6 \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} + Q_7 \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial t} + Q_8 \frac{\partial z}{\partial x} = F(x, t) \tag{3}$$

unde

$$Q_0 = EI\,;\ Q_1 = C_0\,;\ Q_2 = C_2 + 2E \frac{dI}{dx}$$

$$Q_4 = C_3\,;\ Q_5 = C_4 + E \frac{d^2 I}{dx^2}\,;\ Q_6 = C_5$$

$$Q_7 = A_e(x)\,;\ Q_8 = R_a(x).$$

Definind transformata Laplace a deflecțiunii $z(x, t)$ prin expresia:

$$Lz(x, t) = Z(x, p) = p \int_0^\infty e^{-pt} z(x, t)\, dt \tag{4}$$

avem:

$$L \frac{\partial^n z}{\partial x^n} = \frac{\partial^n Z}{\partial x^n} = p \int_0^\infty e^{-pt} \frac{\partial^n z}{\partial x^n}\, dt \tag{5}$$

sau dacă $Q_m(x)$ este un polinom de x

$$Q_m(x) \frac{\partial^n Z}{\partial x^n} = p \int_0^\infty e^{-pt} Q_m(x) \frac{\partial^n z}{\partial x^n}\, dt. \tag{6}$$

Pentru termenii în care intervin și derivate față de timp scriem:

$$L \frac{\partial^j}{\partial t^j} \left(\frac{\partial^i z}{\partial x^i} \right) = p^j L \frac{\partial^i z}{\partial x^i} - \sum_{k=0}^{k=i-1} \left(\frac{\partial^k z}{\partial x^k} \right)_{t=0} p^{i-k}. \tag{7}$$

Cum

$$L \frac{\partial^i z}{\partial x^i} = \frac{\partial^i Z}{\partial x^i}$$

putem scrie mai general că:

$$LQ_m(x) \frac{\partial^j}{\partial t^j} \left(\frac{\partial^i z}{\partial x^i} \right) = L \frac{\partial^j}{\partial t^j} \left[Q_m(x) \frac{\partial^i z}{\partial x^i} \right] =$$

$$= p^j Q_m(x) \frac{\partial^i Z}{\partial x^i} - \sum_{k=0}^{k=i-1} Q_m(x) \left(\frac{\partial^k z}{\partial x^k} \right)_{t=0} p^{i-k}. \tag{8}$$

Pe baza celor de mai sus și cu condițiile la limită

$$z(0, x) = 0; \left(\frac{\partial z}{\partial t}\right)_{t=0} = \ldots \left(\frac{\partial^k z}{\partial x^k}\right)_{t=0} = 0, \tag{9}$$

întrucît în operațiile de derivare p poate fi privit ca o constantă și deci $\frac{\partial^i z}{\partial x^i} = \frac{d^i Z}{dx^i}$ ecuația (1) devine

$$Q_0 \frac{d^4 Z}{dx^4} + p^2 Q_1 \frac{d^2 Z}{dx^2} + Q_2 p^4 Z + Q_3 \frac{d^3 Z}{dx^3} + Q_4 p^2 \frac{dZ}{dx} + Q_5 \frac{d^2 Z}{dx^2} + Q_6 p^2 Z +$$

$$+ Q_7 p \frac{dZ}{dx} + Q_8 \frac{dZ}{dx} = \overline{F}(x, p), \tag{10}$$

unde

$$\overline{F}(x, p) = LF(x, t).$$

Ultimei ecuații (10) i se poate din nou aplica transformata Laplace introducînd parametrul s.

În acest caz pentru operațiile asupra noii transformate parametrul p este considerat ca o constantă.

Punînd deci

$$LZ(x, p) = H(s, p),$$

vom avea scriind că

$$Q_m = q_0 + \sum_{m=1}^{n} q_m x^m,$$

$$LQ_m(x) \frac{d^i Z}{dx^i} = q_0 \left[H s^i - s^{i-1} Z(0, p) \ldots \left(\frac{d^{i-1} Z}{dx^{i-1}}\right)_{x=0}\right] +$$

$$+ \sum_{m=1}^{n} (-1)^m q_m \frac{d^m}{ds^m} \left[H s^i - s^{i-1} Z(0, p) \ldots \left(\frac{d^{i-1} Z}{dx^{i-1}}\right)_{x=0}\right] \tag{11}$$

Cu acestea ecuația (10) devine

$$s_n \frac{d^n H}{ds^n} + s_{n-1} \frac{d^{n-1} H}{ds^{n-1}} + \ldots + s_0 H = \Phi, \tag{12}$$

de unde

$$H = \frac{\Phi}{s_0} - \ldots - \frac{s_{n-1}}{s_0} \frac{d^{n-1} H}{ds^{n-1}} - \frac{s_n}{s_0} \frac{d^n H}{ds^n}. \tag{13}$$

În această situație se poate utiliza procedeul folosit în lucrarea [2] și determinarea funcției $Z(x, p)$ revine la soluționarea unor ecuații integrale de tip Voltera.

Tratarea problemei în cazul general este după cît se vede destul de anevoioasă.

O considerabilă simplificare rezultă în cazul rachetei considerată ca o grindă de secțiune constantă. In acest caz ecuația vibrațiilor este

$$EI\frac{\partial^4 z}{\partial x^4}-\frac{I\gamma}{g}\left(1+\frac{E}{k'G}\right)\frac{\partial^4 z}{\partial x^2\partial t^2}+\frac{I\gamma^2}{g^2k'G}\frac{\partial^4 z}{\partial t^4}+m\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}+$$

$$+A_e(x)\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial t}+g_a(x)\left|\frac{z}{\frac{\partial z}{\partial t}}\right|\frac{\partial z}{\partial t}+R_a(x)\frac{\partial z}{\partial x}=F(x,t). \qquad (14)$$

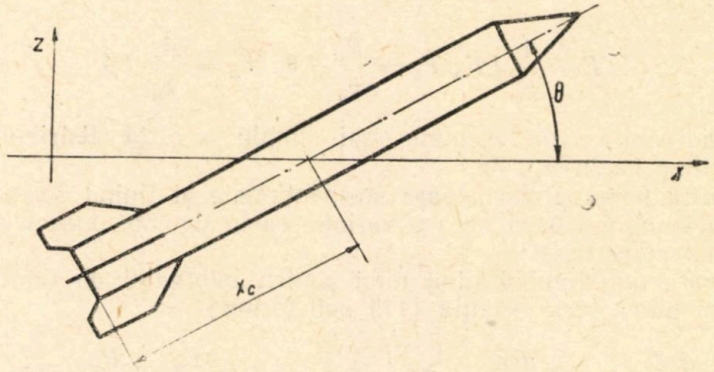


Fig. 2

Considerăm, și acest lucru este aproape exact, că $A_e(x)$ și $R_a(x)$ depind puțin de x fapt pentru care le vom presupune aproximativ constante.

Apoi pentru amortizarea aerodinamică și forțele de readucere putem pune (vezi fig. 2).

$$z\simeq(x-x_c)\,\theta, \qquad (15)$$

și deci

$$A_e(x)\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial t}\simeq A_e\dot{\theta},$$

$$R_a(x)\frac{\partial z}{\partial x}\simeq R_a\theta. \qquad (16)$$

Notăm pentru ușurință

$$k_0=EI$$

$$k_1=\frac{I\gamma}{g}\left(1+\frac{E}{k'G}\right)=C_0$$

$$k_2=\frac{I\gamma^2}{g^2k'G}=C_1$$

și

$$\alpha_1 = \frac{k_1}{k_0},\quad \alpha_2 = \frac{k_2}{k_0};\quad \alpha_3 = \frac{m}{k_0}$$

luînd $g_a(x) \simeq 0$ și aplicînd ecuației astfel reduse transformata Laplace cu condiția $Z(x, 0) = 0$ obținem:

$$\frac{d^4Z}{dx^4} - \alpha_1 p^2 \frac{d^2Z}{dx^2} + p^2(\alpha_2 p^2 + \alpha_3)\, Z = \overline{F} - \overline{F}_1 - \overline{F}_2 \tag{17}$$

unde

$$\overline{F} = \frac{1}{k_0} LF;\ \overline{F}_1 = \frac{R_a}{k_0} L\theta;\ \overline{F}_2 = \frac{A_e}{k_0} L\dot{\theta}.$$

Considerăm ca un exemplu mai simplu o forță distribuită cu variație în timp ca în fig. 3a.

Datorită forței perturbatoare susmenționate și ținînd seama de inerția rachetei unghiul θ va avea o variație ca în fig. 3b. unde τ este timpul de răspuns al rachetei.

Derivata unghiului θ fiind nulă pentru intervalul de timp exceptînd $t = \tau$, vom putea scrie ecuația (17) sub forma:

$$\frac{d^4Z}{dx^4} - \alpha_1 p^2 \frac{d^2Z}{dx^2} + p^2(\alpha_2 p^2 + \alpha_3)\, Z = \frac{F_0}{k_0} - \frac{R_a}{k_0} \cdot e^{-\tau p}. \tag{18}$$

Cînd timpul de răspuns al rachetei este foarte mic deci cînd $\tau \simeq 0$ atunci $\dot{\theta} \simeq 0$ pentru tot intervalul $t > 0$. În realitate acest timp de răspuns este destul de mare și prezintă interes soluția pentru valori mai mici decît el deci în vecinătatea valorilor $t = 0$.

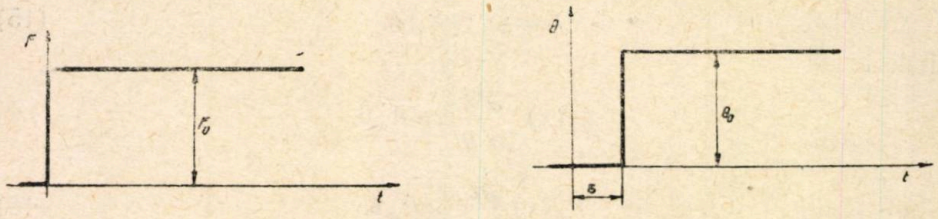


Fig. 3

Să considerăm mai întîi ecuația omogenă

$$\frac{d^4Z}{dx^4} - \alpha_1 p^2 \frac{d^2Z}{dx^2} + p^2(\alpha_2 p^2 + \alpha_3)\, Z = 0. \tag{19}$$

Cu substituția obișnuită

$$Z = C\, \epsilon^{\Lambda x} \tag{20}$$

sîntem conduși la ecuația caracteristică ale cărei rădăcini sînt:

$$\Lambda_{1,2,3,4} = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\alpha_1 p^2 \pm p \sqrt{p^2(\alpha_1^2 - 4\alpha_2) - 4\alpha_3}} \quad . \quad . \quad (21)$$

Deoarece am presupus că $z(x, 0) = 0$, pe baza unei proprietăți cunoscute și anume:

$$\lim_{|p| \to \infty} Z(x, p) = \lim_{t \to 0} z(x, t),$$

rezultă că

$$\lim_{|p| \to \infty} Z(x, p) = 0.$$

De aici deducem că numai rădăcina

$$\Lambda = -\frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\alpha_1 p^2 + p \sqrt{p^2(\alpha_1^2 - 4\alpha_2) - 4\alpha_3}} \quad (22)$$

are sens și deaceea în vecinătatea valorilor $t = 0$ putem lua cu aproximație soluția

$$Z \simeq C_1 e^{-kpx} \quad (23)$$

unde C_1 se determină prin condiția la limită

$$z(0, t) = Z(0, p) = 0 \quad (25)$$

iar

$$k = \sqrt{\frac{1}{2}(\alpha_1 + \sqrt{\alpha_1^2 - 4\alpha_2})}. \quad (26)$$

Pentru a găsi soluțiile particulare datorită celor doi termeni din membrul drept al ecuației (18) precum și pentru determinarea lui C_1 vom utiliza teorema produsului de compoziție (Borel), potrivit căreia dacă:

$$\begin{aligned} g_1(p) &= L\, h_1(t) \\ g_2(p) &= L\, h_2(t) \end{aligned} \quad (27)$$

și

atunci

$$\frac{g_1(p)\, g_2(p)}{p} = L \int_0^t h_1(T)\, h_2(t - T)\, dt = L \int_0^t h_2(T)\, h_1(t - T)\, dT. \quad (28)$$

Notăm cu:

$$\bar{m} = \frac{F_0}{k_0}\ ;\ \bar{\bar{m}} = \frac{R_a}{k_0}$$

$$m_1 = \frac{\bar{m}}{\alpha_2}\ ;\ m_2 = \frac{\bar{\bar{m}}}{\alpha_2}\ ;\ a^2 = \frac{\alpha_3}{\alpha_2}.$$

Soluțiile particulare vor fi :

$$\frac{\bar{m}}{p^2(\alpha_2 p^2+\alpha_3)} = \frac{\dfrac{m_1}{a^2 p}\,\dfrac{a^2}{p^2+a^2}}{p} \tag{29}$$

$$\frac{\bar{\bar{m}}\, e^{-\tau p}}{p^2(\alpha_2 p^2+\alpha_3)} = \frac{\dfrac{m_2}{a^2}\cdot\dfrac{e^{-\tau p}}{p}\cdot\dfrac{a^2}{p^2+a^2}}{p} \tag{30}$$

de unde deducem prin transformare inversă :

$$L^{-1}\frac{\bar{\bar{m}}\, e^{-\tau p}}{p^2(\alpha_2 p^2+\alpha_3)} = \frac{m_2}{a^2}\int_0^t (t-T)(1-\cos aT)\,dT$$

$$L^{-1}\frac{\bar{\bar{m}}\, e^{-\tau p}}{p^2(\alpha_2 p^2+\alpha_3)} = \frac{m_2}{a^2}\int_0^t (t-T-\tau)(1-\cos aT)\,dT. \tag{31}$$

Scriind soluția generală a ecuației (18) sub forma

$$Z = C_1 e^{-kpx} + \frac{\bar{m}}{p^2(\alpha_2 p^2+\alpha_3)} - \frac{\bar{\bar{m}}\, e^{-\tau p}}{p^2(\alpha_2 p^2+\alpha_3)} \tag{32}$$

din condiția

$$z(0, t) = Z(0, p) = z_0 \tag{33}$$

rezultă

$$C_1 = z_0 - \frac{\bar{m} - \bar{\bar{m}}\, e^{-\tau p}}{p^2(\alpha_2 p^2+\alpha_3)} \tag{34}$$

Vom deduce ca și mai sus

$$L^{-1} z_0 e^{-kpx} = z_0 \cdot 1(t-kx)$$

$$L^{-1}\frac{\bar{m}\, e^{-kpx}}{p^2(\alpha_2 p^2+\alpha_3)} = \frac{m_1}{a^2}\int_0^t (t-T-kx)(1-\cos aT)\,dT \tag{35}$$

$$L^{-1}\frac{\bar{\bar{m}}\, e^{-(\tau+kx)p}}{p^2(\alpha_2 p^2+\alpha_3)} = \frac{m_2}{a^2}\int_0^t (t-T-\tau-kx)(1-\cos aT)\,dT.$$

Efectuînd calculele obținem soluția căutată a problemei

$$z(x, t) = z_0 \cdot 1(t-kx) + \frac{m_2}{a^2}\tau t - \frac{m_2}{a^2}\frac{\tau}{a}\sin at +$$

$$+\frac{m_1}{a^2}kxt - \frac{m_1}{a^2}\frac{kx}{a}\sin at - \frac{m_2}{a^2}(\tau+kx)\,t + \frac{m_2}{a^2}\frac{\tau+kx}{a}\sin at \tag{36}$$

unde $1\cdot(t-kx)$ este funcția lui Heaviside.

Formula (36) se poate pune sub forma:

$$z(x, t) = z_1 + z_2 \tag{37}$$

unde

$$z_1 = z_0 \cdot 1(t - kx) \tag{38}$$

și

$$z_2 = \left(\frac{m_1}{a^2} - \frac{m_2}{a^2}\right)(at - \sin at)\,\frac{kx}{a}. \tag{39}$$

Se vede din expresia soluției că aceasta conține o deformare, un salt brusc z_1 ca în fig. 4. și o mișcare de rigid z_2 care depinde liniar de x.

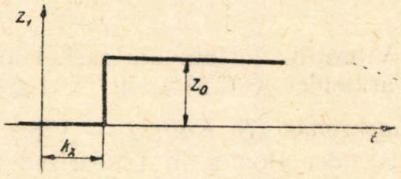


Fig. 4

Tragem concluzia că deoarece mărimea deformației care se propagă este z_0 trebuiesc evitate acele moduri cu deformații mari la $x = 0$. Acestea sînt primele moduri. Este util deci ca racheta să fie obligată să vibreze numai după moduri superioare ceea ce practic este realizabil.

Pentru a doua funcție z_2 este făcută o aplicație numerică cu datele:

$l = 8\ m$ — lungimea structurii

$d = 0{,}6\ m$ — diametrul rachetei,

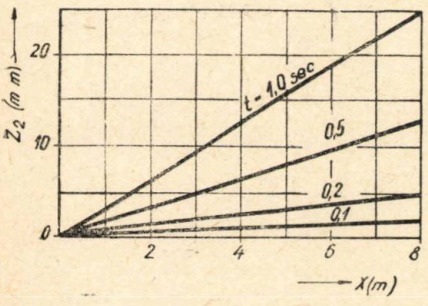
Material: duraluminiu, $G = 2{,}6 \cdot 10^5$ kg/cm²; $R_a = 14{,}86$ kg/m.

$$E = 7 \cdot 10^5 \text{ kg/cm}^2,\ k' = 0{,}5;\ EI = 10^9 \text{ kg cm}^2$$

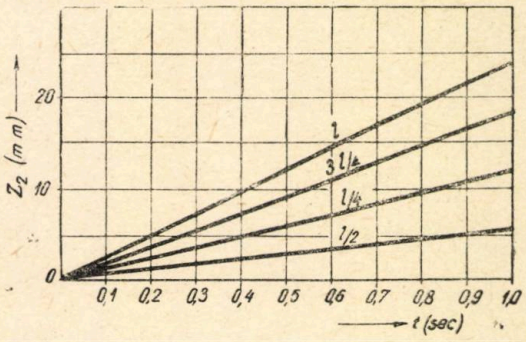
$$\tau = 1{,}5 \text{ sec},\ F_0 = 130 \text{ kg/m},$$

ceea ce ar corespunde unei rafale cu viteza $w = 25$ m/sec.

În fig. 5a se arată variația lui z_2 în lungul rachetei; pentru valori ale lui t cuprinse în intervalul $0{,}1 \leqslant t \leqslant 1{,}0$ sec.



a



b

Fig. 5

In fig. 5b se arată schimbarea lui z_2 în secțiunile alese $\left(\frac{l}{4}, \frac{l}{2}, \frac{3l}{4}, l\right)$ în funcție de timp. Aceste variații după cum rezultă din formula (39) sînt aproape lineare. Rezultă valori pentru z_2 mai mici de 25 mm, ceea ce este admisibil ($l = 8$ m).

Catedra de aviație
Institutul politehnic București

BIBLIOGRAFIE

1. *Al. Marinescu* — Vibrațiile forțate ale rachetelor cu încărcări perturbatoare armonice. S.C.M.A. nr. 3, 1964.

2. *A. Bobeszko, J. Kacprzynski, S. Kaliski* — Vibration and Elastic Stability of Slender Bodies in Linearized Supersonic Flow. Proceedings of Vibration Problemes Nr. 4, 1959.

3. *M. Denis-Papin, A. Kaufmann* — Curs de calcul operationnel. Paris, 1950.

4. *Al. Marinescu* — Considerațiuni privind răspunsul dinamic al structurii rachetei în timpul zborului perturbat. S.M.M.A. Nr. 3, 1963.

5. *G. Doetsch* — Handbuch der Laplace Transformation. Stuttgart, 1955.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC BUCUREȘTI
Tomul XXVI — 1964, Fascicola 3

ELECTROTEHNICĂ

C.Z. 621.315

EFECTUL PELICULAR AL CURENTULUI DE ADUCȚIE ÎN PLĂCI DE CONDUCTIVITĂȚI ȘI PERMEABILITĂȚI DIFERITE ÎN CONTACT ÎN CAPETE *)

CONSTANTIN NEMOIANU, ALEXANDRU TIMOTIN

În lucrarea de față se studiază refularea curentului de aducție armonic, din două plăci semiinfinite în contact frontal, avînd grosimile egale cu $\Delta = 2\delta$, conductivitățile σ_1 și σ_2, și permeabilitățile μ_1 și μ_2. Densitatea liniară a curentului armonic de aducție este $\dot{I}$ — (în care punctul pus deasupra literelor reprezintă valori în complex, nesimplificate ale diferitelor mărimi electromagnetice în regim armonic permanent). Pentru a evalua densitatea liniară a afluxului de putere prin cele două fețe ale fiecărei plăci, se calculează cîmpul magnetic, componentele longitudinale și transversale ale cîmpului electric și vectorul lui Poynting, într-un punct curent din interiorul plăcilor. Curentul traversează secțiunea de contact, trecînd de la o placă la cealaltă.

1. *Calculul cîmpului magnetic în plăci*

Din legea circuitului magnetic scrisă în regim cuasistaționar pentru corpuri imobile,

$$\operatorname{rot} \dot{H} = \sigma \dot{E}$$

și din legea inducției electromagnetice

$$\operatorname{rot} \dot{E} = -j\omega\mu\sigma \dot{H},$$

rezultă, prin eliminarea lui $\dot{E}$, o ecuație cu derivate parțiale de tip Helmholtz:

$$\Delta \dot{H} = \underline{\gamma}^2 \dot{H} \qquad \text{în care:} \quad \underline{\gamma} = \sqrt{j\omega\sigma\mu}, \quad \underline{\gamma}^2 = j\alpha^2$$

*) Lucrare comunicată la sesiunea științifică a cadrelor didactice din Institutul politehnic București 22—23 februarie 1964.

Vom lucra într-un sistem de coordonate cartesian, în care axa Ox este normală la plăci, axa Oy omoparalelă cu suprafața de contact, iar axa Oz omoparalelă cu liniile de curent, care la distanțe mari de locul contactului sînt paralele cu fețele laterale ale plăcilor.

În acest sistem de coordonate, ecuația lui Helmholtz devine:

$$\frac{\partial^2 \dot{H}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \dot{H}}{\partial z^2} = \gamma^2 \dot{H} \tag{1}$$

Încercăm o soluție de forma produsului a doi factori: primul $\dot{X}(x)$ depinzînd numai de variabila x, iar al doilea $\dot{Z}(z)$ depinzînd numai de variabila z:

$$\dot{H} = \dot{X}(x)\ \dot{Z}(x) \tag{2}$$

Înlocuind în ecuația (1), se obține:

$$\frac{\frac{\partial^2 \dot{X}}{\partial x^2}}{\dot{X}} + \frac{\frac{\partial^2 \dot{Z}}{\partial z^2}}{Z} = \gamma^2$$

Notăm:

$$\frac{\frac{\partial^2 \dot{X}}{\partial x^2}}{\dot{X}} = k \quad \text{și} \quad \frac{\frac{\partial^2 \dot{Z}}{\partial z^2}}{\dot{Z}} = \gamma^2 - k^2$$

în care k este, în cazul cel mai general, un număr complex de valori proprii deocamdată neprecizate.

Ecuația cu derivate parțiale (1) se separă astfel în două ecuații diferențiale și anume:

$$\frac{\partial^2 \dot{X}}{\partial x^2} - k^2 \dot{X} = 0$$

avînd ca soluție funcțiunile hiperbolice *sh* și *ch*, și

$$\frac{\partial^2 \dot{Z}}{\partial z^2} - (\gamma^2 - k^2)\, \dot{Z} = 0$$

avînd ca soluție funcțiunile exponențiale. Soluția generală a cîmpului magnetic se pune sub forma:

$$\dot{H}(x, z) = \sum_k (\dot{A}_k \, sh\, kx + \dot{B}_k \, ch\, kx)\left(\dot{C}_k\, e^{-\sqrt{\gamma^2 - k^2}\cdot z} + \dot{D}_k\, e^{\sqrt{\gamma^2 - k^2}\cdot z}\right) \tag{3}$$

Deoarece $\dot{H}(x, z)$ este o funcție impară, rezultă $\dot{B}_k = 0$. Comportarea lui $\dot{H}$ la infinit se studiază cu ajutorul argumentului exponențialei. Acesta fiind însă în general un număr complex, trebuie separat în o parte reală și una imaginară : $\sqrt{\gamma^2 - k^2} = g_k + j\,\delta_k$, în care $g_k = \Re_e \sqrt{\gamma^2 - k^2}$, și $\delta_k = \Im_m \sqrt{\gamma^2 - k^2}$. Pentru determinarea celorlalte constante $\dot{A}_k$, $\dot{C}_k$, și $\dot{D}_k$ vom studia condițiile de frontieră cu ajutorul tuturor valorilor posibile ale lui $\Re_e \sqrt{\gamma^2 - k^2}$.

În cazul în care k ia astfel de valori încît $\Re_e \sqrt{\gamma^2 - k^2} > 0$ din funcția $\dot{Z}(z)$,

$$\dot{Z}(z) = \dot{C}_k e^{-g_k z} \cdot e^{-j\delta_k z} + \dot{D}_k e^{g_k z} \cdot e^{j\delta_k z} \tag{4}$$

se observă că făcînd pe $z \to \infty$, pentru ca $|\dot{H}|$ să nu ia valori infinite, trebuie ca $\dot{D}_k = 0$.

În cazul în care k ia astfel de valori încît $\Re_e \sqrt{\gamma^2 - k^2} < 0$ pentru ca $|\dot{H}|$ să nu tindă spre infinit atunci cînd $z \to \infty$, trebuie ca $\dot{C}_k = 0$. Acest caz se reduce, în fond, la cel precedent, deoarece exponențiala reală tinde, ca și în cazul precedent, spre zero atunci cînd $z \to \infty$. Din acest motiv este indiferent faptul că se iau acele valori ale lui k cari fac pe $\Re_e \sqrt{\gamma^2 - k^2} > 0$, sau acele valori ale lui k cari fac pe $\Re_e \sqrt{\gamma^2 - k^2} < 0$.

În cazul în care k ia astfel de valori încît $\Re_e \sqrt{\gamma^2 - k^2} = 0$, funcția $\dot{Z}(z)$, în expresia căreia s-a luat $g_k = 0$, va fi :

$$\dot{Z}(z) = \dot{C}_k e^{-j\delta_k z} + \dot{D}_k e^{j\delta_k z}.$$

Deoarece la distanțe mari de suprafața de contact dintre cele două plăci cîmpul magnetic $\dot{H}(x)$, trebuie să fie independent de z, trebuie ca :

$$\delta_k = \Im_m \sqrt{\gamma^2 - k^2} = 0.$$

Deoarece, atît $g_k = 0$ cît și $\delta_k = 0$, însuși numărul complex $\sqrt{\gamma^2 - k^2}$ trebuie să fie nul :

$$\gamma^2 - k^2 = 0.$$

De aici rezultă valorile proprii ale lui k pentru care $\Re_e \sqrt{\gamma^2 - k^2} = 0$, și pentru care este satisfăcută condiția la limită pentru $z \to \infty$, ca $\dot{H}(x, \infty)$ să nu depindă de z. Aceste valori proprii sînt : $k = +\gamma, -\gamma$.

Cîmpul magnetic va fi :

$$\dot{H}(x, z) = \sum_k \dot{A}_k sh\, kx \cdot \dot{C}_k e^{\sqrt{\gamma^2 - k} \cdot z} \text{ cu } \Re_e \sqrt{\gamma^2 - k^2} \geqslant 0$$

El mai poate fi pus sub o altă formă, observînd că dintre toți termenii sumei, pot fi separați cei cari rezultă din valorile proprii $k_{\gamma_1} = \pm \gamma$ Această formă este următoarea:

$$\dot{H}(x, z) = \dot{A}_\gamma \, sh \, \gamma x \cdot \dot{C}_\gamma + \dot{A}_{-\gamma} \, sh \, (-\gamma x) \cdot \dot{C}_{-\gamma} + \sum_{k \neq \pm \gamma} \dot{A}_k \dot{C}_k \, sh \, kx \cdot e^{-\sqrt{\gamma^2 - k^2} \cdot z}$$

sau,

$$\dot{H}(x, z) = (\dot{A}_\gamma \dot{C}_\gamma - \dot{A}_{-\gamma} \dot{C}_{-\gamma}) \, sh \, \gamma x + \sum_{k \neq \pm \gamma} \dot{A}_k \dot{C}_k \, sh \, kx \, e^{-\sqrt{\gamma^2 - k^2} \cdot z}$$

Notăm:

$$\dot{A}_\gamma \dot{C}_\gamma - \dot{A}_{-\gamma} \dot{C}_{-\gamma} = \dot{G}_o \quad \text{și} \quad \dot{A}_k \dot{C}_k = \dot{G}_k$$

și atunci:

$$\dot{H}(x, z) = \dot{G}_o \, sh \, \gamma x + \sum_{k \neq \pm \gamma} \dot{G}_k \, sh \, kx \, e^{-\sqrt{\gamma^2 - k^2} \cdot z} \tag{5}$$

pentru $\Re_e \sqrt{\gamma^2 - k^2} > 0$.

Constanta $\dot{G}_0$ se poate determina știind că la distanțe foarte mari, de locul contactului, cîmpul magnetic este $\frac{\dot{I}}{2} \frac{sh \, \gamma x}{sh \, \gamma \delta}$.

Avem:

$$\dot{H}(x, \infty) = \dot{G}_o sh \, \gamma x = \frac{\dot{I}}{2} \frac{sh \, \gamma x}{sh \, \gamma \delta}; \quad \text{rezultă:} \quad \dot{G}_o = \frac{\dot{I}}{2 \, sh \, \gamma \delta}.$$

Cîmpul magnetic devine:

$$\dot{H}(x, z) = \frac{\dot{I}}{2} \frac{sh \, \gamma x}{sh \, \gamma \delta} + \sum_{k \neq \pm \gamma} \dot{G}_k \, sh \, kx \cdot e^{-\sqrt{\gamma^2 - k^2} \cdot z} \tag{6}$$

pentru

$$\Re_e \sqrt{\gamma^2 - k^2} > 0.$$

Deoarece la suprafața plăcii cîmpul magnetic trebuie să fie $\frac{\dot{I}}{2}$ este necesar ca toți termenii sumei să se anuleze pentru $x = \pm \delta$; cum $sh \, x$ nu se anulează decît pentru soluția banală $x = 0$ sau pentru argumente pur imaginare, trebuie ca să avem $k = j n$, în care n este un număr real. Notînd $j\dot{G}_k = \dot{A}_n$ și $k^2 = -n^2$, rezultă:

$$\dot{H}(x, z) = \frac{\dot{I}}{2} \frac{sh \, \gamma x}{sh \, \gamma \delta} + \sum_n \dot{A}_n \sin n x \, e^{-\sqrt{\gamma^2 + k^2} z} \tag{7}$$

Deoarece pentru $x = \pm\delta$ trebuie ca, cîmpul magnetic să fie egal cu primul termen al membrului al doilea, $\frac{\dot{I}}{2}\frac{sh\,\gamma x}{sh\,\gamma\delta}$ este necesar ca valorile proprii ale lui n care satisfac condițiile la limită de la suprafețele laterale ale plăcilor să fie: $n = \frac{\pi}{\delta}$ m în care $m = 0, 1, 2, 3, \ldots$

Expresiile generale ale cîmpului magnetic în cele două plăci vor fi de forma:

$$\dot{H}_{y1} = \frac{\dot{I}}{2}\frac{sh\,\gamma_1 x}{sh\,\gamma_1\delta} + \sum_{m=0}^{\infty}\dot{A}_{1m}\sin\frac{m\pi}{\delta}x\cdot e^{-\sqrt{\gamma_1^2+\left(\frac{m\pi}{\delta}\right)^2}z} \qquad (3)$$

pentru

$$z > 0$$

$$\dot{H}_{y2} = \frac{\dot{I}}{2}\frac{sh\,\gamma_2 x}{sh\,\gamma_2\delta} + \sum_{m=0}^{\infty}\dot{A}_{2m}\sin\frac{m\pi}{\delta}x\cdot e^{\sqrt{\gamma_2^2+\left(\frac{m\pi}{\delta}\right)^2}z} \qquad (8')$$

pentru $z < 0$.

Din legea circuitului magnetic se pot determina cele două componente ale cîmpului electric:

$$\dot{E}_x = -\frac{1}{\sigma}\frac{\partial\dot{H}_y}{\partial z} \quad \text{și} \quad \dot{E}_z = \frac{1}{\sigma}\frac{\partial\dot{H}_y}{\partial x}$$

Pentru a afla o relație de legătură între grupul de constante $\dot{A}_{1m}$ și grupul $\dot{A}_{2m}$, se pune condiția continuității componentei tangențiale a cîmpului electric la suprafața de contact dintre cele două plăci:

$$(\dot{E}_{x1})_{z=o} = (\dot{E}_{x2})_{z=o} \quad \text{sau} \quad \left(\frac{1}{\sigma_1}\frac{\partial\dot{H}_{y1}}{\partial z}\right)_{z=o} = \left(\frac{1}{\sigma_2}\frac{\partial\dot{H}_{y2}}{\partial z}\right)_{z=o}$$

sau

$$\frac{1}{\sigma_1}\sum_{m=0}^{\infty}\dot{A}_{1m}\left[-\sqrt{\gamma_1^2+\left(\frac{m\pi}{\delta}\right)^2}\right]\sin\frac{m\pi}{\delta}x =$$

$$= \frac{1}{\sigma_2}\sum_{m=0}^{\infty}\dot{A}_{2m}\sqrt{\gamma_2^2+\left(\frac{m\pi}{\delta}\right)^2}\sin\frac{m\pi}{\delta}x.$$

ceea ce este posibil cînd:

$$-\sigma_2\dot{A}_{1m}\sqrt{\gamma_1^2+\left(\frac{m\pi}{\delta}\right)^2} = \sigma_1\dot{A}_{2m}\sqrt{\gamma_2^2+\left(\frac{m\pi}{\delta}\right)^2} \qquad (9)$$

Din conservarea componentei tangențiale a cîmpului magnetic la suprafața de contact $(\dot{H}_{x1})_{z=o} = (\dot{H}_{x2})_{z=o}$ rezultă :

$$\frac{\dot{I}}{2}\left(\frac{\operatorname{sh}\gamma_1 x}{\operatorname{sh}\gamma_1\delta} - \frac{\operatorname{sh}\gamma_2 x}{\operatorname{sh}\gamma_2\delta}\right) = \sum_{m=0}^{\infty}(\dot{A}_{2m} - \dot{A}_{1m}) \sin\frac{m\pi}{\delta}x$$

sau, ținînd seama de relația (9) :

$$\frac{\dot{I}}{2}\left(\frac{\operatorname{sh}\gamma_1 x}{\operatorname{sh}\gamma_1\delta} - \frac{\operatorname{sh}\gamma_2 x}{\operatorname{sh}\gamma_2\delta}\right) = -\sum_{m=0}^{\infty}\dot{A}_{1m}\left[\frac{\sigma_2}{\sigma_1}\sqrt{\frac{\gamma_1^2 + \left(\frac{m\pi}{\delta}\right)^2}{\gamma_2^2 + \left(\frac{m\pi}{\delta}\right)^2}} + 1\right]\sin\frac{m\pi}{\delta}x \tag{10}$$

Pentru a determina constantele $\dot{A}_{1m}$, trebuie dezvoltat membrul întîi al reacției de mai sus în serie Fourier de sinuși. Funcția

$$\dot{F}(x) = \frac{\dot{I}}{2}\left(\frac{\operatorname{sh}\gamma_1 x}{\operatorname{sh}\gamma_1\delta} - \frac{\operatorname{sh}\gamma_2 x}{\operatorname{sh}\gamma_2\delta}\right) \tag{11}$$

se poate pune deci sub forma $\dot{F}(x) = \sum_{m=0}^{\infty}\dot{C}_m \sin\frac{m\pi}{\delta}x$, în care coeficienții $\dot{C}_m$ sînt dați de formula :

$$\dot{C}_m = \frac{1}{\delta}\int_{-\delta}^{\delta}\dot{F}(x)\sin\frac{m\pi}{\delta}x\,dx \tag{12}$$

Vom avea :

$$\dot{C}_m = \frac{\dot{I}}{2\delta}\int_{-\delta}^{\delta}\frac{\operatorname{sh}\gamma_1 x}{\operatorname{sh}\gamma_1\delta}\sin\frac{m\pi}{\delta}x\,dx - \frac{\dot{I}}{2\delta}\int_{-\delta}^{\delta}\frac{\operatorname{sh}\gamma_2 x}{\operatorname{sh}\gamma_2\delta}\sin\frac{m\pi}{\delta}x\,dx =$$

$$= (-1)^m \cdot \frac{m\pi}{\delta^2}\frac{(\gamma_1^2 - \gamma_2^2)\dot{I}}{\left[\gamma_1^2 + \left(\frac{m\pi}{\delta}\right)^2\right]\left[\gamma_2^2 + \left(\frac{m\pi}{\delta}\right)^2\right]} \tag{13}$$

Deci funcția

$$\dot{F}(x) = \frac{\dot{I}}{2}\left(\frac{\operatorname{sh}\gamma_1 x}{\operatorname{sh}\gamma_1\delta} - \frac{\operatorname{sh}\gamma_2 x}{\operatorname{sh}\gamma_2\delta}\right)$$

se mai poate scrie în felul următor :

$$\frac{\dot{I}}{2}\left(\frac{\operatorname{sh}\gamma_1 x}{\operatorname{sh}\gamma_1\delta} - \frac{\operatorname{sh}\gamma_2 x}{\operatorname{sh}\gamma_2\delta}\right) = \frac{\pi\dot{I}(\gamma_1^2 - \gamma_2^2)}{\delta^2}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m \cdot m}{\lambda_{1m}\lambda_{2m}}\sin\frac{m\pi}{\delta}x \tag{11'}$$

Dacă derivăm relația de mai sus în raport cu x, se obține următoarea egalitate :

$$\frac{\dot{I}}{2}\left(\frac{\gamma_1 \operatorname{ch} \gamma_1 x}{\operatorname{sh} \gamma_1 \delta} - \frac{\gamma_2 \operatorname{ch} \gamma_2 x}{\operatorname{sh} \gamma_2 \delta}\right) = \frac{\pi^2 \dot{I}\,(\gamma_1^2 - \gamma_2^2)}{\delta^3} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m \cdot m^2}{\lambda_{1m}^2 \cdot \lambda_{2m}^2} \cos \frac{m\pi}{\delta} x \qquad (11'')$$

în care,

$$\lambda_{1m} = \sqrt{\gamma_1^2 + \left(\frac{m\pi}{\delta}\right)^2} \text{ și } \lambda_{2m} = \sqrt{\gamma_2^2 + \left(\frac{m\pi}{\delta}\right)^2}$$

Condiția (10) se mai poate scrie deci în felul următor :

$$\sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{m\pi}{\delta^2} \frac{(\gamma_1^2 - \gamma_2^2)\,\dot{I}}{\left[\gamma_1^2 + \left(\frac{m\pi}{\delta}\right)^2\right]\left[\gamma_2^2 + \left(\frac{m\pi}{\delta}\right)^2\right]} \sin \frac{m\pi}{\delta} x =$$

$$= -\sum_{m=0}^{\infty} \dot{A}_{1m} \left[\frac{\sigma_2}{\sigma_2} \sqrt{\frac{\gamma_1^2 + \left(\frac{m\pi}{\delta}\right)^2}{\gamma_2^2 + \left(\frac{m\pi}{\delta}\right)^2}} + 1\right] \sin \frac{m\pi}{\delta} x .$$

Notînd din nou, pentru simplificare, $\sqrt{\gamma_1^2 + \left(\frac{m\pi}{\delta}\right)^2} = \lambda_{1m}$ și $\sqrt{\gamma_2^2 + \left(\frac{m\pi}{\delta}\right)^2} = \lambda_{2m}$ și folosind și relația (9), rezultă :

$$\dot{A}_{1m} = \frac{(-1)^{m+1} m \frac{\pi}{\delta^2} (\gamma_1^2 - \gamma_2^2)\,\dot{I}}{\lambda_{1m}^2 \lambda_{2m}^2 \left(\frac{\sigma_2}{\sigma_1} \frac{\lambda_{1m}}{\lambda_{2m}} + 1\right)} \qquad (14)$$

și

$$\dot{A}_{2m} = -\frac{(-1)^{m+1} \cdot m \frac{\pi}{\delta^2} (\gamma_1^2 - \gamma_2^2)\,\dot{I}}{\lambda_1^2 \lambda_{2m}^2 \left(\frac{\sigma_1}{\sigma_2} \frac{\lambda_{2m}}{\lambda_{1m}} + 1\right)} \qquad (15)$$

Cîmpul magnetic în cele două plăci va avea expresiile:

$$\dot{H}_{y_1} = \frac{\dot{I}}{2}\frac{\operatorname{sh}\underline{\gamma}_1 x}{\operatorname{sh}\underline{\gamma}_1\delta} + \frac{\dot{I}(\underline{\gamma}_1^2-\underline{\gamma}_2^2)\pi}{\delta^2}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^{m+1}\cdot m\, e^{-\underline{\lambda}_{1m}z}}{\underline{\lambda}_{1m}^2\,\underline{\lambda}_{2m}^2\left(\frac{\sigma_2}{\sigma_1}\frac{\underline{\lambda}_{1m}}{\underline{\lambda}_{.m}}+1\right)}\sin\frac{m\pi}{\delta}x$$

pentru $z>0$ (16)

$$\dot{H}_{y_2} = \frac{\dot{I}}{2}\frac{\operatorname{sh}\underline{\gamma}_2 x}{\operatorname{sh}\underline{\gamma}_2\delta} - \frac{\dot{I}(\underline{\gamma}_1^2-\underline{\gamma}_2^2)\pi}{\delta^2}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^{m+1}\cdot m\, e^{\underline{\lambda}_{2m}z}}{\underline{\lambda}_{1m}^2\,\underline{\lambda}_{2m}^2\left(\frac{\sigma_1}{\sigma_2}\frac{\underline{\lambda}_{2m}}{\underline{\lambda}_{1m}}+1\right)}\sin\frac{m\pi}{\delta}x$$

pentru $z<0$

Verificarea continuității componentei tangențiale a cîmpului magnetic la suprafața de contact se face observînd că relația $(\dot{H}_{y_1})_{z=o} = (\dot{H}_{y_2})_{z=o}$ este identică cu relația (11'). Cît privește seriile de mai sus, ele sînt convergente deoarece $\lim_{m\to\infty}\frac{m}{\underline{\lambda}_{1m}^2\,\underline{\lambda}_{2m}^2}\to 0$.

Soluțiile (16) verifică următoarele cazuri particulare:

Pentru $z\to\infty$, $\dot{H}_{yi} = \frac{\dot{I}}{2}\frac{\operatorname{sh}\underline{\gamma}_i x}{\operatorname{sh}\underline{\gamma}_i\delta}$, cu $i=1, 2$, (expresie cunoscută de la cazul unei singure plăci).

Pentru $x\to\delta$, $\dot{H}_{yi} = \frac{\dot{I}}{2}$, (cîmpul din exteriorul plăcilor infinit extinse).

Pentru $\underline{\gamma}_1=\underline{\gamma}_2=\underline{\gamma}$, $\dot{H}_{yi} = \frac{\dot{I}}{2}\frac{\operatorname{sh}\underline{\gamma}_i x}{\operatorname{sh}\underline{\gamma}_i\delta}$, (cazul unei singure plăci).

Pentru $\omega\to 0$, prin aplicarea regulii lui Hopital se obține:

$$\dot{H}_{yi} = \frac{\dot{I}}{2}\cdot\frac{x}{\delta},$$ (cîmpul staționar din interiorul unei singure plăci)

2. *Calculul cîmpului electric în plăci.*

a) Componentele normale la plăci ale cîmpului electric se calculează din legea circuitului magnetic: $\dot{E}_x = -\frac{1}{\sigma}\frac{\partial\dot{H}_y}{\partial z}$. Rezultă următoarele componente normale la fețele laterale ale celor două plăci:

$$\dot{E}_{x1} = \frac{\dot{I}\,(\underline{\gamma}_1^2 - \underline{\gamma}_2^2)\,\pi}{\sigma_1\,\delta^2} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^{m+1}\cdot m\,\underline{\lambda}_{1m}\,e^{-\underline{\lambda}_{1m}z}}{\underline{\lambda}_{1m}^2\,\underline{\lambda}_{2m}^2\left(\frac{\sigma_1}{\sigma_2}\,\frac{\underline{\lambda}_{2m}}{\underline{\lambda}_{1m}} + 1\right)} \sin\frac{m\,\pi}{\delta}\,x$$

pentru $z > 0$ (17)

$$\dot{E}_{x2} = \frac{\dot{I}\,(\underline{\gamma}_1^2 - \underline{\gamma}_2^2)\,\pi}{\sigma_2\,\delta^2} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^{m+1}\cdot m\,\underline{\lambda}_{1m}\,e^{\underline{\lambda}_{2m}z}}{\underline{\lambda}_{1m}^2\,\underline{\lambda}_{2m}^2\left(\frac{\sigma_1}{\sigma_2}\,\frac{\underline{\lambda}_{2m}}{\underline{\lambda}_{1m}} + 1\right)} \sin\frac{m\,\pi}{\delta}\,x$$

pentru $z < 0$

Ambele expresii de mai sus devin, pentru $z = 0$:

$$E_{x0} = \frac{\dot{I}\,(\underline{\gamma}_1^2 - \underline{\gamma}_2^2)}{\delta^2} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^{m+1}\cdot m}{\underline{\lambda}_{1m}\,\underline{\lambda}_{2m}\,(\sigma_1\underline{\lambda}_{2m} + \sigma_2\,\underline{\lambda}_{1m})} \sin\frac{m\,\pi}{\delta}\,x \qquad (18)$$

ceea ce verifică continuitatea componentei tangențiale a cîmpului electric la suprafața de contact dintre cele două plăci. Punînd în ecuațiile (17) $x = \delta$, se verifică și faptul că pe fețele laterale ale plăcilor, componenta normală la aceste fețe este nulă:

$$\dot{E}_x = \dot{E}_\delta = 0\,.$$

b) Componentele tangențiale la plăci ale cîmpului electric se calculează tot din legea circuitului magnetic: $\dot{E}_z = \frac{1}{\sigma}\,\frac{\partial \dot{H}_y}{\partial x}$.

Rezultă:

$$\dot{E}_{z1} = \frac{\underline{\gamma}_1}{\sigma_1}\,\frac{\dot{I}}{2}\,\frac{\operatorname{ch}\underline{\gamma}_1 x}{\operatorname{sh}\underline{\gamma}_1\delta} + \frac{\dot{I}\,(\underline{\gamma}_1^2 - \underline{\gamma}_2^2)\,\pi^2}{\sigma_1\,\delta^3} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{m^2(-1)^{m+1}\,e^{-\underline{\lambda}_{1m}z}}{\underline{\lambda}_{1m}^2\,\underline{\lambda}_{2m}^2\left(\frac{\sigma_2}{\sigma_1}\,\frac{\underline{\lambda}_m}{\underline{\lambda}_{m2}} + 1\right)} \cos\frac{m\,\pi}{\delta}\,x$$

pentru $z > 0$

$$\dot{E}_{z2} = \frac{\underline{\gamma}_2}{\sigma_2}\,\frac{\dot{I}}{2}\,\frac{\operatorname{ch}\underline{\gamma}_2 x}{\operatorname{sh}\underline{\gamma}_2} - \frac{\dot{I}\,(\underline{\gamma}_1^2 - \underline{\gamma}_2^2)\,\pi^2}{\sigma_2\,\delta^3} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{m^2(-1)^{m+1}\,e^{\underline{\lambda}_{1m}z}}{\underline{\lambda}_{1m}^2\,\underline{\lambda}_{2m}^2\left(\frac{\sigma_1}{\sigma_2}\,\frac{\underline{\lambda}_{2m}}{\underline{\lambda}_{1m}} + 1\right)} \cos\frac{m\,\pi}{\delta}\,x$$

pentru $z < 0$.

Din modulul componentei normale a cîmpului electric la plăci la suprafața de contact, care poate fi pus sub forma:

$$\dot{E}_{x0} = \frac{(\alpha_1 - \alpha_2)\,\dot{I}\,\pi}{\delta} \sqrt{\left(\sum_{m=0}^{\infty} a_m \sin\frac{m\,\pi}{\delta}\,x\right)^2 + \left(\sum_{m=0}^{\infty} b_m \sin\frac{m\,\pi}{\delta}\,x\right)^2}$$

se trage concluzia că, dacă $\alpha_1 > \alpha_2$, atunci refularea curentului este mai pronunțată în placa 1 decît în placa 2, iar dacă $\alpha_2 > \alpha_1$, fenomenul este invers.

Verificarea continuității componentei normale a densității de curent la suprafața de contact dintre plăci, $(\dot{J}_{n1})_{z=o} = (\dot{J}_{n2})_{z=o}$ se face demonstrînd valabilitatea relației :

$$(\dot{E}_{x1}\,\sigma_1)_{z=o} - (\dot{E}_{x2}\,\sigma_2)_{z=o} = 0$$

Avem :

$$\frac{\dot{I}}{2}\frac{\gamma_1 \operatorname{ch}\gamma_1 x}{\operatorname{sh}\gamma_1\delta} + \frac{\dot{I}(\gamma_1^2-\gamma_2)\pi^2}{\delta}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{m^2(-1)^{m+1}\cos\frac{m\pi}{\delta}x}{\lambda_{1m}^2\lambda_{2m}^2\left(\frac{\sigma_2\lambda_{1m}}{\sigma_1\lambda_{2m}}+1\right)} -$$

$$-\frac{\dot{I}}{2}\frac{\gamma_2 \operatorname{ch}\gamma_2 x}{\operatorname{sh}\gamma_2\delta} + \frac{\dot{I}(\gamma_1^2-\gamma_2^2)\pi^2}{\delta^3}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{m^2(-1)^{m+1}\cdot\cos\frac{m\pi}{\delta}x}{\lambda_{1m}^2\lambda_{2m}^2\left(\frac{\sigma_1\lambda_{2m}}{\sigma_2\lambda_{1m}}+1\right)} = 0$$

sau, $$\frac{\dot{I}}{2}\left(\frac{\gamma_1 \operatorname{ch}\gamma_1 x}{\operatorname{sh}\gamma_1\delta} - \frac{\gamma_2 \operatorname{ch}\gamma_2 x}{\operatorname{sh}\gamma_2\delta}\right) +$$

$$+\frac{\dot{I}(\gamma_1^2-\gamma_2^2)\pi^2}{\delta^3}\left[\sum_{m=0}^{\infty}\frac{m^2(-1)^{m+1}\cos\frac{m\pi}{\delta}x}{\lambda_{1m}^2\lambda_{2m}^2\left(\frac{\sigma_2\lambda_{1m}}{\sigma_1\lambda_{2m}}+1\right)} + \sum_{m=0}^{\infty}\frac{m^2(-1)^{m+1}\cos\frac{m\pi}{\delta}x}{\lambda_{1m}^2\lambda_{2m}^2\left(\frac{\sigma_1\lambda_{2m}}{\sigma_2\lambda_{1m}}+1\right)}\right] = 0$$

sau, în fine, observînd că

$$\frac{1}{\frac{\sigma_2\lambda_{1m}}{\sigma_1\lambda_{2m}}+1} + \frac{1}{\frac{\sigma_1\lambda_{2m}}{\sigma_2\lambda_{1m}}+1} = 1,$$

se obține :

$$\frac{\dot{I}}{2}\left(\frac{\gamma_1 \operatorname{ch}\gamma_1 x}{\operatorname{sh}\gamma_1\delta} - \frac{\lambda_2 \operatorname{ch}\gamma_2 x}{\operatorname{sh}\gamma_2\delta}\right) = \frac{\dot{I}(\gamma_1^2-\gamma_2^2)\pi^2}{\delta^3}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{m^2(-1)^m\cos\frac{m\pi}{\delta}x}{\lambda_{1m}^2\lambda_{2m}^2} \qquad (20)$$

A demonstra continuitatea componentei normale a densității de curent la suprafața de contact, înseamnă a demonstra egalitatea celor doi membri ai relației (20). Se observă însă că relația (20) e identică cu relația (11′).

3. *Calculul puterii pierdute în plăci*

Vectorul lui Poynting la suprafața plăcii 1 (ca și vectorul lui Poynting de la suprafața plăcii 2) se calculează în complex simplificat în felul următor :

$$\underline{S}_1 = \left(\frac{1}{2}\dot{E}_{1z}\dot{H}^*_{1y}\right)_{x=\pm\delta} = \left(\frac{1}{2}\sqrt{2}\,\underline{E}_{1z}\,e^{j\omega t}\cdot 2\,\underline{H}^*_{1y}\,e^{-j\omega t}\right)_{x=\pm\delta} = (\underline{E}_{1z}\underline{H}^*_{1y})_{x=\pm\delta}$$

în care

$$(\underline{E}_{1z})_{x=\delta} = \frac{\underline{\gamma}_1}{\sigma_1}\frac{\underline{I}}{2}\coth\underline{\gamma}_1\delta + \frac{\underline{I}\left(\underline{\gamma}_1^2-\underline{\gamma}_2^2\right)\pi^2}{\sigma_1\delta^3}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{m^2(-1)^{2m+1}\,e^{-\underline{\lambda}_{1m}z}}{\underline{\lambda}_{1m}^2\,\underline{\lambda}_{2m}^2\left(\frac{\sigma_2}{\sigma_1}\frac{\underline{\lambda}_{1m}}{\underline{\lambda}_{2m}}+1\right)}$$

$$(\underline{H}^*_{1y})_{x=\delta} = \frac{\underline{I}^*}{2}$$

Deci,

$$(\underline{S}_1)_{x=\delta} = \frac{\underline{\gamma}_1}{\sigma_1}\frac{\underline{I}^2}{4}\coth\underline{\gamma}_1\delta + \frac{\underline{I}^2\left(\underline{\gamma}_1^2-\underline{\gamma}_2^2\right)\pi^2}{\sigma_1\delta^3}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{m^2(-1)^{2m+1}\,e^{-\underline{\lambda}_{1m}z}}{\underline{\lambda}_{1m}^2\,\underline{\lambda}_{2m}^2\left(\frac{\sigma_2}{\sigma_1}\frac{\underline{\lambda}_{1m}}{\underline{\lambda}_{2m}}+1\right)}$$

în care s-a pus $\underline{I}\,\underline{I}^* = I^2$. Dacă placa 1 are grosimea 2δ, înălțimea h și lățimea l, puterea aparentă complexă ce intră prin cele două fețe laterale este :

$$\underline{P}_a = 2\iint \underline{S}\;\overline{dA} = 2\int_0^a \underline{S}\,l\,dz$$

Făcînd calculele, se obține pentru placa 1 :

$$\underline{P}_a = \frac{\underline{\gamma}_1}{\sigma_1}\frac{I^2 h\,l}{2\,\mathrm{th}\,\underline{\gamma}_1\delta} - \frac{\underline{I}^2\left(\underline{\gamma}_1^2-\underline{\gamma}_2^2\right)\pi^2 l}{\sigma_1\delta^3}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{m^2(-1)^{2m+1}\left(e^{-\underline{\lambda}_{1m}h}-1\right)}{\underline{\lambda}_{1m}^3\,\underline{\lambda}_{2m}^3\left(\frac{\sigma_2}{\sigma_1}\frac{\underline{\lambda}_{1m}}{\underline{\lambda}_{2m}}+1\right)}$$

Pentru $\delta\to\infty$, pentru puterea aparentă ce intră prin una din fețele laterale se obține un rezultat cunoscut de la efectul pelicular net, respectiv de la semi-spațiul conductor situat în cîmp magnetic armonic : (v. R. Răduleț : Curs de Bazele Electrotehnicii, vol. IV).

$$\underline{P}_a = (1+j)\frac{\alpha_1'}{\sigma_1}\cdot\frac{I^2}{4}h\,l \quad \text{sau}$$

$$\underline{P}_a = (1+j)\frac{\alpha_1'}{\alpha_1}H\,h\,l \quad \text{în care s-a notat } \alpha_1' = \sqrt{\frac{\omega\sigma_1\mu_1}{2}}$$

În adevăr, aplicînd legea circuitului magnetic unui contur dreptunghiular adecuat, rezultă :

$$H_0 l = \frac{I l}{2} \text{ sau } I^2 = 4 H_0^2$$

în care H_0 este valoarea efectivă a cîmpului magnetic la suprafața plăcii. Se obține :

$$P_a = (1 + j) \frac{\alpha_1'}{\alpha_1} H_0^2 h l$$

Puterea activă va fi :

$$P = \mathcal{R}e (P_a) = \frac{\alpha_1'}{\sigma_1} H_0^2 \cdot h \cdot l$$

În afară de aceasta, mai există un schimb de putere și între cele două plăci, prin suprafața de contact, datorită faptului că vectorul lui Poynting în puncte situate pe această suprafață, construit cu ajutorul componentei orizontale E_{x0} a cîmpului electric, își păstrează orientarea (normală la secțiune) atît pentru $x > 0$, cît și pentru $x < 0$. Deoarece secțiunea de contact este mică în comparație cu fețele laterale, puterea schimbată de plăci prin această suprafață se neglijează față de puterea intrată prin suprafețele laterale. Se arată prin calcul, că dacă $\alpha_1 > \alpha_2$, rezultă $S_0 > 0$ și vectorul lui Poynting e dirijat spre $(+ z)$, iar dacă $\alpha_1 < \alpha_2$, modulul vectorului lui Poynting e negativ și deci $S_0 < 0$; în acest caz vectorul lui Poynting e dirijat spre $(- z)$.

Catedra de electrotehnică
Institutul politehnic București

BIBLIOGRAFIE

1. *Remus Răduleț* — Curs de Bazele Teoretice ale Electrotehnicii, vol. IV.
2. *Rîjic* și *Gradstein* — Tabele de integrale, sume serii și produse.
3. *W. Smythe* — Static and dynamic electricity.
4. *R. Holm* — Electric Contacts Handbook.
5. *R. Rüdemberg* — Fenomene transitorii în sistemele electroenergetice.
6. *A. Millea* — Formularea problemelor plan-paralele de efect pelicular.

ÎNTREPRINDEREA POLIGRAFICĂ „GRAFICA NOUĂ" II, BUCUREȘTI — c. 10815

MŰSZAKI KÖNYVTÁR DOKUMENTÁCIÓS KÖZPONT 1963

INDICAȚII REDACȚIONALE

Manuscrisele vor fi prezentate în două exemplare, dactilografiate la două rînduri și colaționate de autor. Relațiile matematice și formulele se vor scrie cît mai clar, cu cerneală.

Desenele și graficele vor fi executate în tuș negru pe hîrtie de calc, numerotate și prezentate separat cu un borderou cuprinzînd nr. curent și legenda fiecărei figuri. Locul figurilor se va indica în text. Scrisul pe figuri va fi cel standardizat.

În continuarea textului, pentru fiecare exemplar se va da bibliografia de referință și, pe cîte o foaie separată de hîrtie, cîte un rezumat, în limbile: rusă, franceză, germană și engleză. La bibliografie se va indica în mod obligatoriu: numele și inițialele de prenume ale autorului, titlul și volumul lucrării, editura, locul și anul apariției, sau periodicul în care a apărut, volumul, anul, pagina inițială și finală a articolului.

Bibliografia se va întocmi în ordinea de citare în text și se va numerota curent. Referințele la bibliografie se vor face în text prin indicarea numărului de ordine al lucrării, încadrat în paranteze drepte, de exemplu [5].

Întreaga responsabilitate pentru exactitatea calculelor, datelor experiențelor și afirmațiilor științifice revine numai autorilor. Conducerea revistei își rezervă dreptul de a nu publica materialele necorespunzătoare.

40820

1999 JUL -8

F 1130

R

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC BUCUREȘTI

TOMUL XXVI FASCICOLA 4 ANUL 1964
IULIE—AUGUST

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC BUCUREŞTI

apare, cu şase fascicole pe an, în continuarea vechilor periodice ştiinţifice : „Bulletin de Mathématiques et de Physique pures et appliquées" şi „Buletinul Politehnicei din Bucureşti".

Organizat pe baze noi, el reflectă în primul rînd activitatea ştiinţifică a corpului didactic din Institutul politehnic Bucureşti. În limita spaţiului disponibil, se pot publica şi lucrări ştiinţifice ale colaboratorilor din afara institutului.

Corespondenţa şi schimburile de publicaţii cu redacţia şi administraţia Buletinului se fac pe adresa :

INSTITUTUL POLITEHNIC BUCUREŞTI
CALEA GRIVIŢEI 132
(cu menţiunea „pentru Buletinul Institutului")

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC BUCUREŞTI

издаётся в шестых годовых выпусках являясь продолжением прежних научных периодических журналов „Bulletin de Mathématiques et de Physique pure et appliquées" и „Buletinul Politehnicei din Bucureşti".

Составленный на новых основах, он отражает в первую очередь научную деятельность преподавательского состава Бухарестского Политехнического Института. Б пределах возможностей будут опубликованы и научно-исследовательские работы и внеинститутсклк сотрудников.

Переписка и обмен периодическими изданиями с редакцией и руководством Бюллетеня производятся по адресу :

INSTITUTUL POLITEHNIC BUCUREŞTI
CALEA GRIVIŢEI 132
(с указанием „pentru Buletinul Institutului")

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC BUCUREŞTI

est une publication, continuant les anciens périodiques scientifiques : „Bulletin de Mathématiques et de Physique pures et appliquées" et „Buletinul Politehnicei din Bucureşti".

Tel qu'il se présente, il reflète en premier lieu l'activité scientifique du corps didactique de l'Institut Polytechnique de Bucarest. On pourra y ajouter aussi, dans la limite des possibilités, les travaux des collaborateurs qui n'appartiennent pas à l'institut.

L'adresse pour la correspondance et les échanges de publications est :

INSTITUTUL POLITEHNIC BUCUREŞTI
CALEA GRIVIŢEI 132
(avec la mention „pentru Buletinul Institutului")

ORSZÁGOS MŰSZAKI KÖNYVTÁR ÉS DOKUMENTÁCIÓS KÖZPONT 1963

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC BUCUREŞTI

TOMUL XXVI — FASCICOLA 4

IULIE—AUGUST
1964

COMITETUL DE REDACȚIE

Prof. Dr. *I. Agîrbiceanu*, membru corespondent al Academiei R.P.R.; Prof. Dr. *I. S. Antoniu*, membru corespondent al Academiei R.P.R.; Acad. Prof. *M. Bercovici*; Prof. Dr. *E. Bratu*, membru corespondent al Academiei R.P.R.; Prof. *Gh. Buzdugan*, membru corespondent al Academiei R.P.R.; Acad. Prof. Dr. *E. Carafoli*; Conf. *S. Călin*, cand. St. Th.; Acad. Prof. Dr. *D. Dumitrescu*; Conf. *I. Grădișteanu*, cand. St. Ec.; Prof. *C. Ionescu-Bujor*; Prof. Dr. *Gh. Manea*, membru corespondent al Academiei R.P.R.; Prof. *N. Manolescu*; Prof. *St. Mantea*; Prof. *N. Marinescu*, cand. St. Th.; Acad. Prof. Dr. *C. Nenițescu*; Prof. *C. Penescu*, membru corespondent al Academiei R.P.R.; Prof. *M. Postelnicescu*; Acad. Prof. Dr. *R. Răduleț*; Prof. *Al. Rău*; Prof. *Al. Spătaru*; Prof. *L. Stoicescu*; Prof. *I. Zăgănescu*.

Redactor responsabil: Prof. *C. Dinculescu*
Membru corespondent
al Academiei R. P. R.

Sumar

ȘTIINȚE SOCIALE

Sabin Antonescu

Aspecte ale dezvoltării economiei Romîniei în perioada 1944—1964 . 17

D. Rebuşapcă, R. Soare, Gh. Maşală, Gh. Petcu, I. Hristache

Industria constructoare de maşini — creaţie a regimului democrat-popular în ţara noastră 29

MATEMATICĂ

П. А. Муравьев

Одно обобщение преобразования Лапласа-Карсона и его применение к решению линейных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами 39

Mihail St. Botez

Uber die Axiale Darstellung des vierdimensionalen Raumes . . . 51

I. M. Miu

Sur un théorème de Sturm 59

CHIMIE ANORGANICĂ

Gh. Teodorescu, I. Niculescu, F. Popescu, A. M. Iancu

Metode de dozare rapidă a galiului, indiului şi taliului 67

TEORIA VIBRAŢIILOR

Gy. Ludvig

Demonstration von Schwingungstechnischen Erscheinungen mit Hilfe von Analogrechnern 73

ELECTROTEHNICĂ

M. Preda, P. Cristea

Calculul reţelelor complexe pe baza generalizării unor teoreme din teoria reţelelor electrice pentru ansambluri de multipoli activi 85

ELECTRONICĂ

Ed. Nicolau

Asupra undelor plane neomogene 115

MAŞINI TERMICE

B. Grünwald

Influenţa zonei de ardere din flacăra turbulentă asupra fenomenului de dispersiune ciclică din motorul cu aprindere prin scînteie 121

CENTRALE ELECTRICE

C. Wlezek

Influenţa structurii consumului de căldură asupra căldurii livrate în termoficare şi coeficientul de termoficare 135

Резюме

С. Антонеску Д. К. 33 (R) „1944/1961"

Развитие экономики Румынии за период 1944—1964

Раньше Румыния была страной с отсталой экономикой, со слабо и односторонне развитой промышленностью, с раздробленным и малопроизводительным сельским хозяйством, что определяло пониженный уровень жизни.

За последние 20 лет достигнуты большие успехи в создании и развитии мощной промышленности, передового производительного сельского хозяйства, повышении производительности труда и жизненного уровня.

Значительные преобразования произошли и в объеме и структуре внешней торговли. Румыния поддерживает торговые связи с 85 странами и вносит важный вклад в осуществление мирного сосуществования.

Быстрое и многостороннее развитие страны является выражением правильности политики Румынской Рабочей Партии, плодом творческой и созидательной деятельности трудолюбивого и талантливого румынского народа.

Buletinul Institutului politehnic Bucureşti, Tom. XXVI, fasc. 4/964.

К. Д. 338 (R) —02

О. Ребушапка, Р. Соаре, Г. Машала, Г. Петку, И. Христаке

Машиностроительная промышленность — создание народно-демократического строя нашей страны

Вначале авторы показывают, что в буржуазно-помещичьей Румынии не существовало отрасли машиностроительной промышленности. Затем они указывают, что усилиями всего трудового народа эта отрасль была создана в условиях народно-демократического строя.

С этой целью проанализирован ряд показателей, как например: динамика производства машиностроительной промышленности и различных ее отраслей, удельный вес ее в промышленном производстве страны, покрытие вложений в оборудование и инструменты отечественного производства, развитие вывоза главных изделий машиностроительной промышленности и т. д.

Buletinul Institutului politehnic Bucureşti, Tom. XXVI, fasc. 4/964.

П. А. Муравьев Д. К. 517.9

Одно обобщение преобразования Лапласа-Карсона и его применение к решению линейных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами.

В первой части работы автор исследует преобразование:

$$F(p) = p \int_a^b e^{-p\int_a^x \frac{du}{\alpha(u)}} \varphi(x) \frac{dx}{\alpha(x)},$$

где p есть сложный параметр, устанавливающий свойства, общепринятые при вычисления.

Во второй части работы автор использует полученные результаты в дифференциальных уравнениях высшей степени, в линейных дифференциальных уравнениях, в неоднородных дифференциальных уравнениях, с неоднородными коэффициентами с данными начальными условиями. Также подробно изучаются линийные дифференциальные уравнения второй степени.

Buletinul Institutului politehnic Bucureşti, Tom. XXVI, fasc. 4/964.

Summary

D.C. 33(R) „1944/1964"

S. Antonescu

Glimpses on of the Development of Rumania's Economy During the 1944—64 Period.

Rumania was formerly a country with a backward economy, a poorly and unilaterally developed industry, an unproductive agriculture scattered in small plots of land — which resulted in low standards of living.

During the last twenty years, great successes have been scored in creating and developing a powerful industry, an advanced agriculture, in increasing production and labour productivity, in improving living standards.

Important changes have likewise occurred in the volume and structure of foreign trade. Rumania has trading relations with 85 countries and makes an important contribution to peaceful coexistence.

The country's rapid, all-round development demonstrates the correct policy of the Rumanian Workers'Party and is the fruit of the creative endeavour of the industrious and talented people of Rumania.

Buletinul Institutului politehnic Bucureşti, Tom. XXVI, fasc. 4/964.

D.C. 338(R) — 02

D. Rebuşapcă, R. Soare, Gh. Maşală, Gh. Petcu, I. Hristache

Machine Building Industry — the Creation of the Popular Democratie Regime of our Country

After pointing ont that in the bourgeois-landlord Rumania there was no branch of machine binlding industry, the author demonstrates how, by the steady utmost efforts of the whole working people, this branch was created in the popular democratic regime's conditions.

A series of indices are, analysed in this aim, such are: the dynamics of machine building industry production and its branches, its importance in the country's industrial ontput, the covering of the equipment and tool investments for the internal production, the development of the main machine building industry products.

Buletinul Institutului politehnic Bucureşti, Tom. XXVI, fasc. 4/964.

D.C. 517.9

R. A. Muraviev

A Generalisation of the Laplace-Carson Transformatibn with Applications to the Solving of the Liniar Differential Equaations with Variable Coefficients

In the first part of the work the author studies the transformation:

$$F(p) = p \int_a^b e^{-p \int_a^x \frac{du}{\alpha(u)}} \varphi(x) \frac{d\,x}{\alpha(x)}$$

where p is a complex parametre, establishing properties which accur frequently in operational computing. In the second part of the work, the author uses the results he obtained for differential equations of superior order — liniar and unhomogenous — with variable coefficients in initially given conditions.

The work studies in detail the liniar differential equations of II rate.

Buletinul Institutului politehnic Bucureşti. Tom. XXVI, fasc. 4/964.

Д. К. 515

М. Ботез

К некоторой осевой проекции четырехразмерного пространства.

Приняв три копланарные оси автор нашёл плоскую модель четырёхразмерного пространства, которое может быть графически изображено. Обнаружено, что точка изображается тремя точками; прямая — треугольником; плоскость — группой состоящей из трех прямых пересекающихся в точке являющейся следом плоскости данной на плоскости чертежа, а S_3 — прямой треугольником. Также найдено условие при котором данная точка может быть отнесена к какому-либо пространству.

Buletinul Institutului politehnic Bucureşti, Tom. XXVI, fasc. 4/964.

Д. К. 517.9

И. М. Миу

Относительно теоремы Штурма

В этой работе автор дает методы отделения действительных корней алгебраического уравнения, исходя из теоремы Штурма. В этом смысле используется теорема автора, которая вместе с теоремой Штурма очень упрощает расчеты, которые были бы необходимы лишь при применении метода Штурма. Также дается метод, который вытекает из теоремы Штурма и Ролле.

Buletinul Institutului politehnic Bucureşti, Tom. XXVI, fasc. 4/964.

Д. К. 66.028 : 546.681 : 546.68 : 546.683.3

Гр. Теодореску, И. Никулеску, Ф. Попеску, А. М. Ианку

Бюстрые методы анализа *Ga, In, Tl*

В настоящей работе были исследованы условия объёмной дозировки галлия, индия, таллия, в отдельности и в смеси.

При этом был использован метод комплексонометрической дозировки, имеющий по сравнению с классическими методами то преимущество, что дает возможность определять один компонент в присутствии остальных. Кроме того, метод является быстрым и точным.

Buletinul Institutului politehnic Bucureşti, Tom. XXVI, fasc. 4/964.

Д. К. 621.37

Г. Лудвик

Доказательство технических колебательных явлений при помощи аналогичных счётчиков

В целях модернизации преподавания теории колебаний, расчет М.Н. 7 в высших учебных заведениях, кафедра „Теоретической механики“ Будапештского технического Университета была оснащена прибором для переключения по программе. При помощи вышеуказанного прибора в очень короткое время можно осуществить следующие колебательные узуальные движения; неугашенные колебания; колебания со слабым или сильным угашением; самовозбуждающие колебания; биения; принудительные колебания со слабой и вязкой амортизацией, осуществленные вблизи резонанса (под т над резонансом) как и на резонансе: колебания с сухим трением; осуществление фигур Лиссажу.

В работе приводится электрическая схема переключателя с программой, представленные 12 фотографий показывают полученные изображения на экране осцилоскопа.

Buletinul Institutului politehnic Bucureşti, Tom. XXVI, fasc. 4/964.

D.C. 515

M. Botez

On Axial Representation of the 4-Dimensional Space

Considering three Coplanar axes, the author finds a plane model of a space with 4 dimensions susceptible of being expressed graphically. It is found that the image of a point is a tripoint; of a straight line — a trilinear; of a plane, a group a 3 straight lines meeting in a point that is the trace of the given plane on the table plane and of S_3 is a straight line and a trilinear. The condition that a point should belong to a space has also been found.

Buletinul Institutului politehnic Bucureşti, Tom. XXVI, fasc. 4/964.

D.C. 517.9

I. M. Miu

On Sturm's Theorem

In this paper the author gives methods for separating the real rules of an algebraic equation, starting from Sturm's theorem.

To the same effect is used the author's theorem which, together with Sturm's theorem, simplifies very much the calculus needed when applying solely Sturm's theorem and Rolle's theorem is alsogiven

Buletinul Institutului politehnic Bucureşti, Tom. XXVI, fasc. 4/964.

D.C. 66.028 : 546.681 : 546.68 : 546.683.3

Gr. Teodorescu, I. Niculescu,
F. Popescu, A. M. Iancu

Rapid Analysis Methods of Gallium, Indium and Talium

In the present work have been studied the conditions of volumetric determination in gallium, indium and talium, free and mixed up.

There were applied methods of complexonometric determination being more profitable in comparison with the classical methods as they offer an opportunity to determine a compound in the presence of the other ones. So much the more as this method is a rapid and precise one.

Buletinul Institutului politehnic Bucureşti, Tom. XXVI, fasc. 4/964.

D.C. 621.37

Gy. Ludvig

The Demonstration of the Technical, Oscillations Phenomena by Means of Analog Computers

In order to modernize the teaching of vibration theory notion in the high education, the M. N. 7 type of calculus of the Technical Mechanics chair of the Budapest Technical University, was supplied with a switching-over device with a set programme. With this device, the following common vibrator motions may be performed in a very short time: undamped vibrations, with a weak or strong damping, selfexcited vibrations, strokes, forced vibrations with a weak viscous damping, performed in the vicinity of resonance (below and above the resonance) as well as the resonance; vibrations with dry rubbing, the working out of Lissajou figures.

Within the paper is given the electric diagram of the programmed commutator, the 12 photos show the pictures obtained on an oscilloscope screen.

Buletinul Institutului politehnic Bucureşti, Tom. XXVI, fasc. 4/964.

Д. К. 621.316 : 621.372.6

М. Преда, П. Кристеа

Расчет сложных сетей на основе обобщения некоторых теорем теории электрических сетей для активных многополюсных узлов

Изучение работы транспортных электрических сетей и изучение сложных схем, применяемых в современных автоматических установках требуют решения некоторых систем уравнения с большим неизвестным числом — с десятками и даже с сотнями неизвестных. Имея в виду применение счетных машин при определении матрицы переходных импедансов и при решении вышеуказанных систем уравнений; работа имеет целью синтез матрицы переходных импедансов и решение систем на основе разложения на подсистемы.

С этой целью обобщается теорема Тевенина и Нортона для активных многополюсных узлов, устанавливая общие матричные уравнения, которые распространяют методы контурных токов и потенциалы узлов для активных многополюсных узлов.

Предлагаемый метод расчета способствует систематизации и упрощению расчетов сложных электрических сетей.

Buletinul Institutului politehnic Bucureşti, Tom. XXVI, fasc. 4/964.

Д. К. 621.3.02

Ед. Николау

О неоднородных электромагнитных волнах

Доказывается, что в однородном, безконечных и де потерях средах не существуют неогнородных электромагнитных волн.

Buletinul Institutului politehnic Bucureşti, Tom. XXVI, fasc. 4/964.

Д. К. 621.43

Б. Гринвальд

Влияние зоны горения турбулентного пламени на явление цикличной дисперсии двигателя с искровым зажиганием

В работе дается новое обьяснение явления цикличной дисперсии, двигателя с искровым зажиганием. Опытные данные подтверждают предположение, что флюктуации давления могут быть вызваны изменчивым характером заднего горения фронта зажигания, определяемого зажиганием и последовательным затуханием элементов обьемной смеси. Отсюда вытекают практические пути действия для сокращения степени цикличной дисперсии.

Buletinul Institutului politehnic Bucureşti, Tom. XXVI, fasc. 4/964.

К. Влезек Д. К. 697 34

Влияние структуры потребления тепла на отпускаемое в теплофикационном режиме тепло и на коэффицент теплофикации

В настоящей работе пересматриваются технико-экономические показатели теплофикации ($\alpha_{час}$, $\alpha_{год}$, T, $T_{пик.}$ и т.д.) в условиях изменения структуры городского потребления тепла и выявляется значение роста потребления тепла, идущего на приготовление воды для горячего водоснабжения.

Приведенные формулы и диаграммы позволяют произвести расчет количества отдаваемого по теплофикации тепла при различной структуре потребления тепла, учитывая значение часовой тепловой нагрузки „q“ и структуру потребления тепла.

Buletinul Institutului politehnic Bucureşti, Tom. XXVI, fasc. 4/964.

D.C. 621.316 : 621.372.6

M. Preda, P. Cristea

The Calculus of Complex Networks Based on the Generalization of some Theorems, Belonging to the Electrical Network Theory for the Active Multi-pole Assembly

The study of the operation of transporting electrical networks and the study of complex diagrams used in modern automation plants require the solution of some equation systems with a great number of tens and even hundreds of unknowns. Considering the use of computers for determining the transfer impedance matrix and for solving the above-mentioned equation systems, the paper aims at giving the synthesis of the transfer impedance matrix and the solving of the systems on the basis of the breakingup into subsystems. In this aim, Thévenin and Norton's theorems are generalized for the active multipoles assemblies, establishing general matrix equations, extending the methods of contour currents and of the node potentials for active multi-pole assemblies.

The method proposed contributes to the systematization and simplification of complex electrical network calculus.

Buletinul Institutului politehnic Bucureşti, Tom. XXVI, fasc. 4/964.

D.C. 621.3.02

Ed. Nicolau

On inhomogeneous electromagnetic waves

It is shown that in homogeneous endless media in which the conductivity is $\sigma = 0$, it is not possible to have inhomogeneous electromagnetic waves.

Buletinul Institutului politehnic Bucureşti, Tom. XXVI, fasc. 4/964.

D.C. 621.43

B. Grünwald

The Influence of the Burning Range of the Turbulent Flame upon the Cyclic Dispersion Phenomenon in the Spark Ignition Motor

A new explamation of the cyclic dispersion phenomenon in the spark ignition motor is shown in this work. The experimental data confirm the presumption that the pression fluctuations may be caused by the aleatory feature of the ignition at the back of the ignition front, determined by the successive ignition and extinction of the bleneting volum of the units ; hence, practical driving ways result for cutting down the rate of cyclic dispersion.

Buletinul Institutului politehnic Bucureşti, Tom. XXVI, fasc. 4/964.

D.C. 697.34

C. Wlezek

Influence of the Heat Consumption Structure upon the Heat Output for District Heating and upon the-District Heating Coefficient

The technical and economical indices of district heating (h, an, T, Tv, etc.) are reconsidered when changing the structure of district heating consumption underlining the importance of heat consumption increase for hot water for domestic purposes.

The included formulas and diagrams allow the calculation of the heat output for district heating in case of various structures of heat consumption, the value of the urban thermal load per hour „q" and the structure of the heat consumption being known for the conditions existing in Rumania.

Buletinul Institutului politehnic Bucureşti, Tom. XXVI, fasc. 4/964.

Résumé

S. Antonescu C.D. 33(R) „1944/1964"

Certains aspects du développement de l'économie roumaine pendant la période 1944—1964.

La Roumanie était naguère un pays ayant une économie rétrograde, une faible industrie unilatéralement développée, une agriculture peu productive-divisée en lopins de terre. La conséquence en était un niveau de vie très bas.

De grand succès ont été obtenus durant les dernières vingt années en ce qui concerne la création et le développement d'une industrie puissante, d'une agriculture avancée, dans l'augmentation de la production et de la productivité du travail, dans le relèvement du niveau de vie.

D'importants changements ont également eu lieu dans le volume et la structure du commerce extérieur.

La Roumanie a des liens commerciaux avec 85 pays et contribue considérablement à la réalisation de la co-existence des deux systèmes.

Le développement rapide et multilatéral du pays est l'expression de la justesse de la politique du Parti Ouvrier Roumain, le résultat de l'activité créatrice et du talent de l'industrieux peuple de Roumanie.

Buletinul Institutului politehnic Bucureşti, Tom. XXVI, fasc. 4/964.

C.D. 338(R)—02

D. Rebuşapcă, R. Soare, Gh. Maşală, Gh. Petcu, I. Hristache

L'industrie constructrice de machines, — création du régime Démocrate-Populaire de notre pays.

Après avoir montré que dans la Roumanie de l'ancien régime il n'y avait pas une branche de l'industrie constructrice de machines, les auteurs démontrent comment par l'effort soutenu de tout notre peuple travailleur, on a crée cette branche dans les conditions, du régime Démocrate Populaire.

Dans ce but on analyse une série d'indices: la dynamique de la production de l'industrie des constructions de machines et de ses sousbranches, son poids dans la production industrielle du pays, le recouvrement des investissements en outillage et instruments de la production interne, l'évolution de l'export des principaux produits de l'industrie des constructions de machines, etc.

Buletinul Institutului politehnic Bucureşti, Tom. XXVI, fasc. 4/964.

R. A. Muraviev C.D. 517.9

Une généralisation de la transformation de Laplace-Carson ayant des applications à la solution des équations différentélles linéaires aux coefficients variables.

Dans la première partie de son travail, l'auteur etudie la transformation

$$F(p) = p \int_a^b e^{-p \int_a^x \frac{du}{\alpha(u)}} \varphi(x) \frac{dx}{\alpha(x)}$$

où p est un paramètre complexe, établissant des propriétés que l'on trouve couramment dans le calcul opérationnel.

Dans la deuxième partie du travail, l'auteur utilise les résultats obtenus pour des équations différentielles supérieures linéaires, non homogenes, aux coefficients variables dans des conditions initiales données. On procède à une étude approfondie concernont les équations différentielles linéaires de deuxième ordre.

Buletinul Institutului politehnic Bucureşti, Tom. XXVI, fasc. 4/964.

Zusammenfassung

S. Antonescu D.K. 33(R) „1944/1964"

Überblick über die Entwicklung der Wirtschaft Rumäniens zwischen 1944—1964.

Rumänien war vormals ein Land mit einer zurückgebliebenen Wirtschaft, einer schwachen, einseitig entwickelten Industrie, einer zerteilten und wenig produktiven Landwirtschaft. — Die Folge war ein sehr niedriges Lebensniveau.

In der Gründung und Entwicklung einer kräftigen Industrie, einer fortgeschrittenen Landwirtschaft, sowie in der Steigerung der Produktion, der Arbeitsproduktivität und des Lebensniveau, wurden in den letzten zwanzig Jahren grosse Erfolge erzielt.

In dem Umfag und der Struktur des Aussenhandels sind ebenfalls wichtige Änderungen eingetreten.

Rumänien hat Handelsbeziehungen mit 85 Länder und trägt viel zur Verwirklichung der Koexistenz der zwei Weltsysteme bei.

Die schnelle, vielseitige Entwicklung des Landes ist der Ausdruck der Richtigkeit der Politik der Rumänischen Arbeiterpartei, das Resultat der schöpferischen Tätigkeit des fleissigen und begabten rumänischen Volkes.

Buletinul Institutului politehnic Bucureşti, Tom. XXVI, fasc. 4/964.

D.K. 338(R) — 02

D. Rebuşapcă, R. Soare, Gh. Maşală, Gh. Petcu, I. Hristache

Die Maschinenbauindustrie — Schöpfung des volksdemokratischen Regims unseres Landes

Nachdem die Verfasser zeigen, dass in Rumänien zur Zeit des bürgerlich-gutsherrlichen Regimes kein Zweig der Maschinenbauindustrie existiert hat, wird erläutert wie durch die beharrlichen Anstrengungen unseres gesamten arbeitenden Volkes, dieser Zweig in den Verhältnissen des volksdemokratischen Regims gegründet worden ist.

Zu diesem Zwecke werden eine Reihe Indikatoren analysiert, so: die Produktionsdynamik der Maschinenbauindustrie und ihrer Unterzweige, deren Schwergewicht in der industriellen Produktion des Landes, die Deckung an Ausrüstungen und Instrumenten aus inländischer Produktion, die Entwicklung des Exportes der wichtigsten Erzeugnisse der Maschinenbauindustrie, usw.

Buletinul Institutului politehnic Bucureşti, Tom. XXVI, fasc. 4/964.

R. A. Muraviev D.K. 517.9

Eine Verallgemeinerung der Laplace-Carson'schen Umwandlung mit Anwendungen zur Lösung der liniären Differentialgleichungen mit veränderlichen Koeffizienten

Im ersten Teil der Arbeit studiert der Verfasser die Umwandlung

$$F(p) = p \int_a^b e^{-p \int_a^x \frac{du}{\alpha(u)}} \varphi(x) \frac{dx}{\alpha(x)}$$

wobei p ein komplexer Parameter ist und stellt Eigenschaften welche in der irrationnellen Berechnung üblich sind, fest.

Im zweiten Teil der Arbeit verwendet er die für die liniären nichthomogenen Differentialgleichungen höheren Grades mit in gegebenen Anfangsbedingungen veränderlichen Koeffizienten erhaltenen Ergebnisse. Es wird ein eingehendes Studium für die liniären Differentialgleichungen zweiter Ordnung durchgeführt.

Buletinul Institutului politehnic Bucureşti, Tom. XXVI, fasc. 4/964.

D.K. 515

M. Botez

Uber die axiale Darstellung des vierdimensionalen Raumes

Der Autor zieht drei coplanare Axen in Betracht und findet ein ebenes Modell eines vierdimensionalen Planes, welches graphisch ausgedrückt werden kann. Er findet, dass das Bild eines Punktes ein Dreipunkt ist; das einer Garaden eine Dreilaterale; das einer Ebene eine Gruppe von drei in einem Punkt konkurrenten Geraden, der die gegebene Spurebene auf der Ebene des Bildes ist und einer S_3 ist eine Gerade und eine Dreilatere. Er fand ebenfalls die Bedingungen, dass ein Punkt einem Raum angehöre.

Buletinul Institutului politehnic Bucureşti, Tom. XXVI, fasc. 4/964.

D.K. 517.9

I. M. Miu

Über ein Theorem von Sturm

In dieser Arbeit gibt der Verfasser Methoden für die Trennung der reellen Wurzeln einer algebraischen Gleichung, vom Sturm'schen Theorem ausgehend, an. In diesem Sinne wird ein Theorem des Verfassers angewendet, welches zusammen mit dem Sturm'schen Theorem die Berechnungen,die bei alleiniger Anwendung desselben nötig wären, viel vereinfachen. Ebenfalls wird eine Methode, die sich aus dem Sturm'schen Theorem und dem Theorem von Rolle ergibt, angegeben.

Buletinul Institutului politehnic Bucureşti, Tom. XXVI, fasc. 4/964.

D.K. 66.028 : 546.681 : 546.68 : 546.683.3

Gr. Teodorescu, I. Niculescu.
F. Popescu, A. Iancu

Rasche Analysenmethode für Gallium, Indium und Tallium

In vorliegender Arbeit wurden die Bedingungen einer volumetrischen Bestimmung des Galliums, Indiums und Talliums, frei und in Zusammensetzung studiert.

Angewandt wurde eine komplexonometrische Bestimmungs-Methode, welche den klassischen Methoden gegenüber Vorteile aufweist und die Bestimmung eines Komponente im Beisein der anderen ermöglicht. Ueberdies ist die Methode rapid und genau.

Buletinul Institutului politehnic Bucureşti, Tom. XXVI, fasc. 4/964.

Gy. Ludvig D.K. 621.37

Demonstration von Schwingungstechnischen Erscheinungen mit Hilfe von Analogrechnern

Zum Zwecke der Modernisierung der Lehre über die Begriffe der Schwingungstheorie im Hochschulunterricht, wurde die Rechnung vom Typ M.N.7 des Katheders für Technische Mechanik des Technischen Universität Budapest mit einer Schaltvorrichtung nach Programm versehen. Mit Hilfe derselben kann man in sehr kurzer Zeit folgende übliche Schwingungsbewegungen erzeugen: ungedämpfte Schwingungen; Schwingungen mit schwacher oder starker Dämpfung; selbstexzitierte Schwingungen; Schläge; gezwungene (bedingte) Schwingungen mit schwacher zäher Dämpfung, die in der Nähe der Resonanz (unter und über der Resonanz) wie auch in der Resonanz erzielt werden; Schwingungen mit trockener Reibung; Ausführung von Lissajou Figuren.

Im Rahmen der Arbeit wird das elektrische Schema der Schaltung nach Program angegeben; die 12 Photographien stellen die auf dem Schirm eines Oszilloskops erhaltenen Bilder dar.

Bu'etinul Institutului politehnic Bucureşti, Tom. XXVI, fasc. 4/964.

C.D. 515

M. Botez

Sur une représentation plane axiale de l'espace à quatre dimensions.

En considérant trois axes coplanaires, l'auteur trouve un modèle plan d'être représenté graphiquement. On trouve que l'image d'une droite, un trilatère ; l'image d'un plan, un groupe de trois droits concurrentes dans un point, qui est la trace du plan respectif sur le plan du tableau ; l'image d'un S_3 est une droite et un trilatère. On a aussi trouvé la condition pour qu'un point appartienne à un espace.

Buletinul Institutului politehnic Bucureşti, Tom. XXVI, fasc. 4/964.

C.D. 517.9

I. M. Miu

Sur un théorème de Sturm

Dans cet ouvrage l'auteur indique des moyens pour la séparation des radicaux réels d'une équation algébrique, en partant du théorème de Sturm. En ce sens on emploie un théorème de l'auteur qui, avec le théorème de Sturme, simplifie de beaucoup les calculs qui seraient nécessaires en employant seulment le théorème de Sturm. On donne aussi une méthode qui résulte du théorème de Sturm et du théorème de Rolle.

Buletinul Institutului politehnic Bucureşti, Tom. XXVI, fasc. 4/964.

C.D. 66.028 : 546.681 : 546.68 : 546.683.3

Gr. Teodorescu, I. Niculescu.
F. Popescu, A. Iancu

Méthodes rapides d'analyse du gallium, indium et talium

Dans la présente on a étudié les conditions de la détermination volumétrique du gallium, indium et talium, libres et mélangés.

On a employé la méthode de détermination complexonométrique qui présent certains avantages, comparée aux méthodes classiques, et qui permet la détermination d'un composant en présence des autres. En plus, la méthode est rapide et précise.

Buletinul Institutului politehnic Bucureşti, Tom. XXVI, fasc. 4/964.

Gy. Ludvig C.D. 621.37

La démonstratation des phénomènes techniques d'oscillations à l'aide des calculateur analogues.

Dans le but de la modernisation de l'enseignement des notions de théorie des vibrations dans l'enseignement supérieur, le calcul de type M.N.7 de la chaire de Mécanique Technique de l'Université Technique de Budapest, a été donné d'un dispositif de communat on à programme. Grâce à ce dispositif on peut réaliser, dans un très bref délai, les suivants mouvements vibratoires usuels vibrations non-amorties ; vibrations à faible amortissement ou à amortissement puissant ; vibrations auto-excitées ; vibrations forcées à amortissement visqueux, récalisées près de la résonance (au — dessous et au — dessus de la résonance) ainsi qu'à la résonance vibrations à frottement sec ; réalisation de figures Lissajou.

Dans l'ouvrage on donne la schéma électrique du commutateur à programme. Les 12 photographies montrent les images obtenues sur l'écran d'un osscilloscope.

Buletinul Institutului politehnic Bucureşti, Tom. XXVI, fasc. 4/964.

M. Preda, P. Cristea C.D. 621.316 : 621.372.6

Le calcul des réseaux complexes sur le base de la généralisation de certains théorêmes de la théorie des réseaux électrique pour des ensembles multipôles actifs.

L'etude du fonctionnement des réseaux électriques de transport, ainsi que l'étude des schémas complexes utilisés dans les installations modernes automatisés, exige la résolution de certains système d'équations à un grand nombre d'inconnues, des dizaines, voire même des centains.

Etant donnée l'utilisation des machines à calculer pour determiner la motrice des impédances de trasfert et pour résoudre les systèmes d'équations dont on vient de parler, le travail a pour but de donner la synthèse, la motrice des impédances de transfert et d'établir les systèmes en partant de la décomposition en sous-systèmes. Dans ce but, on généralise les théorèmes de Thévenin et Norton, pour des ensembles de multipôles actifs, en établissant des équation matricielles générales permettant d'utiliser également les méthodes des courants cicliques el des potentiels des noends pour des ensembles de multipôles actifs.

La méthode de calcul proposée de rendre systématique et de simplifier les calculs des réseaux électriques complexes.

Buletinul Institutului politehnic Bucureşti, Tom. XXVI, fasc. 4/964.

C.D. 621.3.02

Ed. Nicolau

Sur les ondes électromagnétiques non homogènes

On montre que dans les milieux homogènes infinis et dans lesquels la conductivité est $\sigma = 0$, il ne peut pas exister des ondes électromagnétiques nonhomogènes.

Buletinul Institutului politehnic Bucureşti, Tom. XXVI, fasc. 4/964.

C.D. 621.43

B. Grüunwald

L'influence de la zone de combustion de la flamme turbulente sur le fénomène de dispersion cyclique du moteur à allumage par étincelle

L'ouvrage présente une nouvelle explication du phénomène de dispersion cyclique du moteur à allumage par étincelle. Les dates expérimentales confirment la supposition que les fluctuations de pression peuvement être provoquées aussi par le caractère aléatoire de la combustion de derrière le front d'allumage, caractère determinè par l'allumage et l'extinction succesive des éléments du volume de mélange il en résulte des voies pratiques pour actionner en vue de la réduction du degrès de dispersion cyclique.

Buletinul Institutului politehnic Bucureşti, Tom. XXVI, fasc. 4/964.

C.D. 697.34

C. Wlezek

Influence de la structure de la consommation de chaleur sur la chaleur livree par le chauffage a distance et sur le coefficient de chauffage a distance

L'ouvrage réconsidère les indices techniques et économiques du chauffage à distance (h' an' T, Tv etc.) par rapport au changement de la structure de la consomation urbaine de chaleur et souligne l'importance de l'accroissement de la consommation de chaleur pour l'eau chade ménagère dans le chauffage à distance.

Les formules et les diagrammes présentés permettent le calcul des quantité de chaleur livrées pour le chauffage a distance considérant les structures différentes de la consommation de chaleur, la valeur de la charge thermique urbaine horaire „q" et la structure de la consommation de chaleur étant connues pour les conditions existant en Roumanie.

Buletinul Institutului politehnic Bucureşti, Tom. XXVI, fasc. 4/964.

D.K. 621.316 : 621.372.6

M. Preda, P. Cristea

Die Berechnung der Stromnetze auf Grund der Verallgemeinerung einiger Lehrsätze, aus der Theorie der elektrischen Stromnetze für Ensembles von aktiven Multipolen.

Das Studium des Funktionierens der elektrischen Transportstromnetze und das Studium der komplexen, in den modernen Automatisierungsanlagen angewendeten Schemas, erfordert die Lösung von Systemen von Gleichungen mit einer grossen Zahl Unbekannter — zehner und sogar hunderter Unbekannter. Unter Inbetrachtnahme der Verwendung von Rechenmaschinen zur Bestimmung der Übergangsimpedanzmatritze und der Lösung der erwähnten Gleichungssysteme, bezwekt die Arbeit die Synthese der Übergangsimpedanzmatritze unl Lösung der Systeme durch Zerlegung in Untersysteme.

Zu diesem Zwecke werden die Grundsätze von Thévenin und Norton verallgemeinert, indem allgemeine Matritzen-Gleichungen bestimmt werden, welche die Methoden der Randströme und der Knotenpotentiale für Ensembles von aktiven Multipolen, erweitern.

Die vorgeschlagene Rechenmethode trägt zur Systematisierung und Vereinfachung der Berechnungen der komplexen elektrischen Stromnetze, bei.

Buletinul Institutului politehnic Bucureşti, Tom. XXVI, fasc. 4/964.

Ed. Nicolau D.K. 621.3.02

Uber nichthomogene elektromagnetische Wellen

Es wird gezeigt, dass in homogenen unendlichen Medien, in welche es gibt $\sigma = 0$ keine nichthomogene elektromagnetische Welle gibt.

Buletinul Institutului politehnic Bucureşti, Tom. XXVI, fasc. 4/964.

D.K. 621.43

B. Grünwald

Der Einfluss der Verbrennungszone in der turbulenten Flamme auf das Phänomen der zyklischen Dispersion im Motor mit Funkenzündung

In der Arbeit wird eine neue Erklärung des Phänomens der zyklischen Dispersion im Motor mit Funkenzündung gegeben. Die experimentellen Daten bestätigen die Vermutung, dass die Druckschwankungen auch vom aleatorischen Charakter der Verbrennung an der Rückseite der Zündungsfront verursacht werden können, hervorgerufen durch die aufeinanderfolgende Entzündung und Löschung der Volumenelemente des Gemisches.

Hieraus ergeben sich praktische Wege zur Verminderung des Grades der zylischen Dispersion.

Buletinul Institutului politehnic Bucureşti, Tom. XXVI, fasc. 4/964.

C. Wlezek D.K. 697.34

Einfluss der Wärmeverbrauch-Struktur über die für Fernheizung abgegebene Wärme und den Fernheizungsfaktor

Die technisch-wirtschaftlichen Kennziffern der Fernheizung (h, an, T, Tv, etc.) werden unter Berücksichtigung der Änderung der Struktur des städtischen Wärmeverbrauchs von neuem untersucht und es wird die Wichtigkeit des Wärmeverbrauchszuwachses für Hauswarmwasser für die Fernheizung erwähnt.

Die vorgelegten Formeln und Diagramme erlauben die Berechnung der gelieferten Wärmemenge für Fernheizung im Falle verschiedener Strukturen des Wärmeverbrauchs, wobei der Wert der stündlichen Wärmebelastung „q" und die Struktur des Wärmeverbrauchs für Rumänien bekannt sind.

Buletinul Institutului politehnic Bucureşti, Tom. XXVI, fasc. 4/964.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC BUCUREȘTI
Tomul XXVI — 1964, Fascicola 4

ȘTIINȚE SOCIALE

C.Z. 33(R) 1944/1964

ASPECTE ALE DEZVOLTĂRII ECONOMIEI ROMÎNIEI ÎN PERIOADA 1944—1964

SABIN ANTONESCU

În ultimile două decenii Romînia a cunoscut o mare dezvoltare economică — politică — socială — culturală, situîndu-se printre țările lumii care au obținut cele mai mari realizări și care au înfăptuit profunde transformări în toate domeniile activității vieții sociale. Aceste realizări apar într-o lumină și mai evidentă dacă avem în vedere condițiile excepțional de grele în care se găsea economia țării noastre cu douăzeci de ani în urmă : o industrie slab și unilateral dezvoltată, în mare parte ruinată, în stare de nefuncționare ; o agricultură înapoiată, fărămițată, cu una dintre cele mai scăzute producții la h ; o rețea de transporturi dezorganizată și distrusă în mare măsură ; numeroase orașe și centre industriale greu încercate de cel de al doilea război mondial.

De la 23 August și pînă la 9 mai 1945, Romînia a participat cu importante forțe militare la războiul împotriva forțelor armate ale Germaniei fasciste, economia țării noastre furnizînd bunurile materiale necesare.

În anii imediat următori, la greutățile existente s-au mai adăugat încă altele, cum a fost seceta din agricultură în anii 1946 și 1947 și plata datoriilor de război.

Înapoierea economică a Romîniei era exprimată de faptul că producția și consumul la principalele produse erau printre cele mai scăzute din lume. Tot așa și venitul național pe cap de locuitor și productivitatea muncii sociale.

Înapoierea economică a Romîniei determina și înapoierea socială culturală, care se concretiza prin existența unui număr mare de neștiutori de carte, prin existența unor rețele culturale și sanitare foarte puțin dezvoltate.

Romînia se număra printre țările cu mortalitatea cea mai ridicată și cu durata medie de viață printre cele mai reduse. În 1938 aceasta nu depășea 42 de ani.

Starea de înapoiere a țării noastre și în același timp dependența ei economică și politică de unele puteri imperialiste era argumentată

și teoretizată prin cunoscuta teorie că Romînia este o „țară eminamente agricolă".

În ceea ce privește producția globală de energie electrică, țara noastră se găsea în 1938 pe locul 34 în lume, în urma sa situîndu-se numai: Albania, Bulgaria, Cuba, Grecia, Iugoslavia, Portugalia și Turcia.

La extracția de minereu de fier în urma Romîniei se situa numai Bulgaria și Mexicul, iar la producția de fontă Bulgaria, Turcia, Mexicul, Iugoslavia. Cam tot așa stăteau lucrurile și cu alte principale produse industriale: construcția de mașini, oțel, ciment, etc.

Pierderile mari suferite în cel de al doilea război mondial au făcut ca poziția economică în lume a țării noastre să se reducă și mai mult.

Comparativ cu anul 1938, în anul 1946, volumul producției industriale reprezenta 85%, din care grupa A 92%, iar grupa B 79%; construcția de mașini și prelucrarea metalelor 87%, extracția de petrol 64%, metalurgia neferoasă 62% etc.

În 1948, venitul național pe cap de locuitor reprezenta doar 2/3 față de nivelul anului 1938.

Naționalizarea principalelor mijloace de producție a creat condiții favorabile pentru industrializarea socialistă a țării noastre, pentru dezvoltarea rapidă a întregii economii.

Înfăptuind politica marxist-leninistă, elaborată și aplicată de Partidul Muncitoresc Romîn în strînsă dependență cu condițiile concrete ale țării noastre, masele largi au obținut importante succese, într-un timp scurt fiind refăcută economia, trecîndu-se apoi la dezvoltarea acesteia într-un ritm mereu mai înalt.

În anul 1950, industria fusese refăcută — excepție făcînd numai industria petrolieră care producea 87% din producția anului 1938 —, dar cele mai multe ramuri dădeau sporuri de producție: industria constructoare de mașini și prelucrarea metalelor își dublase producția, cea de energie electrică și termică producea mai mult de 2,5 ori, metalurgia feroasă de aproape 2 ori, materiale de construcții de 2,7 ori. etc.

Cu toate acestea ținînd seama de faptul că producția agricolă reprezenta 97% față de cea a anului 1938, și alte ramuri ale economiei nu fuseseră încă refăcute, venitul național atingea în 1950, 99,5% din cel al anului 1938, iar venitul pe cap de locuitor, 95% raportat la același an.

Îndeplinirea cu succes a sarcinilor celor două planuri anuale a însemnat creearea premizelor și creșterea experienței necesare pentru a se trece la înfăptuirea unor sarcini mai mari și mai complexe trasate de P.M.R. și guvernul R.P.R., sarcini concretizate în cele două planuri cincinale, în planul de electrificare și în planul șesenal.

În frunte cu clasa muncitoare și sub conducerea P.M.R. oamenii muncii din țara noastră au construit baza economică și baza tehnico-materială a socialismului, Romînia devenind o țară industrial-agrară înaintată.

Schimbările radicale intervenite în economia țării noastre sînt recunoscute și privite cu interes și stimă de cele mai diferite categorii de oameni din diferite țări și formează obiectul unor comentarii favorabile în conferințe internaționale și organe de presă cu orientare foarte variată.

Un ziar belgian scria la începutul acestui an: „Puține țări au cunoscut în mai puțin de 20 de ani o metamorfoză atît de radicală ca aceea a Romîniei. Făcînd dovada unui dinamism excepțional și a unui efort curajos, această țară a devenit un veritabil stat industrial, în timp ce înainte de război ea era ocupată exclusiv cu cultura solului, a creșterii vitelor, silvicultura și producția de petrol".

Iar Comisia Economică a Națiunilor Unite pentru Europa într-un raport, aprecia în cadrul unui studiu despre economia Romîniei: „Romînia se situează începînd din 1950 în rîndurile economiilor cele mai dinamice din Europa".

Unul din indicatorii sintetici principali, care oglindește deosebit de puternic creșterea potențialului economic al țării noastre, este creșterea continuă a venitului național, care în 1963 era de 3,3 ori mai mare față de anul 1950. În ultimii 13 ani ritmul de creștere a venitului național a fost de circa 10% pe an, în timp ce înainte de 23 August, într-o perioadă de 10 ani (1929—1938), venitul național a crescut cu 9,6%.

În creșterea rapidă a venitului național, rolul hotărîtor l-a avut și-l are înfăptuirea în mod consecvent de către partidul nostru a politicii de industrializare socialistă, care a permis o dezvoltare rapidă și complexă a tuturor celorlalte ramuri ale economiei naționale. Sporirea permanentă a rolului industriei în ansamblul economiei naționale a dus în același timp la construirea bazei tehnico-materiale a socialismului, la importante schimbări în structura și proporțiile economiei naționale.

În politica partidului nostru s-a oglindit și se oglindește în permanență faptul că industria este ramura conducătoare a economiei, de nivelul și gradul tehnic al acesteia depinzînd nivelul și proporția înzestrării tehnice a tuturor celorlalte ramuri ale economiei naționale.

Producția globală industrială în anul 1963 a fost de 5 ori mai mare față de 1950 și 7,4 ori mai mare decît în anul 1938. Dezvoltarea în ritm rapid a industriei a determinat nu numai creșterea volumului venitului național, ci și schimbarea structurii acestuia. În 1963, ponderea industriei în venitul național a fost de 48,1% față de 30,8% în 1938.

Justețea politicii partidului nostru în ceea ce privește dezvoltarea mai departe în ritm rapid a industriei o arată și faptul că în primii patru ani ai șesenalului ritmul creșterii producției industriale a fost de 15%, superior atît ritmului realizat în perioada 1951—1959, cît și celui prevăzut pentru întregul șesenal. Datele pentru anul 1964 de care dispunem arată că ritmul înregistrat în acest an va fi mai mare (circa 16%) față de cel din anii precedenți ai șesenalului.

În 1963 Romînia producea față de anul 1938 mai mult:

— minereu de fier	de aproximativ	16 ori
— cocs metalurgic	„	14 „
— fontă	„	13 „
— oțel	„	10 „
Laminate	„	7 „
energie electrică	„	11 „

Un singur furnal pus în funcțiune la Hunedoara, are o capacitate de producție mai mare decît întreaga producție a anului 1938.

Creșterea producției la principalele ramuri va fi în 1964 față de anul 1963:

— Industria de energie electrică . . 123%
— „ construcția de mașini și prelucrarea metalelor 115%
— „ chimică 123%
— „ ușoară — aproape 110%
— „ alimentară — peste 111%

Este demn de remarcat faptul că producția ce se va realiza în acest an în industria construcțiilor de mașini și în industria lemnului, este mai mare decît nivelul stabilit pentru anul 1965, iar producția industriei metalurgiei feroase, se apropie de prevederile aceluiași an.

Ritmuri înalte de creștere se realizează în acest an și în ramurile industriei producătoare de bunuri destinate consumului individual. Dezvoltarea în ritm sporit a industriei și a întregii economii, impune și pe mai departe dezvoltarea mai rapidă a bazei energetice.

În anul 1964 urmează să fie pusă în funcțiune o putere instalată de circa 650 M.W, ceea ce reprezintă mai mult de 25% din întreaga putere instalată existentă la sfîrșitul anului 1963.

Creșterea cu 25% a producției industriei constructoare de mașini va creea posibilități noi nu numai în ceea ce privește creșterea producției, dar și îmbunătățirea tehnicii și a tehnologiei de producție. Locul deosebit de important al acestei ramuri în ansamblul industrial îl arată și faptul că producția ei reprezintă peste 26% din întreaga producție industrială și asigură circa 75% din nevoile economiei în plină dezvoltare.

În acest an industria chimică va cunoaște unul din cele mai mari ritmuri de creștere. Atenția principală va fi îndreptată în continuare spre mărirea producției petrochimice care asigură chimizarea agriculturii și producția materialelor sintetice, contribuind astfel la lărgirea bazei de materii prime pentru industrie. În perioada 1964—1965 vor intra în funcțiune combinatele de îngrășăminte de la T. Măgurele, Tg. Mureș, Craiova (din cadrul celor 14 uzine chimice complexe), instalația de fibre sintetice de la Săvinești, Uzina de aluminiu de la Slatina, complexul de la Brăila (parțial cu fabricile de celofibră și cord) și multe alte unități.

O trăsătură esențială a dezvoltării industriale a Romîniei este progresul tehnic, rapid și multilateral.

În fiecare an industria românească se îmbogățește cu noi și noi întreprinderi înzestrate cu utilaje dintre cele mai moderne, întreprinderi care aduc o contribuție tot mai mare în dezvoltarea întregii economii naționale. Utilajele moderne și perfecționate dau posibilitatea valorificării mai complexe și superior a resurselor materiale ale țării. Numai în patru ani ai șesenalului, valoarea produselor obținute dintr-o tonă de petrol brut a crescut cu aproape 40%, aceea a produselor rezultate dintr-un metru cub de masă lemnoasă a crescut cu 70%. Folosirea progresului tehnic, corelat cu alți factori, a determinat și creșterea productivității

muncii. În industrie, productivitatea muncii pe un salariat a fost mai mare față de anul 1950, de 1,6 ori, în 1955 de 2,3 ori, și de 2,92 ori în 1963.

Dezvoltarea rapidă a forțelor de producție, promovarea și folosirea largă a progresului tehnic în economie, desăvîrșirea industrializării socialiste a țării, sînt însoțite de o puternică dezvoltare a științei și tehnicii romînești, de perfecționarea continuă a tehnicii moderne și folosirea tot mai largă a acesteia. Tov. Gheorghe Gheorghiu-Dej arată că „oamenii de știință se preocupă ca cercetarea științifică să răspundă cerințelor practice ale dezvoltării social-economice și culturale, să rezolve problemele urgente și de perspectivă ale producției, să dea lucrări la nivelul științei și tehnicii mondiale". Aportul științei romînești este tot mai mare în cele mai diferite ramuri : producerea energiei electrice, în industria petrolului, a construcțiilor de mașini, materialelor de construcție, în cercetări geologice, agricultură, etc.

Dezvoltarea rapidă a industriei, principala ramură în economia țării noastre, a dat un mare avînt și celorlaltor ramuri : transporturile, construcțiile, comerțul, agricultura.

Agricultura Romîniei de altădată era caracterizată printr-o mare înapoiere, în ceea ce privește metodele și uneltele de muncă. În 1945 se mai foloseau încă circa 25.000 pluguri de lemn și 75.000 grape mărăcini. Ea era foarte fărămițată, suprafețele folosite de micii producători cuprindeau peste 20.000.000 parcele, adesea despărțite între ele prin distanțe mari. Productivitatea muncii era de cîteva ori mai mică față de țările cu o economie dezvoltată.

Dacă în 1938 erau folosite circa 4.000 tractoare, în 1963 în agricultura Romîniei socialiste lucrau peste 65.000 tractoare, revenind la un tractor 152 ha, față de 2493 ha în 1938.

Capacitatea mereu sporită ce o are industria noastră de a înzestra întreaga economie, o arată și faptul că numai în perioada 1960—1963, agricultura a fost dotată cu peste 43.000 tractoare, peste 49.000 semănători, peste 50.000 pluguri de tractor.

Transformarea socialistă a agriculturii a permis atît creșterea volumului producției cît și creșterea productivității muncii.

Creșterea producției de cereale față de media anilor 1934—1938, a fost următoarea :

1951 — 1955	216.000 tone	
1956 — 1960	1.170.000 „	
1961 — 1962	2.130.000 „	
1963	700.000 „	față de 1962.

Dacă în 1934—1938, producția medie la ha era de 10,3 chintale la grîu, 10,4 chintale la porumb, în 1963 ea a fost de aproape 13,5 chintale la grîu și 16 chintale la porumb.

In condiții climatice normale, în viitorii ani producția de cereale trebuie să crească considerabil, deasemenea o creștere importantă va cunoaște producția la ha.

La această creștere, o contribuție importantă o va aduce îmbogățirea și îmbunătățirea continuă a bazei tehnice a agriculturii care va dispune în 1965 de 100.000 tractoare, 70.000 semănători, 43.000 secerători-treierători, 2 milioane tone îngrășăminte chimice și 26.000 tone insecticide, funicide și erbicide. Numai în anul 1964, agricultura va primi un număr de peste 10.000 tractoare, aproape 4.000 semănători, 3.000 combine și cu 20% mai multe îngrășăminte minerale față de anul 1963.

Toate acestea vor contribui la sporirea producției agricole pe calea intensivă, dar și suprafețele agricole vor continua să se mărească. Prin executarea de îndiguiri și drenări în lunca Dunării, în acest an se va cîștiga o suprafață de aproape 135.000 ha.

Crearea și dezvoltarea bazei tehnico-materiale și ritmul rapid de creștere a economiei țării noastre, au fost posibile printr-o politică de investiții bine chibzuită.

Iată care a fost dinamica investițiilor :

Anul	*Totalul în lei*
1950	5.663.000.000
1962	34.205.000.000
1963	37.043.000.000

În perioada 1950—1963 volumul investițiilor depășește suma de 252 miliarde lei, din care aproape jumătate au fost făcute în primii 4 ani ai șesenalului.

Cea mai mare parte a investițiilor au fost făcute în industrie, reprezentînd aproape în permanență peste 50% din total :

1950	2.715 miliarde lei
1962	17.179 „ „
1963	19.284 „ „

În perioada amintită investițiile pe principalele ramuri au fost repartizate astfel :

Industrie	132 miliarde lei
Agricultură	40,2 „ „
Transporturile	22,6 „ „

Fonduri importante — care reprezintă mai mult de 1/3 din totalul investițiilor au fost destinate înzestrării ramurilor economiei naționale cu mașini, instalații și utilaje moderne.

Pe măsura lărgirii producției industriale și a perfecționării tehnice a acesteia, productivitatea muncii în industrie care în 1963 a fost aproape de 3 ori mai mare decît în 1950, a devenit o sursă mai puternică de sporire a investițiilor în economia țării noastre.

Realizările mari pe tărîmul producției industriale și agricole au permis o creștere considerabilă a volumului comerțului extern al țării noastre.

Dacă în timpul celui de al doilea război mondial, Germania hitleristă era aproape singurul partener comercial al Romîniei — partener care impunea condiții inegale, înrobitoare, în anii după eliberare, comerțul extern al țării noastre a început să crească atît în volum cît și în sortimente.

În 1960 Romînia era a 36-a putere comercială în lume cu 0,57% din totalul comerțului mondial.

La începutul anului 1964, comerțul extern al țării noastre era mai mare cu 90% față de anul 1959, realizîndu-se aproape încă după acum sarcina prevăzută pentru anul 1965.

Ritmul mediu anual de creștere a comerțului extern este mai mare decît ritmul de creștere a producției industriale, a venitului național și a produsului social.

Iată cum a evoluat dinamic comerțului extern:

Anul	Creșterea față de 1950 în %	Export (în mil. lei)	Import (în mil. lei)
1959	225	3135	3011,8
1962	386	4907,7	5646,7
1963	425	5499,2	6.132

După cum reiese din comparația cifrelor de mai sus, volumul schimburilor comerciale în anul 1963, aproape s-a dublat față de anul 1959, iar față de anul 1948, este de aproape șapte ori mai mare. În ce privește ponderea țării noastre în comerțul mondial, ea a fost triplată față de anul 1948.

Importante schimbări au intervenit în structura geografică a comerțului extern.

Din volumul redus al comerțului extern al anului 1938, mai mult de 4/5 se făcea cu alte țări decît cele din Europa de Est. În 1949, mai mult de 83% din întregul comerț extern, țara noastră îl făcea cu țări socialiste, din care 2/3 cu Uniunea Sovietică. În anii următori a crescut considerabil volumul comerțului extern cu țările socialiste, ajungînd la aproape cinci miliarde lei în 1959 și la opt miliarde lei în 1963.

Un factor principal în dezvoltarea și în viitor a comerțului cu țările socialiste îl constituie coordonarea planurilor economice de perspectivă, care este metoda principală a activității CAER-ului.

Înfăptuind în mod consecvent politica de coexistență pașnică a statelor cu orînduiri sociale diferite, țara noastră a intensificat tot mai mult comerțul cu țările capitaliste, pe baza avantajului reciproc și egalității în drepturi.

Subliniind necesitatea și posibilitatea dezvoltării multilaterale a legăturilor economice cu țările capitaliste, tov. Gheorghe Gheorghiu-Dej arată: „Coexistența pașnică și comerțul internațional sînt strîns legate și se condiționează reciproc. Slăbirea încordării favorizează comerțul în care sînt interesate toate statele, iar dezvoltarea legăturilor economice este un factor al consolidării păcii".

În anul 1964, Romînia întreține relații economice cu aproape 85 de țări, față de numai 29 în 1950. Extinderea legăturilor economice a deter-

minat și o modificare a greutății specifice a comerțului cu țările socialiste și capitaliste.

În anul 1959, greutatea specifică a comerțului cu țările socialiste reprezenta circa 80% din ansamblul comerțului extern, iar cel cu țările nesocialiste reprezenta aproape 1/3. Din acesta 3/4 este făcut cu țările din Europa Occidentală, pe baza acordurilor pe termen lung ceea ce favorizează nu numai stabilitatea ci și creșterea volumului comerțului extern.

Creșterea comerțului extern al Romîniei, a avut următoarea dinamică cu țările capitaliste cu o economie dezvoltată :

Țara	Creșterea în 1963 comparativ cu 1959
R.F.G.	3,1 ori
Anglia	4 „
Austria	3 „
Belgia	9 „
Franța	2,5 „
Italia	5 „
Suedia	3,2 „
Elveția	2 „

Datele de care dispunem privind comerțul extern al țării noastre în prima jumătate a anului 1964, arăta o creștere a volumului acestuia. Și în acest an, țara noastră a întreprins o serie de acțiuni și a răspuns favorabil acțiunilor similare întreprinse de alte țări, de a dezvolta schimbul de mărfuri pe baza avantajului reciproc, cu toate țările care doresc aceasta, indiferent de orînduirea social-economică a acestora.

Din comunicatul comun al delegațiilor guvernamentale a R. P. Romîne și a Statelor Unite ale Americii și Franței, se poate întrevedea o evoluție favorabilă a comerțului între țara noastră, S.U.A., Franța și alte țări cu orînduire socială diferită de cea existentă în țara noastră.

O dezvoltare tot mai mare cunoaște comerțul extern al Romîniei cu țările în curs de dezvoltare. În prezent țara noastră întreține relații economice cu peste 50 de astfel de țări. Comerțul făcut cu acestea, reprezintă aproximativ 1/5 din comerțul nostru cu țările nesocialiste și aproximativ 7% din volumul total al comerțului extern.

Iată cîteva exemple în ceea ce privește creșterea schimburilor cu aceste țări în 1963 față de 1959 :

Țara	Creșterea
India	1,5 ori
Indonezia	3,6 „
Irak	5,5 „
Siria	7,8 „
R.A.U.	1,5 „
etc.	

Posibilitățile mereu sporite în ceea ce privește economia ș comerțul extern al țării noastre sînt făcute tot mai mult cunoscute și prin participarea la numeroase expoziții și tîrguri internaționale. Numai în ultimii 3 ani, Romînia a participat la 67 tîrguri și expoziții, iar în acest an va participa încă la aproximativ 35.

Modificările profunde intervenite în economia țării noastre au determinat importante schimbări în structura comerțului extern. In anul 1938 — anul care a marcat cea mai mare dezvoltare în economia țării noastre —, produsele finite reprezentau 75% din importuri și numai 2% din exporturi. Nu mai puțin de 97% din export era constituit din petrol și produse petroliere, cereale și derivatele lor, semințe, animale vii, lemne.

Industrializarea socialistă a sporit continuu volumul producției industriale, a îmbunătățit continuu calitatea acesteia și odată cu aceasta, creșterea greutății specifice a volumului produselor industriale în exportul făcut de țara noastră.

In 1963 aproape 20% din întregul export îl reprezenta utilajele și mașinile industriale față de mai puțin 1% în 1948. Calitatea și performanțele mașinilor și utilajelor industriei romînești fac ca acestea să fie tot mai căutate pe piața mondială.

Numai în cursul ultimilor 4 ani 1958—1962, țara noastră a exportat :

— 20.134 tractoare
— 1.195 vagoane marfă și cisterne
— 133.099 motoare electrice
— 12.372 transformatori de forță
— 211 escavatoare
— aproape 3.000.000 rulmenți numai în 1960—962.

In anul 1963, țara noastră livrează mașini și utilaje în circa 45 țări (față de 4 în 1951), printre acestea numărîndu-se țări cu industrie dezvoltată ca : Anglia, Cehoslovacia, Italia, Japonia, Uniunea Sovietică.

Incă în 1960, Romînia a întrecut R.F.G., Franța, Anglia, Italia etc. în exportul utilajului petrolier, ocupînd astfel locul trei în lume, după S.U.A. și U.R.S.S.

In ultimii ani am exportat peste 200 instalații de foraj, iar în acest an, la tîrgul de la Leipzig, instalația 3 D.H.200 a primit medalia de aur și este printre cele mai căutate în lume.

Utilajul agricol produs de industria romînească și mai ales tractoarele sînt deosebit de apreciate și sînt exportate în aproape 35 de țări, inclusiv și țări cu o industrie dezvoltată ca : Franța, Belgia, Italia, R. D. Germană, etc. Performanțele superioare ale tractoarelor romînești U 650 și U 651 au făcut ca 27% din întreaga producție să fie destinată exportului.

In perioada 1958—1962, au fost exportate peste 20.000 tractoare iar în 1964, exportul tractoarelor va crește cu circa 40% față de 1962.

Utilajul electrotehnic se exportă în peste 20 de țări, iar vagoanele de marfă și cisternele produse în Romînia sînt foarte căutate, exportul reprezentînd aproape jumătate din întreaga producție.

În ceea ce privește producția siderurgică, în ultimii ani a fost redus simțitor decalajul între importul și exportul de laminate, apropiindu-se de un echilibru, în timp ce exportul de țevi este mai mare decît importul.

Dezvoltarea rapidă și multilaterală a industriei chimice a determinat o creștere însemnată, atît a volumului cît și a sortimentelor producției acestei ramuri. Produsele chimice românești sînt exportate în mai mult de 50 de țări, unele din acestea dispunînd de o dezvoltată industrie chimică ca : R.F.G., Anglia, Italia, Elveția, etc.

Produsele farmaceutice și medicamentele produse în Romînia se exportă în peste 50 de țări. Valoarea producției exportate în ultimii 4 ani a fost de aproape 20 milioane lei devize.

O mare căutare are negrul de fum, soda caustică și soda calcinată, alcoolul etilic, etc.

Importante schimbări au loc și în structura exportului produselor petroliere. Punerea în funcțiune a unor mari și moderne instalații de transformare a petrolului, asigură o valorificare superioară a petrolului și creșterea greutății specifice a produselor obținute printr-o prelucrare bazată pe o tehnică înaltă.

În 1963, valoarea produselor rezultate dintr-o tonă de țiței a crescut cu circa 34% față de 1959. Volumul exporturilor produselor petroliere în ultimii 4 ani depășește media anuală de 6 mil. tone.

În perioada la care ne referim, a crescut mult și exportul produselor lemnoase, îmbunătățindu-se considerabil structura acestuia.

Dacă în 1937 produsele din lemn românesc se exportau în cîteva țări, numărul acestora a crescut la peste 50 în 1963. Odată cu creșterea volumului și valorii, s-a schimbat foarte mult structura produselor exportate.

Produsele finite în acest export care reprezentau în 1950 mai puțin de 14% în totalul exportului, au crescut la 36% în 1961, circa 40% în 1962 și 45% în 1963.

Prin punerea în funcțiune a combinatelor forestiere înzestrate cu tehnica cea mai înaltă, are loc acum într-o măsură tot mai mare valorificarea superioară și mai complexă a masei lemnoase. În anul 1963, dintr-un metru cub de masă lemnoasă, se obțin produse cu o valoare mai mare cu 59% față de cele obținute în anul 1959.

Multe din materialele de construcții fabricate în Romînia au o mare căutare la export. În ultimii 4 ani, media anuală a exportului de ciment a fost mai mare de 1 mil. tone, peste 5 mil. m^2 de geamuri și peste 18 mil. m^2 de carton gudronat. Crește tot mai mult exportul de sare, care a ajuns la aproape 400.000 tone în 1963, față de 136.000 tone în 1958. Romînia dispune de mari resurse de sare de cea mai bună calitate, care ar putea satisface nevoile de consum ale întregii lumi, cel puțin pentru 1 000 ani.

Ca urmare a calității mereu mai bune și varietății sporite, produsele industriei noastre ușoare și alimentare sînt exportate în aproape 50 de țări.

Paralel cu creșterea volumului și modificarea structurii exportului, a crescut volumul și au intervenit schimbări importante în structura importului.

Înfăptuind politica de înzestrare a economiei cu tehnica cea mai înaintată, concomitent cu dezvoltarea și perfecționarea continuă a industriei constructoare de mașini, statul nostru a importat mari cantități de mașini unelte, instalații dintre cele mai perfecte. O creștere mai mare a cunoscut utilajul minier, metalurgic, electrotehnic, energetic, chimic, pentru telecomunicații, industria textilă, confecții, etc. Valoarea acestor utilaje reprezintă mai mult de 25% din valoarea importurilor, iar din aceasta, aproape 70% reprezintă importurile de utilaje și materiale pentru întreprinderi complete.

Creșteri însemnate au cunoscut și importurile de bunuri de consum industrial cu durată mai lungă și alte bunuri de consum importate din țări capitaliste, precum și produse naturale și materii prime importate din țările în curs de dezvoltare.

Aplicînd consecvent principiul coexistenței pașnice, Republica Populară Romînă aduce a importantă contribuție în dezvoltarea legăturilor comerciale cu toate țările lumii, a cooperării economice între țări diferite. Țara noastră se bucură de un prestigiu tot mai mare pe plan internațional nu numai pentru numeroasele inițiative constructive și realiste în politica externă, ci și pentru poziția deosebit de activă privind ajutorarea multilaterală a țărilor în curs de dezvoltare.

La recenta Conferință a O.N.U. pentru comerț și dezvoltare ce s-a ținut la Geneva, șeful delegației Romîne a exprimat astfel poziția guvernului Romîniei privitoare la relațiile comerciale cu țările în curs de dezvoltare: „Delegația română va sprijini măsurile care năzuiesc spre îmbunătățirea raporturilor de schimb de pe piața mondială în favoarea țărilor în curs de dezvoltare, la stabilizarea prețurilor materiilor prime, la stimularea exporturilor acestora, la lărgirea debușeelor pentru produse finite și semifinite ale țărilor în curs de dezvoltare, acordarea de către țările industriale dezvoltate a unor regimuri preferențiale pentru produsele țărilor în curs de dezvoltare, la îmbunătățirea finanțării internaționale și asigurarea de mecanisme internaționale adecvate acestui scop".

Țara noastră a acordat și pînă acum sprijin pentru dezvoltarea acestor țări. Încheerea unor acorduri comerciale bilaterale pe termen scurt și pe termen lung, asigură desfacerea multor produse tradiționale ale acestor țări, livrîndu-le în același timp cantități de produse industriale, în condiții avantajoase, grăbind astfel dezvoltarea economică a țărilor în curs de dezvoltare. Peste 100 ingineri și tehnicieni romîni, împreună cu cei indieni, au lucrat aproape doi ani la montarea și punerea în funcțiune a unei rafinării în India la Ciauhati, cu o capacitate de rafinare anuală de 750.000 tone. În prezent s-a elaborat documentația necesară și s-a trecut la lărgirea capacității de rafinare pînă la 1.200.000 tone pe an.

Specialiștii romîni au acordat și acordă asistență tehnică pentru prospecțiuni geologice și de foraj în Afganistan, Birmania, Ghana, Indonezia, Cuba, R.D. Vietnam etc. În Afganistan pînă în anul 1963 au lucrat an de an 60—100 specialiști romîni, care au contribuit la descoperirea de rezerve petroliere și la instruirea de cadre proprii. Cu Indonezia s-a convenit ca pe bază de credite, țara noastră să livreze proiectele, mașinile și utilajele și să acorde asistență tehnică în vederea construirii unei rafinării

de petrol cu capacitate de 1,5 mil. tone anual. Printre livrările noastre către Indonezia, se prevăd în anii următori 2130 vagoane de marfă și cisterne.

In cursul anului 1963 s-a semnat contractul cu India pentru construcția unei termocentrale, cu o putere de 18 M.W. care se va construi la Singarași, livrările de utilaje începînd în acest an. Sînt în curs discuții pentru alte termocentrale, pentru echipament pentru fabrici de ciment, fabrici de cărămizi și alte instalații complexe, care urmează să fie furnizate de Romînia.

La a 20-a aniversare a eliberării patriei noastre de sub jugul fascist, poporul romîn privește cu mîndrie realizările deosebit de importante obținute sub conducerea P.M.R. în toate ramurile economiei naționale.

Oamenii muncii din R.P.R. conștienți de faptul că construirea noii societăți este opera istorică a poporului din țara respectivă, rolul activității sale creatoare și a eforturilor și muncii sale, vor munci mai departe cu aceeași abnegație și eroism pentru desăvîrșirea construcției socialismului, pentru urcarea a noi trepte pe drumul dezvoltării și înfloririi continue a Romîniei.

Această dezvoltare va situa țara noastră într-un viitor apropiat printre țările cele mai dezvoltate din lume, din punct de vedere economic.

Catedra de economie politică
Institutul politehnic București

BIBLIOGRAFIE

1. Declarația cu privire la poziția P.M.R. în problemele mișcării comuniste și muncitorești internaționale.
2. *Gh. Gheorghiu-Dej* — Raport la Congresul al III-lea al P.M.R.
   Gh. Gheorghiu-Dej — Rapoartele la Plenarele C.C. al P.M.R. din martie 1949, decembrie 1956, iulie și decembrie 1959.
3. *Gh. Gheorghiu-Dej* — Raport la Conferința națională a P.C.R. noembrie 1945.
4. *I. Gh. Maurer* — Temelia de neclintit a unității mișcării comuniste internaționale.
5. Cuvîntarea șefului delegației R.P.R. la Conferința economică O.N.U. de la Geneva.
6. Anuarul și breviarul statistic al R.P.R. pe anii 1957—1964.
7. Buletin de informare economică 1963—1964.
8. Probleme economice nr. 7, 9, 12/1963.
9. Viața economică 1963—1964.
10. Buletinul Camerei de Comerț a R.P.R.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC BUCUREȘTI
Tomul XXVI — 1964, Fascicola 4

C.Z. 338(R) — 02

INDUSTRIA CONSTRUCTOARE DE MAȘINI — CREAȚIE A REGIMULUI DEMOCRAT-POPULAR DIN ȚARA NOASTRĂ

D. REBUȘAPCĂ, R. SOARE, GH. MAȘALĂ, GH. PETCU, I. HRISTACHE*)

În procesul industrializării socialiste, al creeării și dezvoltării necontenite a bazei tehnice materiale a socialismului în țara noastră, Partidul Muncitoresc Romîn a acordat o atenție deosebită dezvoltării continue a industriei constructoare de mașini. Accentul pus de partid pe dezvoltarea industriei constructoare de mașini decurge din rolul pe care-l are această ramură în asigurarea avîntului rapid al forțelor de producție, în construirea și desăvîrșirea construirii socialismului și ridicarea nivelului de trai al celor ce muncesc.

De nivelul de dezvoltare a industriei constructoare de mașini depinde în măsură hotărîtoare ritmul în care se introduce tehnica și tehnologia modernă, creșterea productivității muncii și îmbunătățirea calității produselor în toate ramurile economiei naționale.

Ținînd seama de marea importanță pe care o are industria constructoare de mașini în cadrul economiei naționale, partidul nostru a luat măsuri în vederea creeării și dezvoltării acestei ramuri.

* * *

Romînia burghezo-moșierească era una dintre țările slab dezvoltate și dependente de statele imperialiste.

În economia Romîniei burghezo-moșierești, industria metalurgică și a prelucrării metalelor era într-un stadiu cu totul embrionar de dezvoltare. Greutatea specifică a acestei ramuri în volumul total al producției industriale, foarte scăzut și el, era în 1938 abia de 10,2%, adică de peste 3 ori mai mică decît ponderea industriei alimentare, care era de 32,4% și chiar decît cea a industriei textile și a confecțiilor care avea o pondere

*) Lucrare comunicată la sesiunea științifică a cadrelor didactice din Institutul politehnic București, aprilie 1962.

de 12,8%. În timp ce Romînia era nevoită să recurgă la import pentru tot felul de utilaje, în momentul în care nici nu se putea vorbi despre existenţa unei industrii constructoare de maşini, în ţara noastră se construiau uzinele de armament Copşa Mică, Cugir, I.A.R. ş.a.

După anul 1939, cu sprijinul monarhiei şi al partidelor istorice, industria metalurgică şi a prelucrării metalelor din Romînia a fost pusă în întregime în slujba maşinii de război germane.

Nivelul înzestrării tehnice a acestei ramuri, ca de altfel şi în celelalte, era foarte scăzut, fapt recunoscut de însişi economiştii burghezi. De pildă, în „Enciclopedia Romîniei" se recunoştea că : „industria metalurgică avea caracterul pronunţat de industrie manufacturieră de maşini" [11].

O caracteristică a industriei metalurgice şi prelucrătoare o constituia faptul că era alcătuită din cîteva uzine mari ca de exemplu : „Malaxa", „Reşiţa", „Astra-Arad", „I.A.R. Braşov" şi dintr-un mare număr de fabrici mici avînd mai mult caracterul unor ateliere cu un nivel scăzut de înzestrare tehnică şi care lucrau cu metode de producţie meşteşugăreşti.

Aceste fabrici nu erau profilate sau specializate, ele lucrau în serii mici, în funcţie de cererile diferiţilor clienţi şi în mare parte produceau piese sau organe de maşini izolate, menite să asigure întreţinerea şi repararea utilajului importat. Astfel fabrica „Lemaître" din Bucureşti avea în nomenclatura producţiei sale peste 50 de feluri de produse dintre cele mai variate, începînd cu unelte simple pentru agricultură şi produse de cazangerie şi terminînd cu comenzi de material feroviar.

Romînia burghezo-moşierească, deşi dispunea de importante rezerve de petrol, gaze naturale, nu avea fabrici de utilaj petrolier ; deşi existau condiţii pentru o agricultură intensivă, în ţara noastră considerată de ideologii burghezi „eminamente agrară" nu exista o industrie proprie de tractoare şi o industrie de maşini agricole, industrie electrotehnică ş.a.

Lipsa industriei constructoare de maşini în Romînia burghezo-moşierească se reflecta şi în comerţul exterior al ţării. În perioada 1928—1937 produsele finite au reprezentat anual 75—88%, din totalul importului romînesc, pe cînd materiile prime şi semifabricatele abia 12% [12]. De asemenea, peste 95% din maşinile şi utilajele folosite în economie erau procurate din import. Înapoierea economică a ţării noastre era plătită scump de poporul romîn. Romînia plătea pentru o tonă de mărfuri importate de cca. 10—12 ori mai mult decît încasa pentru o tonă de mărfuri exportate. Însişi economiştii burghezi recunoşteau aceasta. Astfel, în „Enciclopedia Romîniei" se spunea : „Romînia vinde produsul muncii a 10 muncitori agricoli contra produsului muncii unui singur muncitor industrial din Occident" [11].

Din cele arătate pînă acum rezultă că în condiţiile regimului burghezo-moşieresc, datorită înfeudării Romîniei de către monopolurile străine, care au transformat ţara noastră într-o anexă a ţărilor imperialiste, industria era slab dezvoltată lipsind o serie de ramuri de bază ale acesteia şi în

primul rînd industria constructoare de mașini. Întreprinderile existente care produceau unele mașini, nu puteau constitui o ramură a industriei constructoare de mașini, deoarece lipseau pe de o parte subramurile ei de bază, iar pe de altă parte producția întreprinderilor respective asigura nevoile economiei naționale numai în proporție de 5%.

Instaurarea dictaturii proletariatului a făcut posibilă trecerea patriei noastre pe drumul construirii socialismului. „Călăuzindu-se de planul leninist de construire a socialismului, partidul nostru — arată tovarășul Gheorghe Gheorghiu-Dej, — a pus în centrul politicii sale făurirea unei industrii grele proprii, dezvoltate și în deosebi a industriei constructoare de mașini" [4].

Crearea și dezvoltarea industriei constructoare de mașini era determinată de nevoile construcției socialismului în patria noastră. Una dintre principalele măsuri pe care le-au luat partidul și statul nostru în această privință a fost aceea a orientării investițiilor spre ramurile de bază ale industriei și în special spre industria constructoare de mașini. Astfel, între anii 1951—1963 statul nostru a alocat pentru crearea și dezvoltarea industriei constructoare de mașini și prelucrării metalelor : 10 954 milioane lei, ceea ce reprezintă 8,3% din investițiile făcute în industrie [7]. Ca urmare a investițiilor făcute au fost create o serie de subramuri ale industriei constructoare de mașini ca : industria constructoare de mașini unelte, utilaj energetic, petrolier, electrotehnică și a construcțiilor metalice, adică subramurile de bază, caracteristice unei industrii constructoare de mașini și prelucrării metalelor.

Crearea subramurilor principale ale industriei constructoare de mașini a făcut posibilă creșterea într-un ritm mai rapid a volumului producției din această ramură, fapt care reiese din datele de mai jos :

Dinamica producției globale a industriei constructoare de mașini comparativ cu dinamica producției grupei „A" și cu întreaga producție globală industrială în % (1950 = 100). [7]

	1938	1948	1951	1952	1953	1954	1955	1956	1957	1958	1959	1960	1961	1962	1963
Total ind.	68	58	124	146	168	178	202	225	243	267	293	340	393	447	502
Grupa „A"	60	55	127	156	187	193	217	248	272	299	342	397	462	543	620
Constr. mașini și prelucrarea metalelor	56	49	138	175	220	232	278	333	380	420	485	585	701	833	941

Rezultă că în anul 1963 producția industriei constructoare de mașini și prelucrării metalelor a fost de peste 3 ori mai mare decît în 1955 și de 16,8 ori mai mare față de anul 1938. Această ramură produce în aproximativ o lună o producție în valoare egală cu întreaga producție a anului 1938.

Ritmul mediu anual de creştere a producţiei industriei constructoare de maşini în perioada 1951—1963 a fost de 18,8%, iar al grupei „A" şi al întregii industrii de 15,1% şi respectiv 13,2%.

Creşterea mai rapidă a producţiei industriei constructoare de maşini a asigurat introducerea tehnicii moderne şi creşterea productivităţii muncii în toate ramurile economiei naţionale, a constituit o condiţie principală în crearea bazei tehnice materiale a socialismului.

In cadrul industriei constructoare de maşini producţia unor subramuri a cunoscut un ritm şi mai înalt de creştere, fapt care rezultă din datele de mai jos :

Dinamica producţiei globale a industriei constructoare de maşini şi a subramurilor ei. În procente (1950 = 100) [7]

	1938	1948	1951	1952	1953	1954	1955	1956	1957	1958	1959	1960	1961	1962	1963
Constr. de maşini şi prelucrarea metalelor	56	49	138	175	220	232	278	333	380	420	486	585	701	833	941
Construcţii de maşini	—	—	136	175	216	220	273	344	403	454	548	709	858	10 ori	11 ori
Electrotehnică	—	—	166	261	329	308	349	408	485	551	651	860	12 ori	16 ori	20 ori
Constr. metal. şi produse metalice	—	—	139	170	222	249	312	356	388	432	458	545	640	757	854
Reparaţii	—	—	136	154	196	224	243	278	305	317	347	328	347	404	435

După cum reiese din datele prezentate, între anii 1950—1963 în cadrul industriei constructoare de maşini şi prelucrării metalelor cel mai rapid s-a dezvoltat producţia industriei electrotehnice (de 20 ori), determinată fiind de necesităţile de electrificare a ţării, şi cea constructoare de maşini propriu zise (de 11 ori).

Caracteristic industriei noastre constructoare de maşini este faptul că o dată cu creşterea volumului producţiei, are loc şi lărgirea şi perfecţionarea nomenclaturii ei de fabricaţie şi a calităţii produselor.

O deosebită importanţă pentru ridicarea calităţii produselor au avut indicaţiile date de Congresul al III-lea al P.M.R. în acest sens, şi pe baza cărora a fost adoptată Hotărîrea C.C. al P.M.R. şi a Consiliului de Miniştri din 3 iulie 1960 cu privire la această problemă [1].

Transpunînd în viaţă sarcinile trasate de către partid, muncitorii, tehnicienii şi inginerii din industria constructoare de maşini în ultimii

ani au obținut succese însemnate în ceea ce privește îmbunătățirea calității produselor și asimilarea unor produse noi la nivelul tehnicii mondiale. Dintre aceste produse se pot cita: motoarele Diesel cu 12 cilindri cu o putere de 700 C.P. pompe Duplex, instalația de foraj 4 L.D., vagoane de transportat cu descărcare pneumatică, strungul S-56, tractoare, locomotive Diesel-electrice ș.a.

Ca urmare, produsele industriei noastre constructoare de mașini în plină dezvoltare se bucură de o apreciere pozitivă, atît din partea specialiștilor noștri, cît și din partea celor străini și a unor firme importatoare.

In urma măsurilor luate de partidul și statul nostru, privind crearea și dezvoltarea industriei constructoare de mașini, rolul acesteia în cadrul economiei noastre naționale a crescut de la an la an, fapt ce este oglindit în ponderea pe care o ocupă astăzi producția industriei constructoare de mașini în totalul producției industriale.

Dacă în anul 1938 ponderea industriei metalurgice și prelucrătoare reprezenta în totalul producției industriei 10,2% în anul 1963 ponderea industriei constructoare de mașini a crescut foarte mult ajungînd la 26,6%.

Ponderea producției globale a industriei constructoare de mașini și prelucrării metalelor în producția globală industrială a țării, în anii 1938, 1948, 1950, 1955—1963 [7]

	1938	1948	1950	1955	1956	1957	1958	1959	1960	1961	1962	1963
Total industrie	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100
Constr. de mașini și prelucrarea metalelor	10,2	10,5	13,3	18,8	20,4	21,5	21,8	22,9	24,0	25,1	26,3	26,6
din care: Construcții de mașini	—	—	6,3	9,0	10,1	10.9	11,4	12,7	14,6	15,5	15,9	15.7
Electrotehnică	—	—	0,9	1,5	1,6	1,8	1,8	2,1	2,4	2,9	3,4	3,9
Construcții metalice și produse metalice	—	—	2,2	3,5	3,5	3,5	3,7	3,1	2,9	3,1	3,1	3,1
Reparații	—	—	3,9	4,8	5,2	5,3	4,9	5,0	4,1	3,6	3,9	3,9

Creșterea ponderii producției industriei constructoare de mașini în totalul producției industriale a țării, a făcut posibil ca necesarul de mașini și utilaje al economiei naționale să fie acoperit în proporție de aproape 3/4 din producția internă. Acest fapt reiese din tabelul din pagina următoare.

Acoperirea investiţiilor în utilaj şi instrumente din producţia internă în anii 1950—1963 (milioane lei) [7]

	1950	1951	1952	1953	1954	1955	1956	1957	1958	1959	1960	1961	1962	1963
Investiţii în utilaj şi instrumente	2033	2855	3551	4417	3800	4309	4270	4461	5117	6550	8801	11651	13436	14668
din care: Produse în ţară	1032	1663	2111	2804	2782	3210	3279	3636	4215	5283	6789	8047	9080	9678
În % faţă de total	50,8	58,2	59,4	63,5	73,2	74,5	76,8	81,5	82,4	80,7	77,1	69,1	67,6	66,0

Rezultă că din totalul de 89.919 mil. lei investiţii făcute în utilaje şi instrumente în perioada anilor 1950—1963, 63.609 milioane adică 70,7% au fost asigurate din producţia internă. Această cifră este mai edificatoare dacă se ţine seama de faptul că în condiţiile Romîniei burghezo-moşiereşti necesarul de maşini şi utilaje era acoperit din producţia internă a ţării numai în proporţie de 5%.

Creşterea ponderii industriei constructoare de maşini în totalul volumului producţiei industriale, acoperirea în cea mai mare parte a nevoilor de maşini şi utilaje din producţia proprie, demonstrează faptul că industria constructoare de maşini din ţara noastră joacă un rol important în cadrul economiei naţionale, în ceea ce priveşte înzestrarea tehnică a tuturor ramurilor producţiei materiale, contribuind la creşterea productivităţii muncii sociale.

De pildă, în industria carboniferă ca urmare a dotării cu maşini produse de industria noastră constructoare de maşini, tăierea cărbunelui în abataje este mecanizată în proporţie de peste 92% faţă de numai 78% în 1950, iar transportul subteran şi în abataje a fost mecanizat în proporţie de 93% şi 78,9% faţă de 73,5% şi respectiv 54,9% în 1950. De asemenea ca urmare a dotării transportului feroviar cu locomotive-Diesel-electrice, transportul de mărfuri cu aceste locomotive reprezenta în 1963 18% din totalul traficului de mărfuri, iar operaţiunile de încărcare şi descărcare în staţiile de transbordare erau mecanizate în proporţie de 85%.

Agricultura ţării noastre la sfîrşitul anului 1963 dispunea de cca. 65 000 tractoare fizice 62 000 semănători mecanice, 32 100 combine pentru păioase şi alte maşini agricole ceea ce a permis ridicarea gradului de mecanizare a muncii agricole într-o proporţie importantă [8].

Dotarea cu maşini şi utilaje moderne, mecanizarea şi automatizarea proceselor de producţie, au avut loc şi în alte ramuri de producţie ca: industria construcţiilor, în exploatările forestiere, în industria bunurilor de larg consum etc.

Dar industria noastră constructoare de maşini nu numai că acoperă cu produsele sale în cea mai mare parte nevoile economiei naţionale, ci asigură şi pentru export într-un număr mare de ţări, produse pentru care altădată eram tributari străinătăţii.

Noi exportăm astăzi, pe lîngă o serie de produse tradiționale și produse ale industriei constructoare de mașini ca: tractoare, utilaj petrolier, echipament pentru termocentrale, motoare electrice, strunguri, camioane, rulmenți, vagoane de marfă și cisterne, escavatoare, construcții navale etc.

Exportul principalelor produse ale industriei constructoare de mașini, în anii 1958—1963 [7]

Produse	U. M.	1958	1959	1960	1961	1962	1963
Transformatori de forță	buc.	837	1 410	2 522	4 742	2 861	2 304
Utilaj pentru industria extractivă petrolieră	mil. lei	59,4	83,1	88,1	164,5	234,5	192,4
Utilaj pentru rafinării de țiței	mil. lei	—	7.3	60,5	59,2	72,2	87,3
Utilaj tehnologic pentru industria chimică	mil. lei	—	—	9,0	40,1	58,3	64,8
Motoare electrice	buc.	19 561	13 761	24 965	39 609	35 203	36 242
Rulmenți	mii buc.	144,6	137,7	276,7	624,0	1425,8	2674,1
Tractoare	buc.	1 362	3 018	4 526	6 687	4 539	5 925
Construcții navale	mil. lei	48,8	59,1	73,2	52,3	58,8	76,5

Ponderea mașinilor și utilajelor în volumul total al exportului nostru a crescut de la an la an.

Din cele arătate pînă acum reiese faptul că în țara noastră care era considerată de ideologii burghezi ca „eminamente agrară", în urma promovării de către P.M.R. a politicii leniniste de industrializare socialistă a țării, a fost creată o puternică industrie constructoare de mașini. Referitor la aceasta tov. Gh. Gheorghiu-Dej spunea: „În cursul a 4 ani de la naționalizare, industria noastră socialistă aproape și-a triplat producția, luînd un mare avînt. S-a creat ramura nouă a construcției de mașini, ramură conducătoare în industria noastră" [2]. De asemenea, cu ocazia cuvîntării sale privind „Întărirea continuă a regimului democrat popular în R.P.R." tov. Gh. Gheorghiu-Dej a apreciat că:

„Tînăra noastră industrie a construcțiilor de mașini este o creație a regimului democrat-popular din țara noastră" [3].

Succesele importante care s-au obținut în dezvoltarea producției industriei constructoare de mașini, în ridicarea continuă a calității produselor și a randamentului lor la nivelul tehnicii mondiale, sînt rodul muncii depuse de clasa muncitoare sub conducerea P.M.R., rodul inițiativei creatoare a muncitorilor, tehnicienilor și inginerilor. Ele demonstrează falsi-

tatea tuturor acelor teorii prin care ideologii burgheziei şi moşierimii susţineau că poporul romîn ar fi incapabil de o muncă industrială calificată şi arată ce lucruri minunate poate realiza un popor stăpîn pe soarta sa.

Potrivit directivelor celui de al III-lea Congres al P.M.R. dezvoltarea industriei constructoare de maşini în cadrul planului de şase ani este orientată în următoarele direcţii principale:

— ridicarea continuă a nivelului tehnic, a eficacităţii tehnico-economice a maşinilor şi utilajelor produse şi însuşirea în fabricaţie a maşinilor bazate pe nivelul cel mai înalt al tehnicii. Faţă de creşterea producţiei industriale globale, care în anul 1965 va fi de 2,1 ori mai mare în comparaţie cu anul 1959, producţia industriei constructoare de maşini va creşte de 2,2 ori.

Prin dezvoltarea într-un ritm mai rapid a industriei constructoare de maşini se va asigura dezvoltarea continuă a bazei tehnice materiale a socialismului, în vederea desăvîrşirii construirii socialismului în patria noastră.

Catedra de economie politică
Institutul politehnic Bucureşti

BIBLIOGRAFIE

[1] — — Hotărîrea C.C. al P.M.R. şi a C.M. al R.P.R. cu privire la ridicarea nivelului tehnic al producţiei, Ed. Politică 1960.

[2] *Gh. Gheorghiu-Dej* — Expunere la consfătuirea pe ţară a muncitorilor mineri. Articole şi Cuvîntări E.S.P.L.P., 1956, ed. IV-a pag. 476.

[3] *Gh. Gheorghiu-Dej* — Întărirea continuă a regimului democrat-popular în R.P.R. Art. şi cuvîntări E.S.P.L.P., 1956 ed. IV-a pag. 558.

[4] *Gh. Gheorghiu-Dej* — Traducerea în viaţă a măreţei învăţături leniniste cu privire la alianţa dintre clasa muncitoare şi ţărănime. Articole şi Cuvîntări E.S.P.L.P., 1956, ed. IV-a pag. 806.

[5] *Gh. Gheorghiu-Dej* — Raport la cel de al III-lea Congres al P.M.R. Ed. Pol. 1960.

[6] *Gh. Gheorghiu-Dej* — Cuvîntare la Conferinţa Organizaţiei de Partid a oraşului Bucureşti Ed. Pol. 1964.

[7] *D.C.S.* — Anuarul statistic al R.P.R. 1964 pag.: 158—159; 166—167; 344—345; 439.

[8] — — Comunicatul D.C.S. cu privire la îndeplinirea planului de stat al R.P.R. pe anul 1963. Scînteia din 1 februarie 1964 nr. 6154.

[9] — — Economia Romîniei între anii 1944—1959. Ed. Academiei R.P.R. 1959.

[10] *D. Paulescu* — Construcțiile de mașini — ramură principală a industriei noastre socialiste, Buc. Ed. Pol., 1961.

[11] — — Enciclopedia Romîniei — vol. III pag. 853; 879.

[12] — — Breviarul statistic al Romîniei ed. II 1939, pag. 341—343.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC BUCUREŞTI
Tomul XXVI — 1964, Fascicola 4

MATEMATICA

C.Z. 517.9

ОДНО ОБОБЩЕНИЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ЛАПЛАСА-КАРСОНА И ЕГО ПРИМЕНЕНИЕ К РЕШЕНИЮ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ПЕРЕМЕННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

П. А. МУРАВЬЕВ
Ивановского энергетического института им. В. И. Ленина

ВВЕДЕНИЕ

В работе [1] М. Радулеску изучает интегрирование одного класса однородных линейных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами. Эти уравнения он решает с помощью целого линейного оператора D, который представляет собою обобщенный оператор дифференцирования

$$D = \frac{d}{dx}.$$

Уравнения такого типа представляют интерес, так как встречаются в технических приложениях (см., например, [2]).

В настоящей работе будет показано, как можно такие уравнения решать с помощью видоизмененного преобразования Лапласа-Карсона, причем наш метод годится для решения однородных и неоднородных уравнений.

§ 1. Видоизмененное преобразование Лапласа-Карсона и его свойства

Обычное преобразование Лапласа-Карсона имеет вид

$$\mathfrak{L}[f(t)] \equiv F(p) = p\int_0^\infty e^{-pt} f(t)\,dt, \tag{1.1}$$

где

$p = \sigma + i\delta$ — комплексный параметр;
$f(t)$ — преобразуемая функция, удовлетворяющая некоторым определенным условиям.

Формально мы построим следующее преобразование:

$$M[\varphi(x)] \equiv \Phi(x) = p \int_a^b e^{-p\int_a^x \frac{du}{\alpha(u)}} \varphi(x) \frac{dx}{\alpha(x)}, \tag{1.2}$$

где

$p = \sigma + i\delta$ — комплексный параметр;
$\alpha(x)$ — положительная функция, дифференцируемая достаточное число раз;
a — действительная постоянная;
b — действительная постоянная (или ∞);
$\varphi(x)$ — преобразуемая функция.

Преобразование (1.2) легко представить в виде (1.1). В самом деле, применим к (1.2) подстановку

$$t = \int_a^x \frac{du}{\alpha(u)}. \tag{1.3}$$

Тогда

$$dt = \frac{dx}{\alpha(x)},$$

$$x = \psi(t), \quad \varphi(x) = \varphi[\psi(t)] = \bar{\varphi}(t);$$

$$t = 0 \text{ при } x = a, \quad t \to +\infty \text{ при } x \to b,$$

если положить, что

$$\lim_{x \to b} \int_a^x \frac{du}{\alpha(u)} = +\infty;$$

$$p \int_a^b e^{-p\int_a^x \frac{du}{\alpha(u)}} \varphi(x) \frac{dx}{\alpha(x)} = p \int_0^\infty e^{-pt} \bar{\varphi}(t)\, dt, \tag{1.4}$$

т. е.

$$M[\varphi(x)] = \mathfrak{L}\bar{\varphi}[t].$$

Заметим, что $t = x$ при $\alpha(x) = 1$ и $a = 0$.

Имея в виду равенство (1.4), мы потребуем, чтобы функция $\varphi(x) = \bar{\varphi}(t)$ удовлетворяла всем условиям, которым обычно подчиняется функция, преобразуемая по Лапласу.

Перечислим основные свойства преобразования (1.2).

1°. Соотношение между функцией — оригиналом $\varphi(x)$ и ее изображением $\Phi(p)$ мы будем записывать в виде

$$\Phi(p) \div \varphi(x).$$

Очевидно, преобразование (1.2) обладает свойством линейности, т. е.

$$\lambda\,\Phi(p) \pm \gamma\,F(p) \doteqdot \lambda\,\varphi(x) \pm \gamma\,f(x)\,, \tag{1.5}$$

где λ, γ — постоянные.

2°. Изменение масштаба.

В силу (1.4) легко получаем:

$$\Phi\left(\frac{p}{k}\right) \doteqdot \varphi[\psi(kt)]\,, \tag{1.6}$$

где k — положительная постоянная.

3°. Дифференцирование оригинала.

$$M[\varphi(x)] = p\int_a^b e^{-pt(x)}\,\varphi(x)\,dt(x)\,.$$

Интегрируя по частям, получим:

$$M[\varphi(x)] = p\left\{\Big|_a^b \varphi(x)\left(-\frac{1}{p}\,e^{-pt(x)}\right) + \frac{1}{p}\int_a^b e^{-pt(x)}\,\varphi'(x)\,dx\right\} =$$

$$= \varphi(a) + \int_a^b e^{-pt(x)}\,\alpha(x)\,\varphi'(x)\,dt(x)\,. \tag{a}$$

Для сокращения записи в дальнейшем будем употреблять обозначение

$$\widetilde{\varphi}^{(k)}_{(\alpha)}(x) \equiv \underbrace{\left(\alpha\frac{d}{dx}\right)\left(\alpha\frac{d}{dx}\right)\cdots\left(\alpha\frac{d}{dx}\right)\left(\alpha\frac{d}{dx}\,\varphi(x)\right)}_{k\text{ — раз}}, \tag{b}$$

и $\widetilde{\varphi}^{(k)}_{(\alpha)}(x)$ будем называть производной с умножением k-го порядка.

Теперь равенство (a) примет вид

$$M[\varphi(x)] = \varphi(a) + \int_a^b e^{-pt(x)}\,\widetilde{\varphi}'_{(\alpha)}(x)\,dt(x)\,,$$

откуда

$$\widetilde{\varphi}'_{(\alpha)}(x) \doteqdot p\,M[\varphi(x)] - p\,\varphi(a)\,. \tag{1.7}$$

Применяя правило (1.7) к функции $\widetilde{\varphi}'_{(\alpha)}(x)$, лекко получаем

$$\widetilde{\varphi}''_{(\alpha)}(x) \doteqdot p^2\,M[\varphi(x)] - p^2\,\varphi(a) - p\,\widetilde{\varphi}'_{(\alpha)}(a)\,. \tag{1.8}$$

Продолжая далее этот процесс, будем иметь:

$$\widetilde{\varphi}^{(n)}_{(\alpha)}(x) \doteqdot p^n M[\varphi(x)] - p^n \varphi(a) - p^{n-1} \widetilde{\varphi}'_{(\alpha)}(a) - p^{n-2} \widetilde{\varphi}''_{(\alpha)}(a) - \ldots$$
$$\ldots - p \widetilde{\varphi}^{(n-1)}_{(\alpha)}(a). \tag{1.9}$$

Соотношение (1.9) дает нам изображение производной с умножением n-го порядка. При решении дифференциальных уравнений это соотношение будет играть главную роль.

4°. Интегрирование оригинала.

Если $\varphi(x) \doteqdot \Phi(p)$, то интеграл от a до x от функции $\varphi(x)$, деленной на $\alpha(x)$, соответствует делению изображения на p, т. е.

$$\int_a^x \frac{\varphi(u)}{\alpha(u)}\, du \doteqdot \frac{\Phi(p)}{p}. \tag{1.10}$$

Обозначим

$$f(x) \equiv \int_a^x \frac{\varphi(u)}{\alpha(u)}\, du, \quad f(x) \doteqdot F(p).$$

Замечая, что $f(a) = 0$, будем иметь:

$$\widetilde{f}'_{(\alpha)}(x) \doteqdot p F(p) - p f(a) = p F(p).$$

Но $\widetilde{f}'_{(\alpha)}(x) = \varphi(x)$, следовательно,

$$\varphi(x) \doteqdot p F(p),$$

откуда

$$\Phi(p) = p F(p).$$

Значит

$$F(p) = \frac{\Phi(p)}{p} \doteqdot \int_a^x \frac{\varphi(u)}{\alpha(u)}\, du.$$

5°. Дифференцирование изображения.

Последовательно дифференцируя (1.2) по переменной p, получаем

$$p \frac{d^n}{dp^n}\left(\frac{\Phi(v)}{p}\right) \doteqdot (-t)^n \varphi(x), \tag{1.11}$$

где

$$t = \int_a^x \frac{du}{\alpha(u)}.$$

6°. Интегрирование изображения.

В силу (1.4) сразу получаем

$$\frac{\varphi(x)}{t} \div p\int_p^\infty \frac{\Phi(p)}{p}\,dp, \tag{1.12}$$

где

$$t=\int_a^x \frac{du}{\alpha(u)}.$$

7°. Операция сдвига.

Как известно, в преобразовании Лапласа-Карсона

$$\overline{\varphi}(t-\lambda) \div e^{-p\lambda}\,\Phi(p),$$

где $\lambda > 0$ — постоянная.

Имея в виду (1.4), где

$$\overline{\varphi}(t)=\varphi[\psi(t)],\quad t=\int_a^x \frac{du}{\alpha(u)},\quad x=\psi(t),$$

сразу получаем

$$\varphi[\psi(t-\lambda)] \div e^{-p\lambda}\,\Phi(p). \tag{1.13}$$

8°. Смещение в комплексной области.

В силу (1.4) получаем:

$$e^{\lambda t}\varphi(x) \div \frac{p}{p-\lambda}\,\Phi(p-\lambda), \tag{1.14}$$

где

$$t=\int_a^x \frac{du}{\alpha(u)},\qquad \lambda \text{ — постоянная.}$$

9°. Теорема свертывания.

Если $f(x) \div F(p)$, $\varphi(x) \div \Phi(p)$, то

$$F(p)\cdot\Phi(p) \div \alpha(x)\,\frac{d}{dx}\int_a^x f[\psi(t-z)]\,\varphi(v)\,\frac{dv}{\alpha(v)}, \tag{1.15}$$

где

$$t=\int_a^x \frac{du}{\alpha(u)},\quad z=\int_a^v \frac{du}{\alpha(u)},\quad x=\psi(l),\quad v=\psi(z).$$

Доказательство.

Обозначим

$$\mathfrak{L}(x) \equiv \alpha(x) \frac{d}{dx} \int_a^x f[\psi(t-z)]\, \varphi(v)\, \frac{dv}{\alpha(v)}. \tag{a}$$

Учитывая, что $f(x) = \bar{f}(t)$, $\varphi(x) = \bar{\varphi}(t)$, и сделав в (a) подстановку по формуле $v = \psi(z)$, получаем:

$$\mathfrak{L}(x) = \frac{d}{dt} \int_0^t \bar{f}(t-z)\, \bar{\varphi}(z)\, dz. \tag{b}$$

Подвергая функцию $\mathfrak{L}(x)$ преобразованию (1.2), будем иметь:

$$M[\mathfrak{L}(x)] = p \int_a^b e^{-p \int_a^x \frac{du}{\alpha(u)}}\, \mathfrak{L}(x)\, \frac{dx}{\alpha(x)} = p \int_0^\infty e^{-pt} \left\{ \frac{d}{dt} \int_0^t \bar{f}(t-z)\, \bar{\varphi}(z)\, dz \right\} dt. \tag{c}$$

Учитывая, что правая часть равенства (c) есть обычное преобразование Л — К по переменной t, окончательно получим

$$M[\mathfrak{L}(x)] = F(p) \cdot \Phi(p),$$

что и доказывает соотношение (1.15).

Мы будем обозначать

$$f(x) * \varphi(x) \equiv \alpha(x) \frac{d}{dx} \int_a^x f[\psi(t-z)]\, \varphi(v)\, \frac{dv}{\alpha(v)} \tag{1.16}$$

и называть (1.16) α — сверткой.

Легко можно показать, что α — свертка коммутативна и ассоциативна.

В другой работе нами построено операционное исчисление, исходя из формулы (1.16) по аналогии с тем, как это сделано у Микусинского [3].

С помощью (1.15) без труда получаем следующие полезные для приложений формулы:

$$e^{\lambda t} * F(x) = F(x) + \lambda e^{\lambda t} \int_a^x e^{-\lambda z}\, F(v)\, \frac{dv}{\alpha(v)}, \tag{1.17}$$

где λ — постоянная, $t = \int_a^x \frac{du}{\alpha(u)}$, $z = \int_a^v \frac{du}{\alpha(u)}$;

$$\frac{p\, \bar{F}(p)}{p-\lambda} \doteq F(x) + \lambda e^{\lambda t} \int_a^x e^{-\lambda z}\, F(v)\, \frac{dv}{\alpha(v)} \tag{1.18}$$

где

$$F(x) \div \overline{F}(p);$$

$$\frac{\overline{F}(p)}{p-\lambda} \div e^{\lambda t}\int_a^x e^{-\lambda z} F(v)\,\frac{dv}{\alpha(v)}. \tag{1.19}$$

Полагая в (1.19) $\lambda = 0$, получаем:

$$\frac{\overline{F}(p)}{p} \div \int_a^x F(v)\,\frac{dv}{\alpha(v)}. \tag{1.20}$$

В силу (1.10)

$$\frac{\overline{F}(p)}{p^n} \div \int_a^x \frac{dv}{\alpha(v)}\int_a^v \frac{dv}{\alpha(v)} \ldots \int_a^v F(v)\,\frac{dv}{\alpha(v)}, \tag{1.21}$$

где в правой части n — кратный повторный интеграл.

Заметим, что $\frac{p}{p-\lambda}$ можно представить в виде бесконечного ряда

$$\frac{p}{p-\lambda} = 1 + \frac{\lambda}{p} + \left(\frac{\lambda}{p}\right)^2 + \ldots$$

Тогда

$$\frac{p\,\overline{F}(p)}{p-\lambda} = \left\{1 + \frac{\lambda}{p} + \left(\frac{\lambda}{p}\right)^2 + \ldots\right\}\overline{F}(p).$$

Учитывая (1.21), из последнего равенства получаем:

$$\frac{p\,\overline{F}(p)}{p-\lambda} \div F(t) + \lambda\int_a^x F(v)\,\frac{dv}{\alpha(v)} + \lambda^2\int_a^x \frac{dv}{\alpha(v)}\int_a^v F(v)\,\frac{dv}{\alpha(v)} + \ldots \tag{1.22}$$

§ 2. Определение оригинала по изображению

Одно из удобств пользования преобразованием (1.2) состоит в том, что нет надобности составлять особую таблицу операционных соотношений, так как в силу равенства (1.4) можно пользоваться обыкновенными таблицами, составленными для преобразования Лапласа-Карсона (см., например, [4]).

Покажем как это сделать:

1. Дана функция $\alpha(x)$ и преобразуемая функция $\varphi(x)$.

Требуется определить

$$\Phi(p) \div \varphi(x).$$

$$t = \int_a^x \frac{du}{\alpha(u)}, \quad x = \psi(t), \quad \varphi(x) = \varphi[\psi(t)] = \bar{\varphi}(t).$$

В обыкновенных таблицах находим для функции $\bar{\varphi}(t)$ изображение $\Phi(p)$.

Пример

$$\varphi(x) = \cos 3x^2, \quad \alpha(x) = \frac{1}{x}.$$

$$t = \int_0^x u\, du = \frac{x^2}{2}, \quad x = \psi(t) = \sqrt{2t}, \quad \bar{\varphi}(t) = \cos 6t.$$

В таблицах [4] находим

$$\cos 6t \div \frac{p^2}{p^2+36} = \Phi(p) \div \cos 3x^2.$$

2. Даны функции $\alpha(x)$ и $\Phi(p)$. Требуется определить

$$\varphi(x) \div \Phi(p).$$

В таблицах находим $\Phi(p) \div \bar{\varphi}(t)$.

Заменив t по формуле

$$t = \int_a^x \frac{du}{\alpha(u)},$$

найдем

$$\varphi(x) = \bar{\varphi}(t).$$

Пример. Даны

$$\alpha(x) = x, \quad \Phi(p) = \frac{p^2}{p^2 - \lambda^2}$$

В таблицах находим

$$\frac{p^2}{p^2 - \lambda^2} \div \frac{\operatorname{sh} \lambda t}{\lambda} = \varphi(t);$$

$$t = \int_1^x \frac{du}{u} \ln x; \quad \frac{1}{\lambda} \operatorname{sh} \lambda t = \frac{1}{\lambda} \operatorname{sh}(\lambda \ln x) = \frac{x^{2\lambda} - 1}{2\lambda x^{\lambda}},$$

$$\varphi(x) = \frac{x^{2\lambda} - 1}{2\lambda x^{\lambda}} \div \Phi(p).$$

Если в таблицах не найдем $\Phi(p)$, то следует воспользоваться свойствами преобразования (1.2), формулами (1.16) — (1.22) и разложением $\Phi(p)$ в ряд.

§ 3 Решение операционным методом одного класса линейных дифференциальных уравнений

Имеем дифференциальное уравнение

$$\widetilde{y}^{(n)}_{(\alpha)} + m_1 \widetilde{y}^{(n-1)}_{(\alpha)} + m_2 \widetilde{y}^{(n-2)}_{(\alpha)} + \ldots + m_n y = f(x) \tag{3.1}$$

и начальные условия

$$y^{(k)}(a) = l_k \, (k = 0, 1, 2, \ldots, n-1), \tag{3.2}$$

где

m_k $(k = 1, 2, 3, \ldots, n-1)$ — постоянные.

Решением однородных уравнений вида (3.1) и занимается М. Радулеску в работе [1].

Легко видеть, что развернув символы вида

$$\widetilde{y}^{(k)}_{(\alpha)}(x), \quad \text{(см. (1.7))}$$

мы получим линейное уравнение с переменными коэффициентами специального вида.

В силу соотношения (1.9) будем иметь:

$$\widetilde{y}^{(k)}_{(\alpha)}(x) \doteq p^k \bar{y}(p) - p^k y(a) - p^{k-1} \widetilde{y}'_{(\alpha)}(a) - p^{k-2} \widetilde{y}''_{(\alpha)}(a) - \ldots$$

$$\ldots, p \widetilde{y}^{(k-1)}_{(\alpha)}(a),$$

где

$$k = 1, 2, \ldots, n; \quad y(x) \doteq \bar{y}(p), \quad \widetilde{y}^{(m)}_{(\alpha)}(a) = \left[\widetilde{y}^{(m)}_{(\alpha)}(x)\right]_{x=a}.$$

Пользуясь соотношением (3.3), запишем уравнение (3.1) в операторной форме

$$\bar{y}(p) \sum_{k=0}^{n} a_k p^k = p \sum_{k=0}^{n-1} b_k p^k + F(p), \tag{3.4}$$

где

a_k, b_k — постоянные, $F(p) \doteq f(x)$.

Из (3.4) получаем

$$\bar{y}(p) = \frac{p \sum_{k=0}^{n-1} b_k p^k}{\sum_{k=0}^{n} a_k p^k} + \frac{F(p)}{\sum_{k=0}^{n} a_k p^k}. \tag{3.5}$$

Далее, как и обычно при решении дифференциальных уравнений операционным методом, находим искомую функцию — оригинал $y(x)$, учитывая при этом наши соображения в § 2.

Существенно заметить, что как и обычно, здесь начальные условия (3.2) учитываются сразу и нет надобности находить произвольные постоянные. Для иллюстрации более подробно рассмотрим уравнения второго порядка.

§ 4. Уравнения второго порядка

Имеем дифференциальное уравнение

$$y'' + p_1 y' + p_2 y = \varphi(x) \tag{4.1}$$

и начальные условия

$$y(a) = l_0, \quad y'(a) = l_1 \tag{4.2}$$

где

p_1, p_2, $\varphi(x)$ — непрерывные функции от x.

Приведем уравнение (4.1) к виду

$$\tilde{y}''_{(\alpha)} + m_1 \tilde{y}'_{(\alpha)} + m_2 y = f(x). \tag{4.3}$$

В развернутой форме (4.3) примет вид

$$\alpha^2 y'' + \alpha(\alpha' + m_1) y' + m_2 y = f(x). \tag{4.4}$$

Сравнивая (4.4) и (4.1), приходим к системе

$$\left.\begin{array}{ll} \text{a)} & \alpha^2 = h, \\ \text{b)} & \alpha(\alpha' + m_1) = h p_1, \\ \text{c)} & m_2 = h p_2, \\ \text{d)} & f(x) = h \varphi(x), \end{array}\right\} \tag{4.5}$$

где h — коэффициент пропорциональности.

Решая систему (4.5) получаем:

$$\left.\begin{array}{l} h = \dfrac{m_2}{p_2}, \quad \alpha = \dfrac{\sqrt{m_2}}{\sqrt{p_2}}, \quad f(x) = \dfrac{m_2}{p_2}\varphi(x), \\ p_1 = \dfrac{m_1}{\sqrt{m_2}}\sqrt{p_2} - \dfrac{p_2'}{2p_2}, \end{array}\right\} \tag{4.5'}$$

где m_2 — постоянная, находящаяся в нашем распоряжении.

Запишем (4.3) в операторной форме:

$$\widetilde{y}''_{(\alpha)} \doteq p^2 \bar{y}(p) - p^2 l_0 - p\,\alpha(a)\cdot l_1,$$

$$\widetilde{y}'_{(\alpha)} \doteq p\,\bar{y}(p) - p\,l_0,$$

$$y \doteq \bar{y}(p),$$

$$f(x) \doteq F(p).$$

$$\bar{y}(p)\,(p^2 + m_1 p + m_2) = p^2 l_0 + (l_1\,\alpha(a) + m_1 l_0)\,p + F(p),$$

$$\bar{y}(p) = \frac{l_0 p^2 + (l_1\,\alpha(a) + m_1 l_0)\,p}{p^2 + m_1 p + m_2} + \frac{F(p)}{p^2 + m_1 p + m_2} \tag{4.6}$$

Пример.

$$x^4 y'' + 2x^2(x+1)\,y' - 3y = \sin x, \tag{a}$$

$$y(1) = 1, \quad y'(1) = 0.$$

Приводя к виду (4.3), приходим к системе

$$\left.\begin{aligned} \alpha_2 &= h, \\ \alpha(\alpha' + m_1) &= h\,\frac{2(x+1)}{x^2}, \\ m_2 &= h\,\frac{-3}{x^4}, \\ f(x) &= h\,\frac{\sin x}{x^4}. \end{aligned}\right\} \tag{b}$$

Решив (b) получаем:

$$\alpha = x^2, \quad m_1 = 2, \quad m_2 = -3, \quad f(x) = \sin x.$$

Уравнение (4.6) примет вид

$$\bar{y}(p) = \frac{p^2 + 2p}{p^2 + 2p - 3} + \frac{F(p)}{p^2 + 2p - 3}. \tag{c}$$

$$\frac{p^2 + 2p}{p^2 + 2p - 3} = \frac{3}{4}\,\frac{p}{p-1} + \frac{1}{4}\,\frac{p}{p+3}.$$

В таблицах операторных соотношений Л — К находим

$$\frac{p^2 + 2p}{p^2 + 2p - 3} \doteq \frac{3}{4}\,e^{t} + \frac{1}{4}\,e^{-3t}.$$

Находим t и z.

$$t=\int_1^x \frac{du}{u^2}=-\frac{1}{x}+1,\quad z=-\frac{1}{v}+1.$$

$$\frac{p^2+2p}{p^2+2p-3} \div \frac{3}{4}e^{-\frac{1}{x}+1}+\frac{1}{4}e^{\frac{3}{x}-3} \tag{d}$$

Находим

$$\frac{F(p)}{p^2+2p-3}.$$

$$\frac{F(p)}{p^2+2p-3}=\frac{1}{4}\frac{F(p)}{p-1}-\frac{1}{4}\frac{F(p)}{p+3}.$$

В силу (1.19) получим:

$$\frac{F(p)}{p^2+2p-3} \div \frac{1}{4}e^{-\frac{1}{x}}\int_1^x e^{\frac{1}{v}}\frac{\sin v}{v^2}\,dv-\frac{1}{4}e^{\frac{3}{x}}\int_2^x e^{-\frac{3}{v}}\frac{\sin v}{v^2}\,dv. \tag{e}$$

Учитывая (c), (d) и (ε), окончательно будем иметь:

$$y(x)=\frac{3}{4}e^{-\frac{1}{x}+1}+\frac{1}{4}e^{\frac{3}{x}-3}+\frac{1}{4}e^{-\frac{1}{x}}\int_1^x e^{\frac{1}{v}}\frac{\sin v}{v^2}\,dv-$$

$$-\frac{1}{4}e^{\frac{3}{x}}\int_1^x e^{-\frac{3}{v}}\frac{\sin v}{v^2}\,dv. \tag{f}$$

В заключение заметим, что (следуя М. Радулеску) можно задавать функцию $\alpha(x)$ и получать из уравнения (3.1) различные виды обыкновенных линейных дифференциальных уравнений с переменным коэффициентом.

ЛИТЕРАТУРА

1. *M. Rădulescu.* O aplicaţie a operatorilor liniari întregi la rezolvarea ecuaţiilor diferenţiale. Buletinul institutului de Petrol, Gaze şi Geologie, Vol. VII, 1964.

2. *Я. И. Скерж-Зенькович.* К теории установившихся капилярно-гравитационных волн конечной амплитуды. ДАН СССР, т. 109, № 5, 1956 г., 913—915.

3

4. *Я. Микусинский.* Операторное исчпсление. ИЛ Москва, 1956 г.

. *В. А. Диткин* и *П. И. Кузнецов.* Справочник по операционному исчислению. ГИТТЛ, Москва, 1951 г.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC BUCUREȘTI
Tomul XXVI — 1964, Fascicola 4

C.Z. 515

UBER DIE AXIALE DARSTELLUNG DES VIERDIMENSIONALEN RAUMES *)

MIHAIL ȘT. BOTEZ

Das Ziel dieser Arbeit ist ein Verhältniss zwischen den Punkten eines euklidischen Raumes (S_4) mit 4 Dimensionen und einem fundamentalen zweidimensionalen Unterraum $\pi \in S_4$ zu finden, so dass der Spur eines Punktes auf der Fläche π ein bestimmter Punkt auf S_4 entspricht.

Deshalb nehmen wir frei gleichebene Achsen α_1, α_2, α_3, ausserhalb der Fläche π an. Die Projektjierungsräume sind durch die Vereinigung des in Betracht gezogenen Elementes: Punkt, Gerade usw. mit jeder der drei Achsen gegeben, und der Schnitt des Projektionsraumes mit der Ebene π ist das entsprechende ebene Bild.

Man konstruiert auf diese Weise ein ebenes Modell für einen euklidischen vierdimensionalen Raum, welcher das Ergebnis einer Anwendung $f: E \to E'$ eines Ensembles E in oder auf ein Ensemble E', das die von T. D. Siebenthal [1] gestellte Bedingung $f(E) = E'$ erfüllt, welche erlaubt die Teile $A \subset E$ durch die Teile $A' \subset E'$ zu beschreiben, wo A' das Bild von A durch f ist.

1. a) *Das Bild eines Punktes.* Es sei M ein von den Punkten der Ebene $[\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3]$ unabhängiger Punkt, seine Bilder sind die Punkte:

$$m_1 = [\alpha_1 M] \cap \pi\ ;\ m_2 = [\alpha_2 M] \cap \pi,\ \text{ und }\ m_3 = [\alpha_3 M] \cap \pi$$

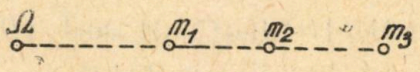


Fig. 1

Venn $\Omega = [\pi_1\ \alpha_2\ \alpha_3] \cap \pi$, und weil $M \cup [\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3] = S_3$ ist, so folgt, dass die Punkte m_1, m_2, m_3 auf einer Geraden $S_1 = S_3 \cap \pi$ liegen werden.

Un da

$$[\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3] \in S_3 \Rightarrow \Omega \in S_1$$

*) Berichtet in der wissenschaftlichen Session des Lehrkörpers des Polytechnischen Instituts in Bukarest, 22—23 Februar 1964.

Also: *Das Bild eines Punktes M ist ein Dreipunkt* (m_1, m_2, m_3), *colinear mit* Ω (Abb. 1). Wir bemerken, dass zwischen dem Punkt M und seinem Bild die Relation $M \Leftrightarrow (m_1\ m_2\ m_3)$ besteht. Weil Ω ein fester Punkt ist, nenne wir ihn *Zeichenrisspol.*

Wenn $M \in [\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3]$, fällt das Bild mit Ω zusammen. Zwei Bildpunkte fallen zusammen, wenn zvei der Achsen α zusammenfallen und als Bild eines Punktes M ein anderer Punkt $m \neq \Omega$, wenn $\alpha_1 \equiv \alpha_2 \equiv \alpha_3$ erlangt wird.

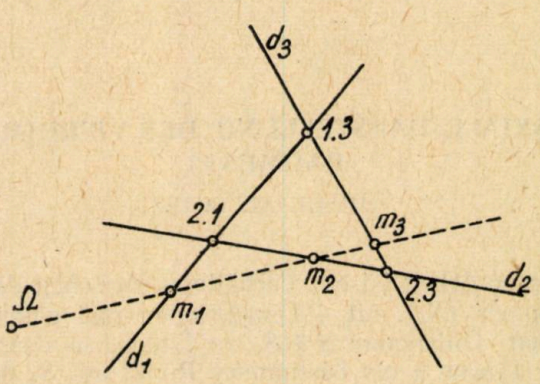


Fig. 2

b) *Das Bild einer Geraden.* Es sei die Gerade $D \notin [\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3]$. Die Projektierungsräume der Geraden sind:

$$\sum_3^1 = D \cup \alpha_1 \ ; \ \sum_3^2 = D \cup \alpha_2 \text{ und } \sum_3^3 D \cup \alpha_3$$

wo $\sum_3^i$ dreidimensionale Räume sind. Das Bild der Geraden D (Abb. 2) ist also der Dreiseitige:

$$d_1 = \sum_3^1 \cap \pi \ ; \ d_2 = \sum_3^2 \cap \pi \text{ und } d_3 = \sum_3^3 \cap \pi$$

Wenn ein Punkt $M \in D$, so erfüllt das Dreipunkt-Bild die Bedingungen: $m_1 \in d_1$, $m_2 \in d_2$ und $m_3 \in d_3$.

Die Punkte (1.2), (1.3) und (2.3) sind die Spuren auf der Ebene π der Ebenen:

$$[D \cap (\alpha_1 \cap \alpha_2)] \ ; \ [D \cup (\alpha_3 \cap \alpha_1)] \text{ und } [D \cup (\alpha_2 \cap \alpha_3)]$$

Wenn $D \in [\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3]$, dann ist sein Bild Ω.

c) *Konkurrente Geraden.* Es seien konkurrente Geraden D und D' (Abb. 3).

Die Geraden

$$(D \cup \alpha_1) \cap \pi = d_1 \ ; \ (D \cup \alpha_2) \cap \pi = d_2 \ ; \ (D \cup \alpha_3) \cap \pi = d_3$$

$$(D' \cup \alpha_1) \cap \pi = d_1' \ ; \ (D' \cup \alpha_2) \cap \pi = d_2' \ ; \ (D' \cup \alpha_3) \cap \pi = d_3'$$

geben die Dreiseitigen $(d_1\ d_2\ d_3)$ und $(d_1'\ d_2'\ d_3')$, welche Bilder der angenommenen Geraden D und D' sind.

Weil :

$$[\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3] \cup [D \cap D'] = \Sigma_3 \text{ und } \Sigma_3 \cap \pi = \Phi \Rightarrow \Omega \in \Phi.$$

Also sind die Dreilateralen $(d_1 d_2 d_3)$, $(d_1' d_2' d_3')$ homolog und haben als Achse Φ und als Zentrum Ω. Die Punkte :

$$i_1 = d_1 \cap d_1', \; i_2 = d_2 \cap d_2' \text{ und } i_3 = d_3 \cap d_3'$$

welche auf Φ liegen, bilden ein Dreipunktbild des Punktes $I = D \cap D'$.

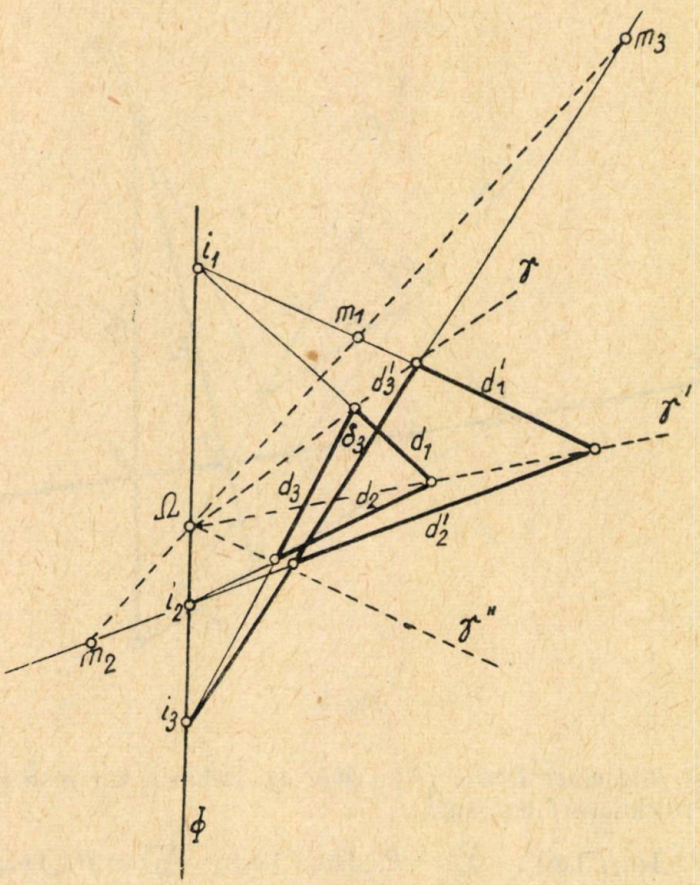


Fig. 3

Wenn I Täger einer Büschelgeraden ist, welche in der Ebene $[D, D']$ liegt, dann sind die Bilder der Büschelgeraden veränderliche Dreiseitigen, deren Seiten mit den Bildern i_1, i_2, i_3 des Punktes I zusammenfallen, weil sie ihn inzident enthalten und deren Spitzen sich auf γ, γ' und γ'' befinden, weil diese Siptzen Spuren der Ebenen, die von der in Betracht gezogenen Geraden und von den Schnittpunkten der Achsen α_i bestimmt werden.

Folglich *haben die Geraden einer Ebene als Bild eine Familie von homologen Dreiecken mit dem Zentrum in* Ω *und mit einer Achse, die Spurraum :*

$$\Sigma_3 = [\alpha_1\, \alpha_2\, \alpha_3] \cup (D \cap D')$$

Wenn ein Punkt $M \in [D,\ D']$, dann ist der Dreipunkt $(m_1\, m_2\, m_3)$ auf die entsprechenden Seiten derselben Dreiseitigen verteilt.

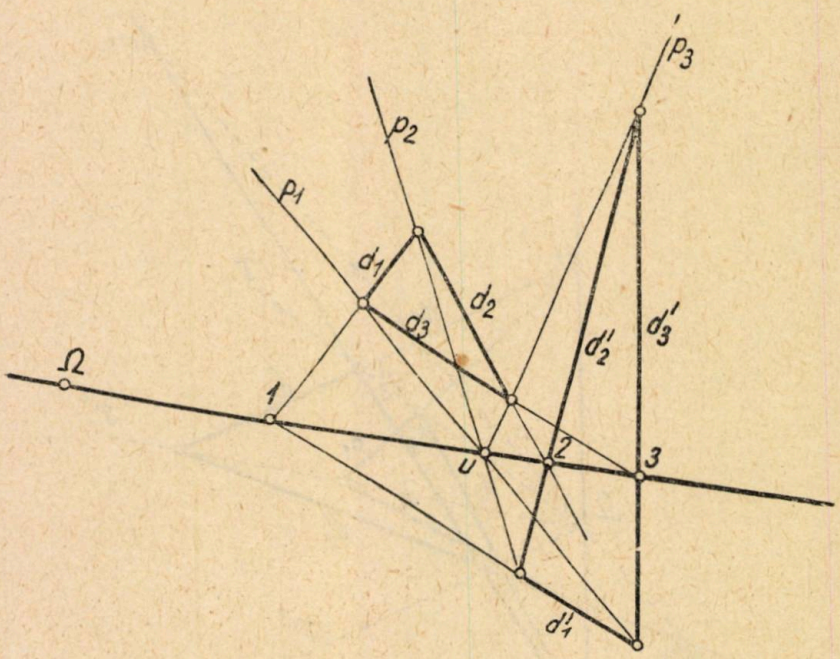


Fig. 4

d) *Das Bild einer Ebene [P] (Abb. 4).* Nehmen wir eine Ebene [P] an. Ihre Projektionsräume sind :

$$\sum_3^1 = P \cup (\alpha_1 \cap \alpha_2)\ ;\quad \sum_3^2 = P \cup (\alpha_2 \cap \alpha_3)\ ;\quad \sum_3^3 = P \cup (\alpha_3 \cap \alpha_1)$$

Die Schnittlinien mit der Ebene π sind die konkurrenten Geraden p_1, p_2, p_3, die im Punkte U zusammentreffen, welcher die Spur der Ebene $[P]$ auf der Ebene π ist.

Die Geraden der Ebene haben als Bild eine Familie von homologen Dreilateralen, deren Spitzen auf den Spuren p_i liegen, weil diese Spitzen Spurebenen, die von der von uns betrachteten Gerade und den Achsenschnittpunkten gebildet werden, das Zentrum U und die Achse ΩU habend.

2. *Bestimmung der Spuren einer* S_i $(i<4)$.

a) *Eine durch 3 Punkte gegebene Spurebene* (Abb. 5) Es sei die Ebene $[P]$ durch drei Punkte A $(a_1\,a_2\,a_3)$, B $(b_1\,b_2\,b_3)$ und C $(c_1\,c_2\,c_3)$ gegeben. Die Dreipunkte $(a_1\,a_2\,a_3)$ ... sind mit Ω colinear. Die Projektionsräume der Ebene $[ABC]$ sind die dreidimensionale Räume:

$$\sum_3^i = [ABC] \cup (\alpha_i \cap \alpha_j) \qquad \binom{i=1,2,3}{j=2,3,1}$$

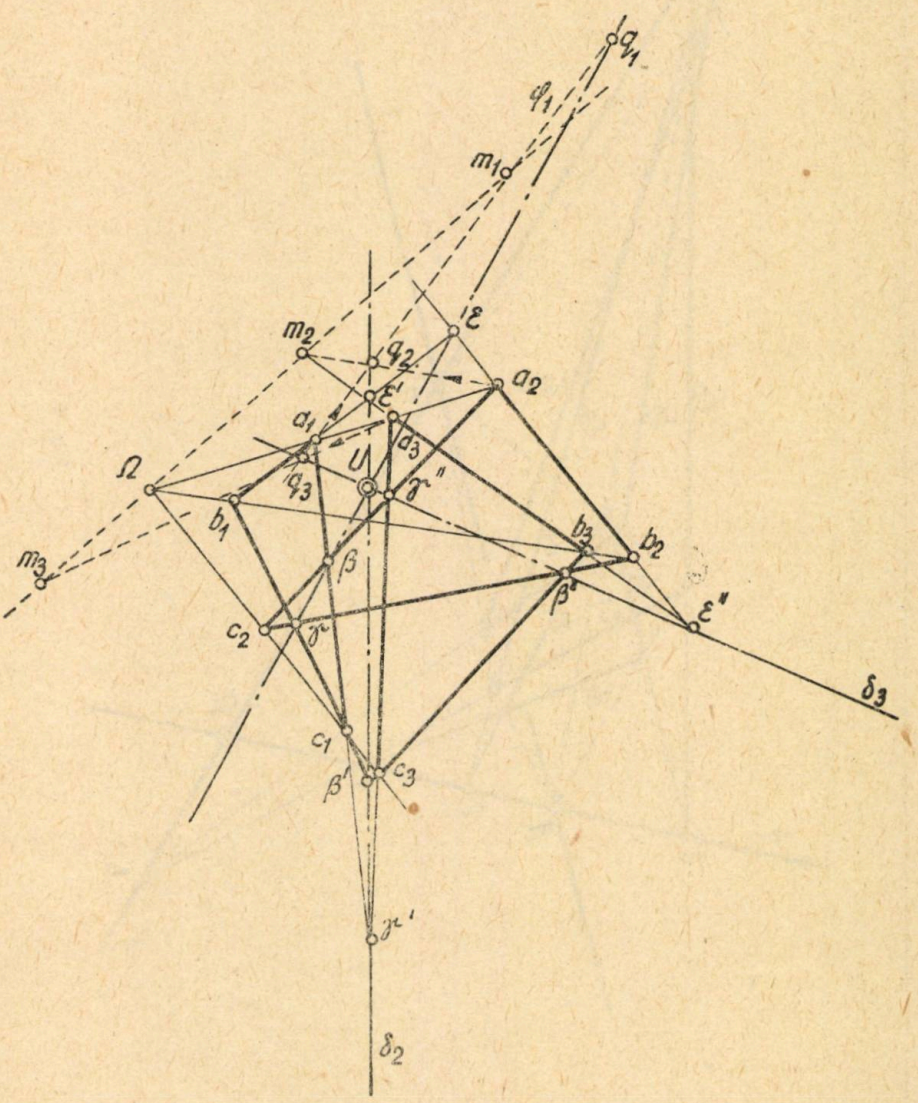


Fig. 5

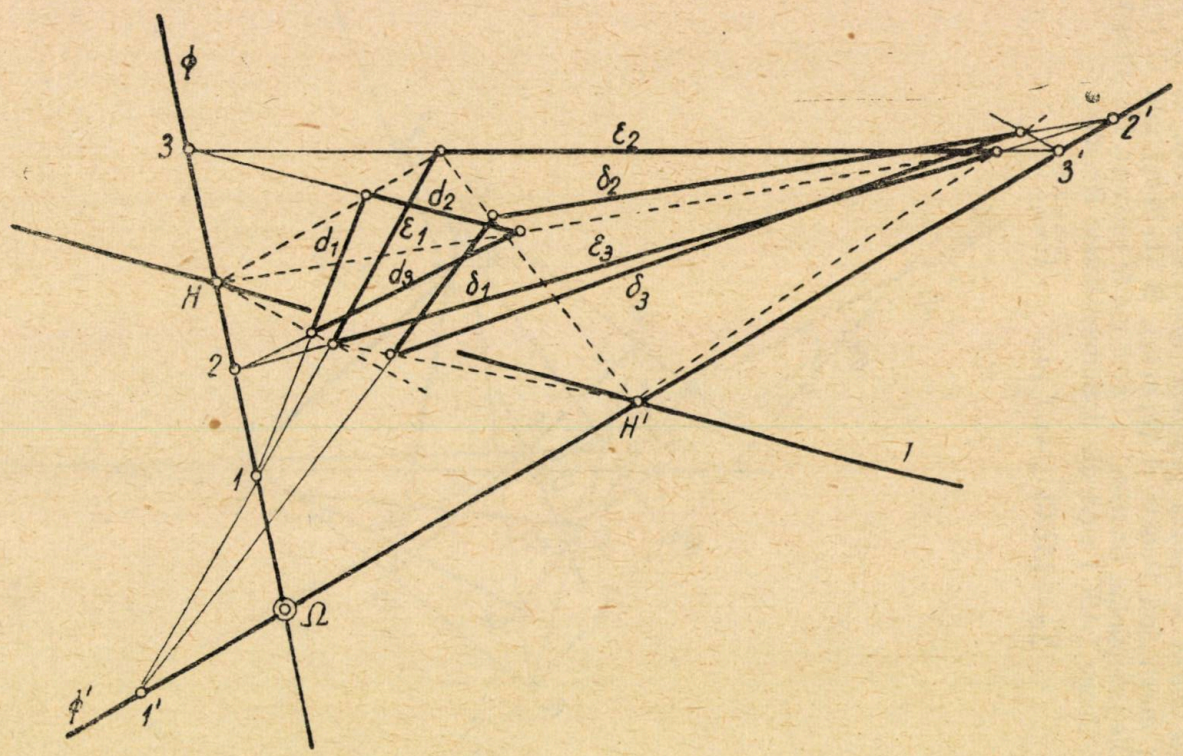


Fig. 6

deren Schnittpunkte mit π konkurrente Geraden δ_i in Ω sind. Um diese Geraden δ_i, $(i=1, 2, 3)$, die Spurebenen der Räume $\sum_3^i$ sind, zu bestimmen, bemerken wir, dass die vorigen Dreiseitigen untereinander homolog sind und das Zentraum Ω haben. Wenn wir je zwei dieser Dreiecke untersuchen, erhalten wir drei ebene Konfigurationen Desargues, deren Schnittpunkte der homologen Seiten $a_1 b_1 \cap a_2 b_2 = \varepsilon$, $a_2 b_2 \cap a_3 b_3 = \varepsilon'$ und $a_3 b_3 \cap a_1 b_1 \ldots$ doch die Geraden δ_i, $(i=1, 2, 3)$ bestimmen, welche auch die homologen Achsen sind. Weil die drei Konfigurationen dasselbe Homologiezentrum haben, sind die Achsen δ_1, δ_2 und δ_3 konkurrent in dem Punkte U, der die Spurebene $[ABC]$ auf der Ebene π ist.

Wenn man eines der Bilder eines Punktes $M \in [P]$ zum Beispiel m_1 kennt, so können wir auch die andern zwei bestimmen. Zu diesem Zwecke verbinden wir m_2 mit a_1. Die Gerade $a_1 m_1 = \varphi_1$ ist eines der Bilder der Geraden $AM \in [ABC]$; es schneidet δ_2 und δ_3 in den Punkten $q_2 = \varphi_1 \cap \varphi_3$ und $q_3 = \varphi_1 \cap \varphi_2$. Der Dreiseitigen $(\varphi_1\ \varphi_2\ \varphi_3)$ ist das Bild der Geraden AM. Also ist das Dreipunkt $(m_1 m_2 m_3)$ das Bild des Punktes M durch die Schnittpunkte φ_2 und φ_3 mit $\Omega\, m_1$ gegeben.

b) *Die Spur einer S_3, die durch zwei nicht inzidente Geraden gegeben ist* (Abb. 6). Es werden zwei nicht inzidente Geraden D und Δ gegeben, die eine S_3 bestimmen. Das Bild der Geraden D ist die Dreilaterale $(d_1 d_2 d_3)$ und das der Geraden Δ den Dreiseitigen $(\delta_1 \delta_2 \delta_3)$, die unter sich nicht homolog sind. Wenn man den Dreiseitigen $(\varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_3)$ homolog zu den zwei gegebenen Dreiseitigen im Verhältnis zu zwei beliebigen Achsen Φ und Φ', die Ω durchziehen, so ist diese Dreiseitige einer ε zu D und Δ konkurrente Gerade. Die entsprechenden Homologiezentren H und H' sind die von den konkurrenten Geraden $[\varepsilon D]$ und $[\varepsilon \Delta[$ bestimmten Spurebene.

Also ist die Spur T des betrachteten Raumes S_3 die Gerade HH'. Aus dem bisher Gesagten geht hervor, dass *das ebene Bild einer S_3 von einer Geraden und einer Dreiseitige gegeben ist.*

Anmerkung

Da vier unabhängige Punkte, die sich auf S_4 befinden eine S_3 bestimmen und gleichzeitig ein Tetraeder bilden, geht hervor, dass das Bild eines Tetraeders von drei Geradenkonfigurationen vom Typus (6_2) gegeben ist, deren entsprechende unabhängige Punkte colinear zu Ω sind. Da der Spurraum S_3 auf der Ebene π eine Gerade ist, so folgern wir, dass irgendein Tetraeder aus S_4 von der Ebene π nach einer Gerade geschnitten wird.

Katheder für darstellende und angewandte Geometrie
Polytechnischen Institut Bukarest

LITERATUR

1. *I. De Siebenthal* — Essai de rénovation de la géométrie descriptive. Mathématique du XX. Siècle, Vol. II, 1961.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC BUCUREȘTI
Tomul XXVI — 1964, Fascicola 4

C.Z. 517.9

SUR UN THÉORÈME DE STURM

I. M. MIU

Dans ce qui suit, nous étudions les racines réelles d'une équation algebrique.

Dans nos traveux [1], [2], [3], nous avons publié un théorème sur les zéros de la fonction $f(x)$ définie sur $[a, b]$ et dérivables sur (a, b).

Nous avons indiqué les applications de ce théorème aux équations algebriques ainsi :

Théorème : Soit l'équation :

$$P(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \cdots + a_{n-1} x + a_n = 0. \tag{1}$$

Quels que soient les polynômes $S(x)$ et $Q(x)$, les racines réelles des équations

$$\left.\begin{aligned} F(x) = S(x) P(x) + Q(x) P'(x) = 0 \\ Q(x) = 0 \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

séparent les racines réelles de l'équation (1).

Quand l'équation (1) n'a aucune racine multiple, on peut déterminer, de plusieurs manieres les polynômes $S(x)$, $Q(x)$, telle que si n' et n'' sont les degrés des équations (2) on a

$$n' + n'' = n - 1$$

et en particulier $n' \approx n'' \approx \dfrac{n-1}{2}$.

Dans la pratique, quoique les degrés des équations (2) sont $\approx \dfrac{n-1}{2}$, souvent elles sont difficiles d'être résolues.

Dans ce qui suit, nous donnerons des méthodes, qui permettront de réduire encore les degrés des quations (2). Nous suposons, que l'équation (1) a seulement ses racines simples.

Nous utilisons le théorème de Sturm jusqu'à un moment convenable et ensuite le théorème que nous avons indiqué, ou le théorème de Rolle, c'est-à-dire des méthodes mixtes.

Le théorème de Sturm :

On donne une équation (1), qui n'a pas de racines égales. Nous poserons à la fois $P(x)=X$ et $P'(x)=X_1$

Divisons alors X par X_1, jusqu'à ce que nous soyons arrivés à un reste de degré inférieur au degré de X_1.

Désignons par X_2 ce reste changé de signe. Divisons de même X_1 par X_2, et poursuivons la division jusqu'à ce que nous parvenions à un reste de degré inférieur à X_2.

Désignons par X_3 ce reste aussi changé de signe.

En continuant les operations de la même manière, c'est-à-dire, en ayant toujours soin de changer les signes de tous les termes de chaque reste, avant de prendre ce reste pour nouveau diviseur, nous arriverons, après un certain nombre de division, à un reste numérique.

Désignons X_p ce reste numérique également changé de signe. On obtiendra ainsi une suite.

$$X, X_1, X_2, X_3 \cdots X_{p-1}, X_p. \tag{3}$$

Soient deux nombres réels quelqunques, α et $\beta > \alpha$; substituons — les succesivement à la place de x dans la suite (3). Pour chaque substitution, la suite (3) présentera donc un certain nombre de variations. Le nombre des variations perdues en passant de la substitution $x=\alpha$ à la substitution $x=\beta$, est exactement le nombre des racines réelles de l'équation $P(x)=X=0$, comprises entre les deux nombres α et β.

L'application du théorème de Sturm dans certains cas donne des celculs très longs.

Par exemple si nous appliquons le théorème de Sturm à l'équation :

$$X = x^6 + x^5 - x^4 - x^3 + x^2 - x + 1,$$

le dernier terme de la suite Sturm a 44 chiffres.

Montessus de Ballore, dans [4], a donné une variante du théorème de Sturm, mais les calculs ne sont pas toujours assez simples, même avec sa méthode.

La méthode de Sturm avec le théorème indiqué par nous

Nous trouvons la suite Sturm jusqu'à une certaine fonction X_q et ensuite nous appliquons le théorème indiqué par nous.

Nous déterminons la suite Sturm jusqu-à une fonction X_q en tenant compte des considérations suivantes :

— La suite Sturm $X, X_1, X_2 \ldots X_q$, ne doit pas nécessiter de trop longs calculs.

— En appliquant aux équation $X_{q-1} = 0$, $X_q = 0$ notre théorème pour séparer leurs racines réelles, les équations obtenues ne doivent pas avoir les degrés plus grandes, pour être facilement résolues.

Nous nous proposons de trouver le nombre de racines réelles de l'équation (1), qui sont comprises entre α et $\beta > \alpha$.

Soit la suite de Sturm jusqu'à une certaine fonction X_q :

$$X, X_1, X_2, \cdots X_{q-2}, X_{q-1}, X_q. \tag{4}$$

Les équations qui résulte du théorème indiqué par nous pour l'équation $X_{q-1} = 0$ sont :

$$S_{q-1} X_{q-1} + Q_{q-1} X'_{q-1} = 0, \quad Q_{q-1} = 0 \tag{5}$$

ou S_{q-1}, Q_{q-1}, sont de polynômes en x tellement choisis, que si μ est le degré de l'équation $X_{q-1} = 0$, les équations aient leurs degrés $\approx \frac{\mu - 1}{2}$ (la somme des leurs degrés soit $\mu - 1$).

Aussi en appliquant notre théorème à l'équation $X_q = 0$, nous avons :

$$S_q X_q + Q_q X'_q = 0, \quad Q_q = 0 \tag{6}$$

où les polynômes S_q, Q_q en x se déterminent de telle sorte, que si ν est le degré de l'équation $X_q = 0$, alors les équations (6), doivent avoir leurs degrés $\approx \frac{\nu - 1}{2}$.

Pour trouver le nombre de racines réelles de l'équation (1) comprises entre α et β, nous procédons ainsi :

— On résout les équations (5). et soit :

$$\alpha_1 < \alpha_2 < \alpha_3 < \cdots < \alpha_r$$

leurs racines réelles.

— On résout aussi les équations (6), et soit leurs racines réelles :

$$\beta_1 < \beta_2 < \beta_3 < \cdots < \beta_s.$$

— Nous formons une suite en disposant dans le tableau no. 1, en ordre croissant, les nombres α, β, et les racines des équations (5) et (6).

Le tableau no. 1

x	$-\infty$	β_1	α_1	α	β_2	β_3	ξ	$\alpha_2 \cdots \beta_s$	α_r	β
X_{q-1}	$-$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$- \cdots -$	$+$	$+$
X_q	$+$	$+$	$+$	$+$	$-$	$-$	$+$	$+ \cdots -$	$-$	$+$

Notons avec $N_j(c)$, le nombre des variations dans la suite X, X_1, $X_2, \ldots X_j$ pour $x = c$.

Pour trouver le nombre des racines réelles de l'équation $X = 0$, comprises entre α et β, nous cherchons le nombre des racines de cette équation entre deux termes consécutifs de la suite, en tenant compte des propriétés des fonctions de Sturm. Ainsi les polynômes X_{q-1}, X_q conserventi, le même signe ou changent au plus unei fois entre deux nombres consécutifs du tableau no. 1 telle comme il est indiqué dans ce tableau.

Si l'on considère X_{q-1} et X_q, les deux terms consécutifs de la suite Sturm considérés plus haut, nous pouvons avoir dans le tableau nr. 1 les situations suivantes :

a)

x	c_1		c_2
X_{q-1}	+	+	+
X_q	+	0	−

b)

x	c_1		c_2
X_{q-1}	−	−	−
X_q	−	0	+

c)

x	c_1		c_2
X_{q-1}	+	+	+
X_q	−	0	+

d)

x	c_1		c_2
X_{q-1}	−	−	−
X_q	+	0	−

e)

x	c_1	c_2
X_{q-1}	+	−
X_q	−	+

f)

x	c_1	c_2
X_{q-1}	−	+
X_q	+	−

Les cas où X_q conserve le même signe, ne présente aucune difficulté.

Dans les cas *a*), *b*), *c*), *d*), le nombre des racines réelles de l'équation $X=0$, comprises entre c_1 et c_2 sont respectivement :

$$a) \quad n_{c_1 c_2} = N_{q-1}(c_1) - N_{q-1}(c_2) = N_q(c_1) - N_q(c_2) + 1$$

$$b) \quad n_{c_1 c_2} = N_{q-1}(c_1) - N_{q-1}(c_2) = N_q(c_1) - N_q(c_2) + 1$$

$$c) \quad n_{c_1 c_2} = N_{q-1}(c_1) - N_{q-1}(c_2) = N_q(c_1) - N_q(c_2) - 1$$

$$d) \quad n_{c_1 c_2} = N_{q-1}(c_1) - N_{q-1}(c_2) = N_q(c_1) - N_q(c_2) - 1$$

Dans les cas *e*) et *f*) on cherche un certain nombre ξ compris entre c_1 et c_2, de telle sorte que pour $x=\xi$ les fonctions X_{q-1} et X_q aient le même signe.

De cette façon, nous avons réduit les cas *e*) et *f*) aux cas *a*), *b*), *c*), *d*).

Les nombres ξ déterminés comme plus haut, pour les cas *e*) et *f*), seront introduits dans le tableau nr. 1.

En tenant compte de ce qui précèdent, le nombre des racines réelles de l'équation (1), comprises entre α et β est :

$$n_{\alpha\beta} = \sum_{c_i=\alpha} [N_q(c_i) - N_q(c_{i+1}) \pm 1] \text{ jusqu'à } c_{i+1} = \beta .$$

Dans cette formule on prend $+1$ dans les cas $a)$, $b)$, et on prend -1 dans le cas $c)$, $d)$.

Il résulte que le nombre des racines réelles de l'équation $X=0$, comprises entre α et β, est donnée par la formule :

$$n_{\alpha\beta} = N_q(\alpha) - N_q(\beta) + \eta_1(\alpha, \beta) - \eta_2(\alpha, \beta), \tag{7}$$

où $\eta_1(\alpha, \beta)$, est le nombre total des cas $a)$, $b)$, contenues entre α et β et $\eta_2(\alpha, \beta)$, est le nombre total des cas $c)$, $d)$, contenues entre α et β.

Dans les cas $a)$, $b)$, le rapport $\frac{X_q}{X_{q-1}}$ passera d'une valeur positive à une valeur négative et dans les cas $c)$, $d)$, ce rapport passera d'une valeur négative à une valeur positive.

Donc, il faut observer comment le rapport $\frac{X_q}{X_{q-1}}$ change de signe pour les valeurs consécutives de x contenues dans le tableau.

Quand $\frac{X_q}{X_{q-1}}$ passera de $+$ à $-$, pour les valeurs consécutives de x contenues dans le tableau no. 1 comprises entre α et β, on ajoute au $N_q(\alpha) - N_q(\beta)$ une unité, et quand ce rapport passera de $-$ à $+$, on diminue $N_q(\alpha) - N_q(\beta)$ avec une unité.

§ 2. *La méthode Sturm avec le théorème de Rolle*

On procède analoguement comme dans le cas précédent.

On forme la suite Sturm jusqu'à une certaine fonction.

On résout les équations $X'_{q-1} = 0. X'_q = 0$, et avec ses racines, disposées en ordre croissant, se forme un tableau de la même façon comme dans la méthode précédente.

Ensuite, on procède de la même manière comme dans la méthode spécifiée.

Nous avons le desavantage, en comparaison avec la méthode antérieure, parceque les équations $X'_{q-1} = 0$, $X'_q = 0$ sont généralement plus difficilles à résoudre.

§ 3. *Applications*

Exemple 1. Trouver le nombre des racines réelles de l'équation :

$$x^7 - 7x^6 + 21x^5 - 21x^4 - 42x^3 - 7x + 1 = 0$$

et trouver aussi la nombre de racines situées entre $-\frac{1}{3}$ et $\frac{1}{3}$.

Désignons en effet par :

$$X = x^7 - 7x^6 + 21x^5 - 21x^4 - 42x^3 - 7x + 1$$

et on trouve les termes de la suite Sturm. An employant ici les notations dont nous avons déjà fait usage on aura :

$$X_1 = x^6 - 6x^5 + 15x^4 - 12x^3 + 18x^2 - 1$$
$$X_2 = -x^4 + 6x^3 + 3x^2 + x$$
$$X_3 = -97x^3 - 36x^2 - 18x + 1$$

En employant le théorème que nous avons indiqué pour $X_2=0$, on a :

$$\left.\begin{aligned} \lambda X_2 + (x+\alpha) X_2' = 0 \\ x + \alpha = 0 \end{aligned}\right\} \qquad (a_1)$$

On obtient $\lambda = -4$, $\alpha = 0$, et les équations (a_1) donne la solution réelle :

$$x = 0.$$

Avec le même théorème appliqué à l'équation $X_3=0$, on a

$$\left.\begin{aligned} \mu X_3 + (x+\beta) X_3' = 0 \\ x + \beta = 0 \end{aligned}\right\} \qquad (a_2)$$

On trouve $\mu = -3, \beta = \frac{12}{97}$ et le système (a_2) donne les solutions :

$$x = -\frac{12}{97}, \quad x = \frac{169}{876}.$$

Nous posons les valeurs de x obtenues, dans un tableau comme nous l'avons déjà indiqué, et on aura :

Le tableau no. 2

x	$-\infty$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{12}{97}$	0	$\frac{169}{876}$	$\frac{1}{3}$	$+\infty$
X_2	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$-$
X_3	$-$	$+$	$+$	$+$	$-$	$-$	$-$

Pour trouver le nombre de variations de la suite nous faisons le tableau nr. 3.

Le tableau no. 3

x	$-\infty$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{12}{97}$	0	$\frac{169}{876}$	$\frac{1}{3}$	$+\infty$
X	$-$	$+$	$+$	$+$	$-$	$-$	$+$
X_1	$+$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$+$
X_2	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$-$
X_3	$+$	$+$	$+$	$+$	$-$	$-$	$-$

En appliquant la formule (7) on trouve: le nombre des racines réelles de l'équation donnée entre $-\infty$ et $-\frac{1}{3}$ est:

$$n_1 = (3-2) = 1,$$

entre $-\frac{1}{3}$ et $-\frac{12}{97}$ est:

$$n_2 = (2-2) = 0 \text{ racines},$$

entre $-\frac{12}{97}$ et 0 est:

$$n_3 = (2-2) = 0 \text{ racines},$$

entre 0 et $\frac{169}{876}$ est:

$$n_4 = (2-2)+1 = 1 \text{ racine},$$

entre $\frac{169}{876}$ et $\frac{1}{3}$ est:

$$n_5 = (2-2) = 0 \text{ racines},$$

entre $\frac{1}{3}$ et ∞ est: $n_6 = (2-1) = 1$ racine.

Entre $-\frac{1}{3}$ et $\frac{1}{3}$ il y a au total une racine réelle.

Observation. Si pour $x = x_i$ nous obtenons dans le tableau une valeur zéro pour un terme de la suite $X, X_1, \ldots X_q$, nous pouvons prendre une valeur très approché de x_i, à gauche ou à droite de x_i.

Exemple 2: On demande de séparer les racines réelles de l'équation:

$$f(x) = x^5 - 5x^4 + 10x^2 - 5x + 3 = 0$$

Nous séparons les racines réelles avec le théorème indiqué par nous dans [1], parceque les équations qu'on obtient sont de deuxième degré.

Nous avons les équations :

$$P(x)f(x)+Q(x)f'(x)=0$$
$$Q(x)=0$$

Et on a alors :

$$(-x+\lambda)(x^5-5x^4+10x^2-5x+3)+(x^2+\alpha x+\beta)(x^4-4x^3+4x-1)=0$$
$$x^2+\alpha x+\beta=0$$

La première équation est de deuxième degré pour $\alpha=-\frac{7}{2}$, $\beta=-\frac{3}{2}$, $\lambda=\frac{5}{2}$.

Pour ces valeurs, les équations précédentes deviennent :

$$\left.\begin{aligned}5x^2-6x+3=0\\2x^2-7x-3=0\end{aligned}\right\} \qquad (b_1)$$

Les racines réelles des équations (b_1) séparent les racines de l'équation donnée.

La prémière équation de (b_1) a ses racines complexes et la deuxième donne :

$$x_{1,2}=\frac{7\pm\sqrt{73}}{4}$$

Nous formons le tableau nr. 4.

Le tableau no. 4

x	$-\infty$	$\frac{7-\sqrt{73}}{4}\sim-0{,}385$	$\frac{7+\sqrt{73}}{4}\sim 3{,}87$	$+\infty$
$f(x)$	$-$	$+$	$-$	$+$

L'équation donnée a trois racines réelles, situées dans les intervales.

$$\left(-\infty,\frac{7-\sqrt{73}}{4}\right),\ \left(\frac{7-\sqrt{73}}{4},\ \frac{7+\sqrt{73}}{4}\right),\ \left(\frac{7+\sqrt{73}}{4},\ +\infty\right)$$

La chaire de mathematique
Institut polytehnique Bucarest

LITTÉRATURE

[1] *I. M. Miu* — Sur un théorème et une généralisation du théorème de la moyenne (Buletinul Institutului Politehnic, Buc. Tom XXV, fascicola 6, 1963).

[2] *I. M. Miu* — Une nouvelle méthode de séparation des racines réelles des équations (Buletinul Institutului Politehnic Bucureşti, Tom XXV, fascicola IV, 1963.

[3] *I. M. Miu* — Sur les zéros réels de certaines fonctions (Buletinul Institutului Politehnic Bucureşti, Tom XXVI, fascicola 1, 1964).

[4] Montessus de Ballare. Nouvelles Annales des Mathématique, 1909.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC BUCUREȘTI
Tomul XXVI — 1964, Fascicola 4

CHIMIE ANORGANICĂ

C.Z. 66.028 : 546.681 : 546.68 : 546.683.3

METODE DE DOZARE RAPIDĂ A GALIULUI, INDIULUI ȘI TALIULUI

GR. TEODORESCU, ILEANA NICULESCU, FLORICA POPESCU, ANA MARIA IANCU

În lucrarea de față s-au stabilit condițiile de dozare a elementelor rare galiu, indiu, taliu, separat și unul în prezența celuilalt. Lucrarea s-a făcut la sugestia Ministerului Industriei Petrolului și Chimiei, pentru găsirea unor metode rapide de dozare a acestor elemente care se găsesc în cantități mici în diferite concentrate.

Ca metodă de dozare a acestor ioni, s-a folosit aceea volumetrică pentru a permite dozarea unui ion în prezența celorlalți fără a fi necesară o prealabilă separare a acestuia din amestec. Deoarece majoritatea reactivilor clasici nu permit acest lucru, ne-am orientat cercetările asupra dozărilor cu complexoni, dozări foarte precise și rapide și care se pretează bine la dozarea cantităților mici de elemente cum este cazul concentratelor mai sus menționate.

Pentru dozările complexonometrice s-a folosit coplexon III (EDTA) sarea disodică a acidului etilendiamino-tetra acetic cristalizat cu două molecule de apă, substanță etalon stabilă în soluție. Ca indicator s-a folosit negru eriocrom T care virează net la pH 8—10.

Principiul metodei. În general majoritatea cationilor pot fi dozați direct cu complexoni. În acest fel s-a putut doza indiu care în mediu amoniacal de tartrat de sodiu, formează un complex foarte stabil. La dozarea taliului nu s-a putut folosi metoda directă de dozare deși aceasta formează un complex suficient de stabil cu complexonul, deoarece nu reacționează cu indicatorul. Pentru dozarea lui s-a folosit metoda de deplasare cu complexonat de magneziu. Titrarea directă a galiului în mediu de tartrat de sodiu ca și în cazul indiului, nu este posibilă, deoarece galiul formează cu indicatorul un complex puțin stabil. Galiu nu poate fi determinat nici prin retitrarea excesului de complexoni cu sare de magneziu datorită instalabității culorii la echivalență. Aceasta se datorează tendinței galiului de a forma în mediu alcalin cu ușurință hidrocomplexi de forma $GaOHY^{2-}$ puțin stabili. Titrarea poate fi efectuată cu rezultate bune folosind pentru deplasare o sare de zinc.

Modul de lucru

Dozarea indiului trivalent din amestecul de săruri de galiu, indiu, taliu.

Într-o probă din amestec, ce conține 2 ml sare de indiu, se adaugă 2 ml sare Seignette și 2 ml soluție tampon. Se încălzește, se adaugă aproximativ 1 mg indicator negru eriocrom T și se titrează cu soluție complexon III pînă la virarea culorii în albastru.

Calcul:

1 ml soluție 0,01 m complexon corespunde la 0,00114 g In
g In (în probă) = ml complexon × 0,00114

Dozarea taliului trivalent.

Într-o probă din amestec ce conține 2 ml soluție de sare de taliu, se adaugă 2 ml sare Seignette, 5 ml soluție tampon, 10 ml complexonat de magneziu. Se adaugă în continuare aproximativ 5 mg indicator negru eriocrom *T* și se titrează cu complexon pînă, la virarea culorii în albastru violet.

Calcul:

1 ml soluție 0,01 m complexon corespunde la 0,00204 Tl
g Tl (în probă) = ml complexon × 0,00204.

Dozarea galiului trivalent.

Într-o probă din amestec care conține 2 ml soluție sare de galiu se adaugă 1,5 ml soluție tampon, 5—6 picături soluție clorură de amoniu 15 ml soluție complexon III și aproximativ 8 mg indicator negru eriocrom T. Se diluează și se titrează cu o soluție 0,01 m sulfat de zinc de facor cunoscut pînă la virarea culorii de la albastru la roșu.

Calcul:

1 ml soluție 0,01 m complexon corespunde la 0,00069 g Ga
g Ga (în probă) = (A—B.f) 0,00069 unde:
A = nr. ml complexon luat în analiză
B = nr. ml soluție 0,01 m sulfat de zinc
f = facorul soluției 0,01 m de sulfat de zinc

Pe același principiu s-au făcut determinări de galiu, indiu și taliu luate în amestec în diferite rapoarte. Rezultatele sînt date în tabelele anexate.

Reactivi folosiți.

— soluție 0,01 m complexon III
— soluție 0,01 m complexonat de magneziu
— soluție tampon bazică (pH = 10) conținînd la 1 litru 54 g clorură de amoniu și 350 ml amoniac concentrat.

— indicator, amestec solid de negru eriocrom *T* și clorură de sodiu, în raportul 1/100. (se recomandă ca indicatorul să fie proaspăt preparat pentru a observa bine virajul).

— soluție 0,01 m sulfat de zinc

— soluție 5% sare Seignette

— soluție saturată de clorură de amoniu

Concluzie. Rezultate foarte precise se obțin la amestecurile ce conțin cantități egale sau puțin diferite din fiecare component. La amestecuri ce conțin cantități mult mai mari de galiu sau taliu față de ceilalți doi componenți, precizia dozărilor scade.

Catedra de chimie anorganică și analitică
Institutul politehnic București

BIBLIOGRAFIE

1. *I. B. Korenman* — Chimia analitică a taliului (1960).
2. *R. Pribil* — Complexonii în chimia analitică (1961).
3. *A. I. Busev* — Chimia analitică a indiului (în rusește) (1958). Academia de știință din Moscova.
4. *P. Bretegue* — Contribuții la studiul chimiei galiului și a compușilor săi. Bul. Soc. Chim. France nr. 12 dec. 1961.
5. *W. Froley, R. Pottie* — Taliul. — *Fresenius Z.* Anal. Chem. nr. 5 martie 1957.
6. *A. Busev, V. Tiptova* — Chimia analitică a taliului. An. Rom. Sov. (Chim.) nr. 1 (1961).
7. *A. Busev, V. Tiptova* — Studii în domeniul analitic a taliului. Determinarea complexonometrică a taliului. J. Anal. Himii vol. XIII nr. 2, martie—aprilie 1958.

TABEL 1

Ga/In/Tl	Ga, In, Tl ml	Ga	In	Tl	Ga	In	Tl	Ga	In	Tl
		grame luate			grame găsite			eroare (grame)		
1 1 1	1 1 1	0,00071	0,00120	0,00200	0,00072	0,00140	0,00190	0,00001	0,00020	0,00010
	2 2 2	0,00140	0,00240	0,00400	0,00110	0,00230	0,00380	0,00030	0,00010	0,00020
	3 3 3	0,00210	0,00360	0,00600	0,00180	0,00340	0,00620	0,00030	0,00020	0,00020
	4 4 4	0,00280	0,00480	0,00800	0,00250	0,00510	0,00730	0,00030	0,00030	0,00080
2 1 1	2 1 1	0,00130	9,00120	0,00200	0,00120	0,00110	0,00190	0,00010	0,00020	0,00010
	4 2 2	0,00280	0,00240	0,00400	0,00284	0,00230	0,00390	0,00004	0,00010	0,00010
	6 3 3	0,00420	0,00360	0,00300	0,00410	0,00380	0,00620	0,00010	0,00020	0,00020
1 2 1	1 2 1	0,00071	0,00240	0,00200	0,00074	0,00250	0,00210	0,00033	0'00010	0,00010
	2 4 2	0,00140	0,00480	0,00800	0,00146	0,00489	0,00810	0,00006	0,00010	0,00010
	3 6 3	0,00310	0,00720	0,00600	0,00320	0,00730	0,00607	0,00010	0,00010	0,00007
1 1 2	1 1 2	0,00071	0,00120	0,00400	0,00074	0,00130	0,00460	0,00003	0,00010	0,90006
	2 2 4	0,00140	0,00240	0,00800	0,00150	0,00260	0,00810	0,00010	0,0002	0,00010
	3 3 6	0,00210	0,00360	0,00200	0,00212	0,00370	0,01211	0,00002	0,00010	0,00010
1 2 2	1 2 2	0,00071	0,00240	0,00400	0,00076	0,00250	0,00401	0,00006	0,00010	0,00001
	2 4 4	0,00140	0,00480	0,00800	0,00145	0,00247	0,00807	0,00005	0,00007	0,00007
	3 6 6	0,00210	0,00720	0,01200	0,00220	0,00750	0,01210	0,00010	0,00030	0,00010
2 2 1	2 2 1	0,00149	0,00240	0,00200	0,00150	0,00246	0,00201	0,00010	0,00006	0,00001
	4 4 2	0,80280	0,00480	0,00400	0,00290	0,00480	0,00410	0,00010	0,00009	0,00010
	6 6 3	0,00420	0,00720	0,00600	0,00430	0,00730	0,00610	0,00010	0,00010	0,00010

TABEL 2

Ga/In/Tl	Ga, In, Tl ml	Ga	In	Tl	Ga	In	Tl	Ga	In	Tl
		grame luate			grame găsite			eroare (grame)		
5 1 1	5 1 1	0,00350	0,00120	0,00200	0,00360	0,00120	0,00210	0,00010	0	0,00010
	10 2 2	0,00700	0,00240	0,00400	0,00710	0,00248	0,00407	0,00010	0,00008	0,00007
	20 4 4	0,01400	0,00480	0,00800	0,01410	0,00470	0,00810	0,00010	0,00010	0,00010
1 5 1	1 5 1	0,00071	0,006000	0,00200	0,00071	0,00607	0,00210	0	0,00007	0,00010
	2 10 2	0,00142	0,01200	0,00400	0,00143	0,01300	0,00420	0,00010	0,00100	0,00020
	4 20 4	0,00180	0,02400	0,00800	0,00281	0,02410	0,00820	0,00001	0,00010	0,00020
1 1 5	1 1 5	0,00071	0,00120	0,01000	0,00072	0,00130	0,01050	0,00003	0,00010	0,00050
	2 2 10	0,00142	0,00240	0,02000	0,00101	0,00250	0,02080	0,00040	0,00010	0,00080
	4 4 20	0,00284	0,00480	9,04000	0,00190	0,00493	0,0490	0,00090	0,00010	0,00800

TABEL 3

Ga/In/Tl	Ga,In,Tl ml	Ga	In	Tl	Ga	In	Tl	Ga	In	Tl
		grame luate			grame găsite			eroare (grame)		
3 1 1	3 1 1	0,00220	0,00125	0,00210	0,00213	0,00120	0,00200	0,00013	0,00005	0,00010
	6 2 2	0,00430	0,00260	0,00430	0,00426	0,00240	0,00400	0,00006	0,00020	0,00030
	9 3 3	0,00630	0,00370	0,00640	0,00569	0,00360	0,00600	0,00060	0,00010	0,00040
1 3 3	1 3 1	0,09071	0,00370	0,00220	0,00071	0,00360	0,002000	0,	0,00010	0,00020
	2 6 2	0,00150	0,00729	0,00425	0,00142	0,00720	0,00300	0,00012	0,00020	0,00025
	3 9 3	0,00220	0,01090	0,00640	0,00213	0,01080	0,00600	0,00013	0,00010	0,00040
1 1 3	1 1 3	0,00073	0,00130	0,00642	0,00071	0,00120	0,00600	0,00002	0,00010	0,00040
	2 2 6	0,00149	0,00260	0,01230	0,00142	0,00240	0,01200	0,00007	0,00020	0,00030
	3 3 9	0,00217	0,00370	0,01885	0,00213	0,00360	0,01800	0,00004	0,00010	0,00008
1 3 3	1 3 3	0,00077	0,00369	0,00650	0,00071	0,00360	0,00600	0,00007	0,00009	0,00050
	2 6 6	0,00150	0,00720	0,01231	0,00142	0,00720	0,01200	0,00010	0,	0,00030
	3 9 9	0,00220	0,01082	0,01884	0,00213	0,01080	0,01800	0,00010	0,00020	0,00040
3 3 1	3 3 1	0,00219	0,00370	0,00211	0,00213	0,00360	0,00200	0,00006	0,00010	0,00010
	6 6 2	0,00450	0,00730	0,00432	0,00426	0,00720	0,00400	0,00036	0,00010	0,00030
	9 9 3	0,00631	0,01080	0,00650	0,00569	0,01080	0,00600	0,00060	0,	0,09050

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC BUCUREȘTI
Tomul XXVI — 1964, Fascicola 4

TEORIA VIBRAȚIILOR

C.Z. 621.37

DEMONSTRATION VON SCHWINGUNGSTECHNISCHEN ERSCHEINUNGEN MIT HILFE VON ANALOGRECHNERN

GY. LUDVIG
Technische Universität, Budapest

Der Hochschulunterricht wird wesentlich wirkungsvoller, wenn die vorgetragenen Thesen auch durch Experimente dargestellt werden können. Dies gilt besonders für die Schwingungslehre, deren Zusammenhänge von der Zuhörerschaft zum ersten Mal gehört, ziemlich abstrakt erscheinen. Unseren bisherigen Erfahrungen entsprechend werden die Zusammenhänge der Statik und der Festigkeitslehre viel schneller von der Zuhörerschaft verstanden als die Prinzipien der Dynamik.

Schwingungserscheinungen sind mit elektronischen Analogrechnern gut darstellbar, wobei Arbeitsweise und Prrinzip, sowie Konstruktionseinzelheiten der Maschine nicht unbedingt dargelegt werden müssen. Mit Rücksicht auf die grosse Zahl der an unseren Universitäten studierenden Hochschüler und au die für die Darstellung zur Verfügung stehende kurze Zeit musste eine Lösung gefunden werden, mit Hilfe Erscheinungen auf dem Gebiet der Schwingungslehre, sei es auch für 3—400 Studenten, nacheinander vorgeführt werden können. Dies bedeutet, dass im Vortragsraum keine Zeit zur Programmierung der einzelnen Aufgaben zur Verfügung steht, sondern dass die den einzelnen Aufgaben entsprechenden Schaltungen bereits vorher aufgebaut werden müssen.

Eben deshalb wurde der Analogrechner des Lehrstuhles Technische Mechanik der Technischen Universität, Budapest, Typ MN-7 (ein sowietisches Erzeugnis) durch eine Umschalteinrichtung ergänzt. Die im weiteren beschriebene Unschalteinrichtung wurde unter Anleitung des Autors durch einen wissenschaftlichen Studentenkreis entwickelt und hergestellt.

Den einzelnen Stellungen des siebenstufigen Hauptschalters entspricht folgendes :

1. Ungedämpfte Schwingungen
2. Gedämpfte Schwingungen
3. Negative Dämpfung (selbsterregte Schwingungen)
4. Schwebung

5. Fremderregte Schwingungen
6. Dämpfung durch Coloumb'sche Reibung
7. Darstellung der Lissajous'schen Figuren.

In das Gehäuse des Programmumschalters wurden 2 Potentiometer eingebaut. Mit dem ersten kann die Erregungsfrequenz, mit dem zweiten hingegen die positive, bzw. negative Dämpfung des Systems geregelt werden.

Das Schaltschema des Apparates ist im Bild 1 dargestellt.

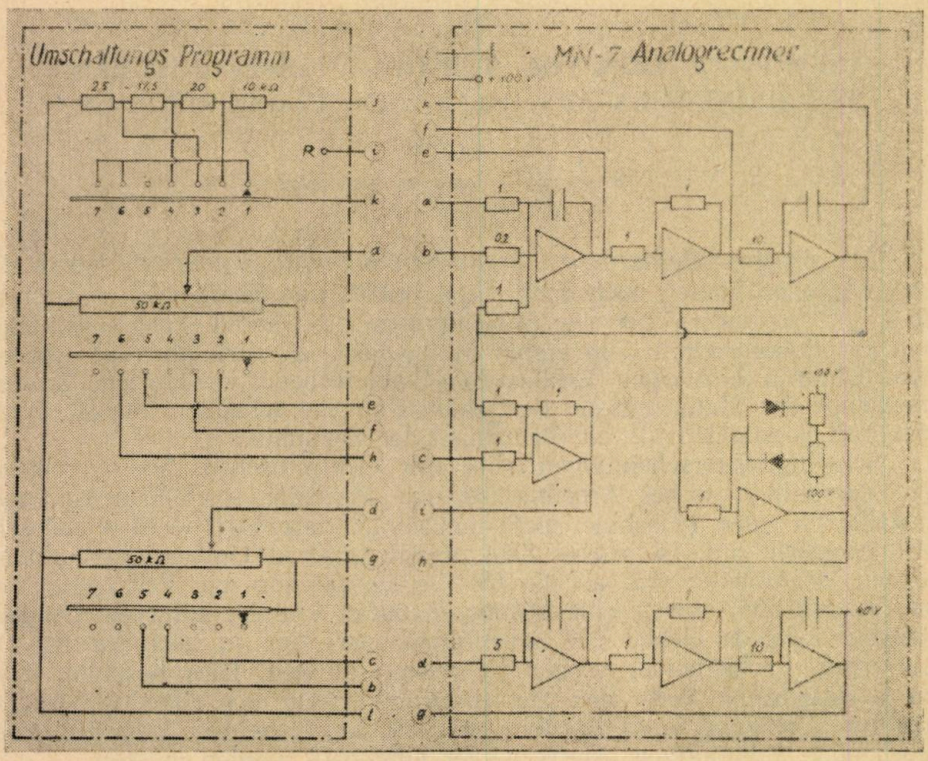


Bild. 1

Die Programmumschalteinrichtung ist durch eine 12-adrige Leitung mit der Rechenmaschine verbunden. Die einzelnen Leitungsadern wurden mit kleinen Buchstaben bezeichnet. In das Schema sind nur die für die Vorführung notwendigen Elemente des Analogrechners MN-7 eingezeichnet.

Ein Lichtbild des Umschalters ist in Bild 2 dargestellt. Hieraus geht hervor, dass auf der Skala des Frequenzreglerpotentiometers die Grösse ω/α (das Verhältnis der Erreger- und der Eigenfrequenz des untersuchten

Systems) und auf der Skala des zum Einstellen der Dämpfung dienenden Potentiometers der Wert des logarithmischen Dekrements angegeben wurde.

Im folgenden werden die den einzelnen Schalterstellungen entsprechenden Differentialgleichungen und Schaltprogramme und die auf dem

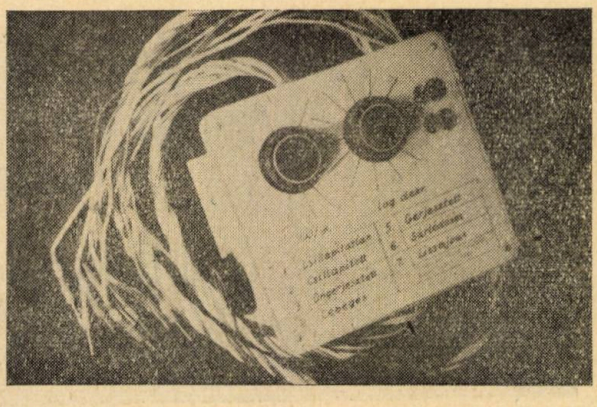


Bild. 2

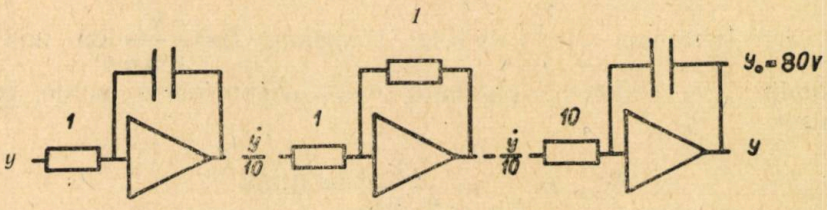


Bild. 3

Schirm des Oszillographen sichtbaren Schwingungserscheinungen beschrieben.

1. *Ungedämpfte Schwingungen*

Diese werden durch folgende Differentialgleichung beschrieben:

$$\ddot{y} + \alpha^2 y = 0$$

Das Programm der Aufgabe ist in Bild 3 dargestellt.

Angenommen ist $\alpha^2 = 10$ d.h $\alpha = \sqrt{10} = 3{,}16$/Sek. Die Dauer einer Schwingung ist $T = \frac{2\pi}{\alpha} \approx 2$ Sek. Die Amplitude der Schwingung wird mit der Integrationskonstante $y_0 = 80$ V angegeben. In Bild 4 werden die entstehenden ungedämpften Schwingungen gezeigt.

2. *Gedämpfte Schwingungen*

Das der Differentialgleichung $\ddot{y} + k.\dot{y} + \alpha^2 y = 0$ entsprechende Programm ist aus Bild 5 ersichtlich.

Die Dauer einer Schwingung beträgt auch hier etwa 2 Sek. Der Faktor k der Differentialgleichung erreicht höchstens den Wert 1. Da im

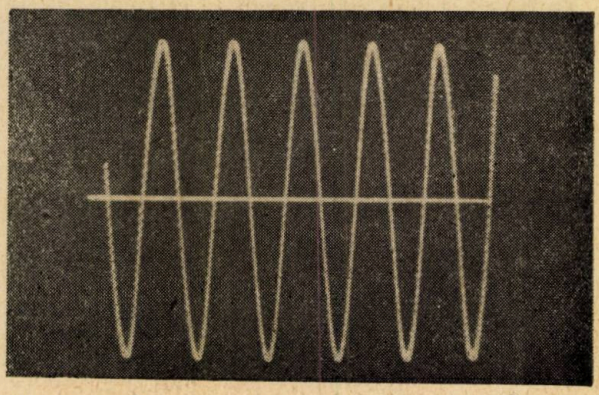


Bild. 4

Sinne der Definition die Lehr'sche Dämpfung $D = \frac{k}{2 m \alpha}$ ist und bei Aufschreiben der Differentialgleichung $m=1$ angenommen wurde, ergibt sich also

$$D_{max} = \frac{k}{2\alpha} = \frac{1}{2 \cdot 3{,}16} = 0{,}158$$

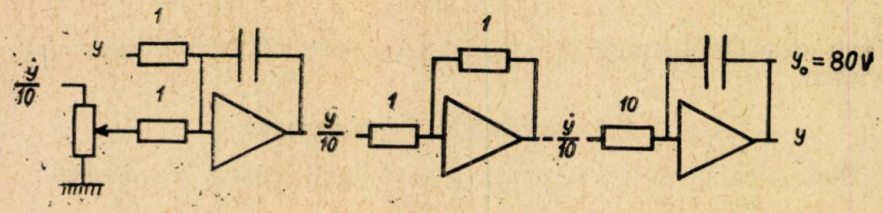


Bild. 5

Das logarithmische Dekrement der Schwingung ist

$$\delta = \frac{2\pi D}{\sqrt{1 - D^2}} \approx 1$$

d. h. die Amplitude der Schwingung vermindert sich nach einer Schwingung auf Teil $e = 2{,}71$.

Das zugehörige Diagramm ist in Bild 6 dargestellt, während in Bild 7 der Wert des logarithmischen Dekrements mit Hilfe des Potentiometers auf 0,1 eingestellt wurde.

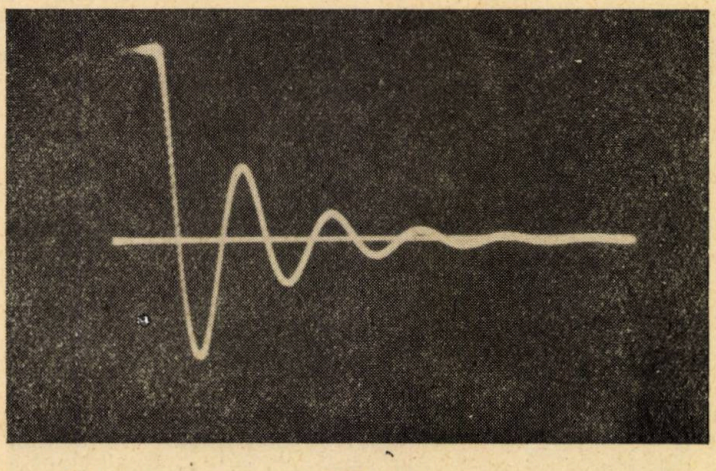


Bild. 6

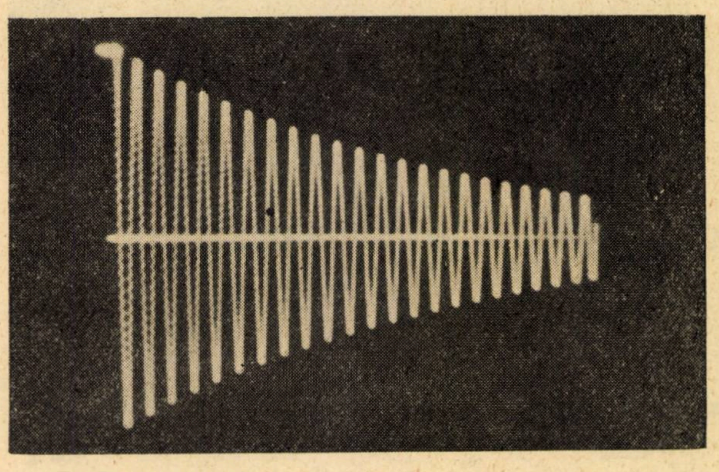


Bild. 7

3. *Negative Dämpfung (selbsterregte Schwingung)*

Das Programm der Differentialgleichung $\ddot{y}-k\dot{y}+\alpha^2 y=0$ ist dem in Bild 5 dargestellten ähnlich, wobei jedoch hier an dem Potentiometer vor dem ersten Operationsverstärker Spannung von $-y/10$ angelegt wurde, und y_0 einen Wert von 5 V besitzt.

Die selbsterregte Schwingung ist in Bild 8 dargestellt.

4. *Schwebung*

Hier wird die Summe aus den Lösungen $y = y_0 \cdot \cos \alpha t$ und $z = z_0 \cos \omega t$ auf das Registriergerät gebracht. Die jeweilige Einstellung ($y_0 = z_0 = 40$ V und $\omega \approx \alpha$) ergibt eine Schwebung. Das Programm der Lösung ist in Bild 9, die wahrnehmbaren Erscheinungen hingegen ist in Bild 10 dargestellt.

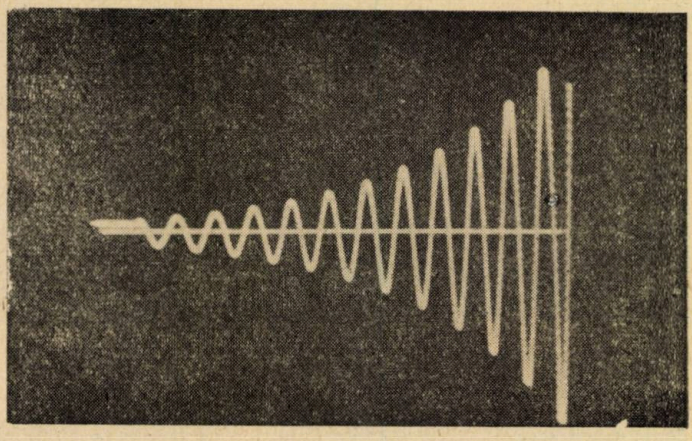


Bild. 8

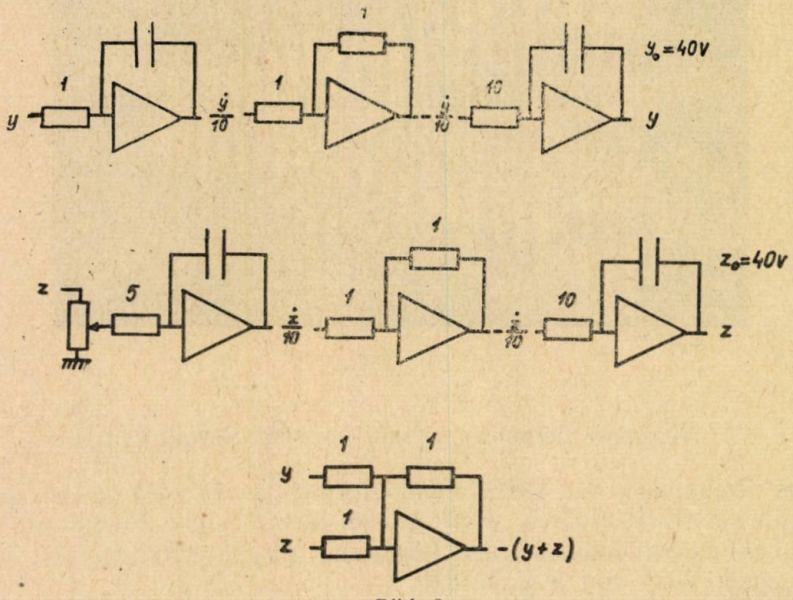


Bild. 9

5. *Erregte Schwingungen*

Diese Erscheinung wird durch folgende Differentialgleichung beschrieben: $\ddot{y}+k\dot{y}+\alpha^2 y=0{,}2\ z_0 \cos\omega t$. Das Programm des Lösung ist in Bild 11 dargestellt.

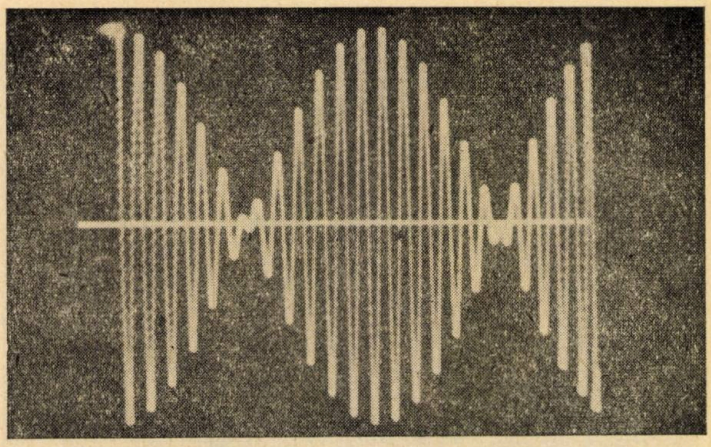


Bild. 10

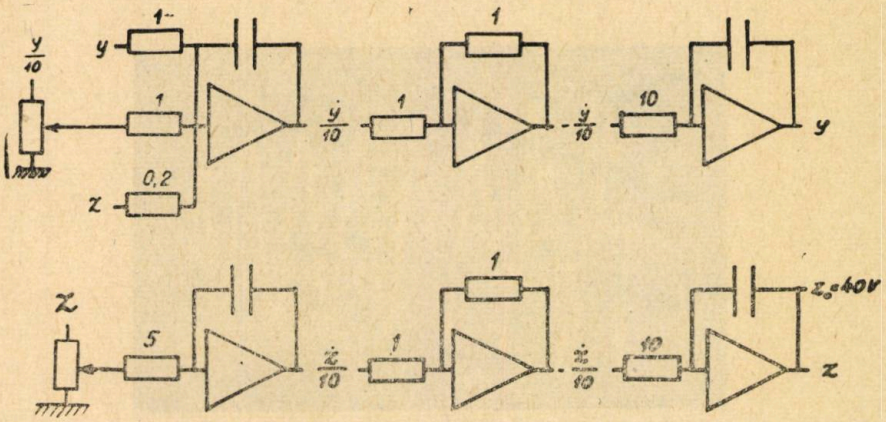


Bild. 11

Der Schaltung entsprechend ist $\omega^2_{max}=50$, d. h.

$$(\omega/\alpha)_{max}=\sqrt{5}=2{,}23$$

Die untere Grenze der Erregerfrequenz ergibt sich hingegen zu $(\omega/\alpha)_{min}\approx 0{,}2$.

Die auf diese Weise erregten Schwingungen sind unterhalb und oberhalb der Eigenfrequenz gleichgut zu analysieren. Im Laufe der Vorführung kann sogar die Dämpfung des erregten Systems geändert werden. Eine Darstellung dieser Erscheinung ist bereits deshalb aufschlussreich, da auch der dem stationären Zustand vorgehende Schwingungsvorgang gezeigt werden kann.

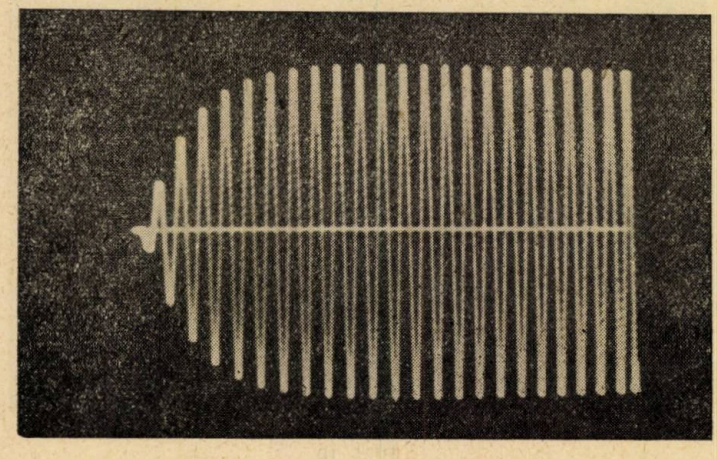


Bild. 12

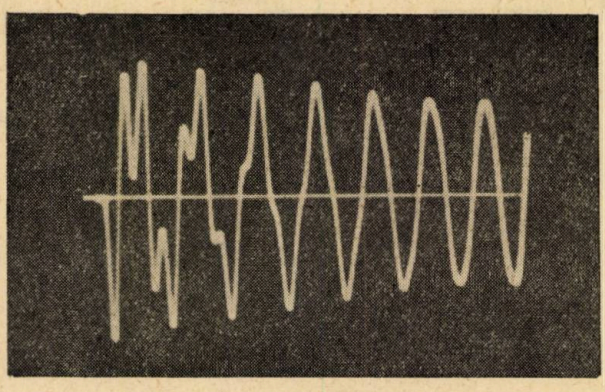


Bild. 13

In Bild 12 ist $\omega = \alpha$. Im Resonanzfall nimmt anfänglich die Amplitude der erregten Schwingungen zu um sich dann infolge der Dämpfung auf einen konstanten Wert einzustellen. Im Laufe der Vorführung kann nachgewiesen werden, dass die Amplitude der erregten Schwingungen bei halber Dämpfung auf das zweifache ansteigen. In Bild 13 ist $\omega/\alpha \approx 0{,}3$,

Aus der Aufnahme ist der Einschaltvorgang gut ersichtlich. Durch Einschalten des zweiten Strahles der Anzeigevorrichtung kann veranschaulicht werden, dass oberhalb der Resonanz die Erregerwirkung und die erregte Schwingung gegenphasig verlaufen. (Bild 14 $\omega/\alpha \approx 1{,}8$).

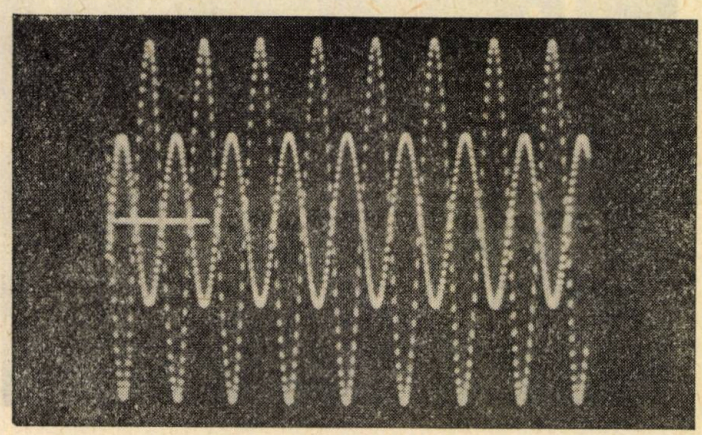


Bild. 14

6. *Dämpfung durch Coulumb' sche Reibung*

Die der Differentialgleichung $\ddot{y}+S\cdot\operatorname{sgn}\dot{y}+\alpha^2 y=0$ entsprechende Schaltung ist in Bild 15 dargestellt. Hier kann beobachtet werden, dass bei einer Reibungsdämpfung die einander folgenden Ausschläge der

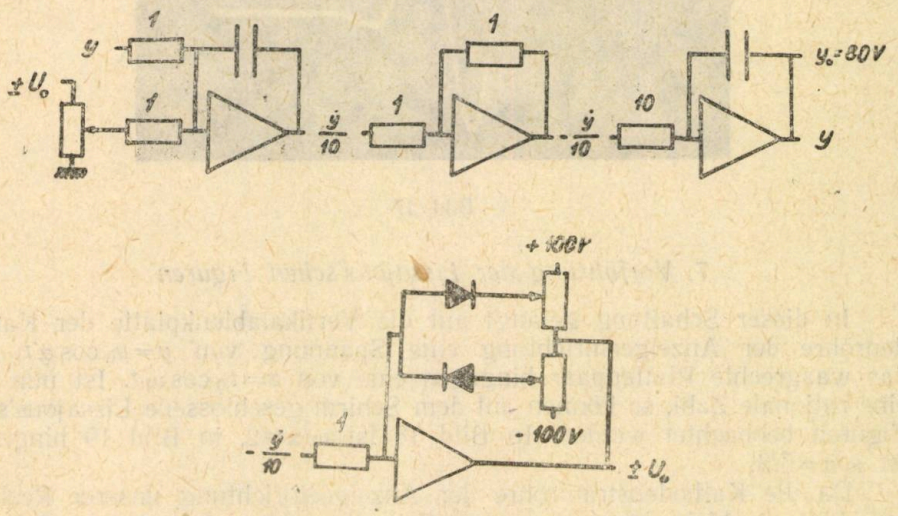


Bild. 15

Schwingungen linear abnehmen (Bild 16). Durch Erhöhung der Reibkraft kann gezeigt werden, dass die Masse bei einer derartigen Bewegung nicht immer in die Gleichgewichtsmittellage zurückkehrt (Bild 17).

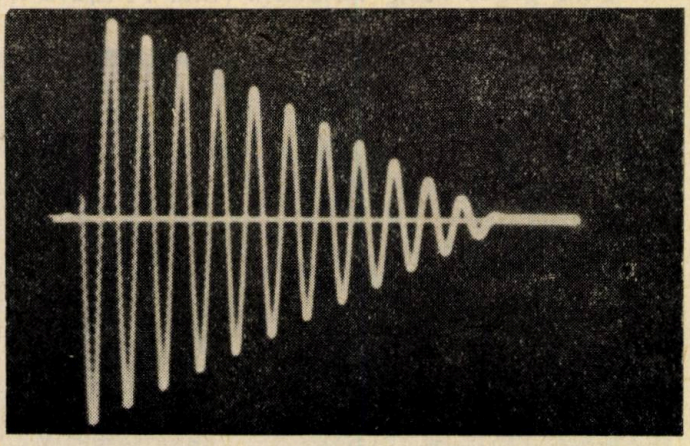


Bild. 16

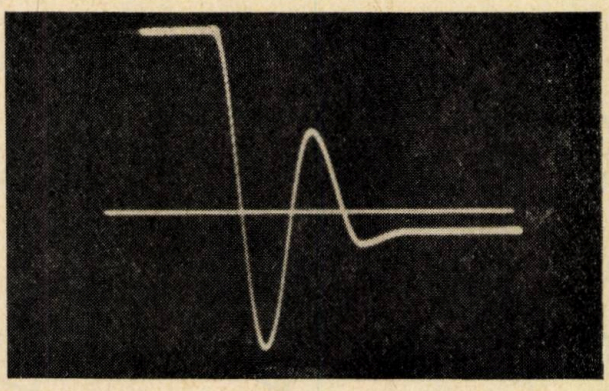


Bild. 17

7. *Vorführung der Lissajous'schen Figuren*

In dieser Schaltung gelangt auf die Vertikalablenkplatte der Kathodenröhre der Anzeigeeinrichtung eine Spannung von $y=y_0 \cos \alpha t$, auf das waagrechte Plattenpaar hingegen eine von $z=z_0 \cos \omega t$. Ist nun ω/α eine rationale Zahl, so können auf dem Schirm geschlossene Lissajous'sche Figuren beobachtet werden. In Bild 18 ist $\omega/\alpha=2$, in Bild 19 hingegen ist $\omega/\alpha=5/3$.

Da die Kathodenstrahlröhre der Anzeigeeinrichtung unserer Rechenmaschine zu klein ist, können zur Zeit die vorher dargelegten Schwin-

gungsgrunderscheinungen gleichzeitig nur 10—15 Hörern vorgeführt werden. Es ist jedoch die Beschaffung eines mit einer Fernsehbildröhre ausgerüsteten Demonstrations-Oszilloskops vorgesehen, so dass dann die

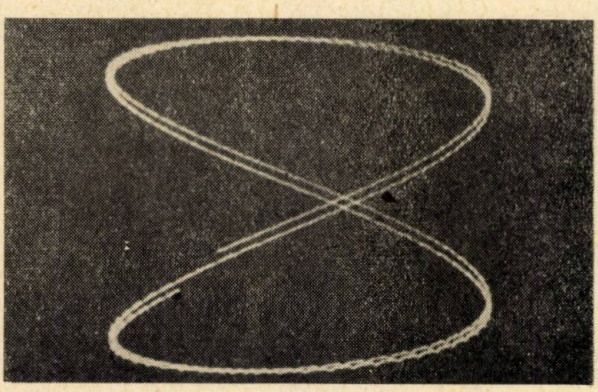


Bild 18

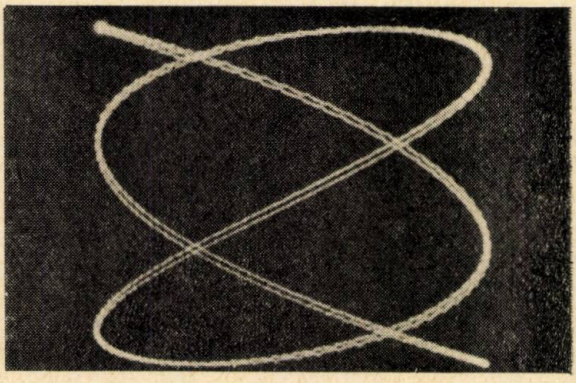


Bild. 19

Anzeigevorrichtung auch in einem verdunkelten Vortragsraum angeordnet werden kann. In diesem Fall wird zwischen dem Vortragsraum und dem Lehrstuhl eine mehraderige Kabelverbindung vorgesehen.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC BUCUREȘTI
Tomul XXVI — 1964, Fascicola 4

ELECTROTEHNICĂ

C.Z. 621.316 : 621.372.6

CALCULUL REȚELELOR COMPLEXE PE BAZA GENERALIZĂRII UNOR TEOREME DIN TEORIA REȚELELOR ELECTRICE PENTRU ANSAMBLURI DE MULTIPOLI ACTIVI *)

MARIUS PREDA, PAUL CRISTEA

1. Introducere

Utilizarea unor circuite tot mai complexe în electronică, în automatizări și în sistemele electroenergetice pune problema rezolvării unor sisteme de ecuații cu un număr mare de necunoscute — zeci și chiar sute de necunoscute. În această situație, este mai ușoară rezolvarea succesivă a unor sisteme cu un număr de necunoscute mai redus, corespunzătoare unor subrețele (multipoli activi) în care se descompune rețeaua inițială și determinarea soluțiilor pentru aceasta din soluțiile pentru subrețele.

Aceasta permite utilizarea unor mașini de calcul mai puțin pretențioase pentru rezolvarea unor rețele complexe, în particular pentru sinteza matricei impedanțelor de transfer, respectiv a admitanțelor de transfer, pornind de la matricile impendanțelor, admitanțelor, de transfer ale subrețelelor.

Lucrarea își propune generalizarea teoremelor lui Thévenin și Norton pentru ansambluri de multipoli activi, și stabilirea unor ecuații matriciale generale care să extindă metodele curenților de contur și ale potențialelor la noduri pentru ansamblurile de multipoli activi.

În lucrare se notează cu majuscule U, V, I, transformatele Laplace ale tensiunilor, potențialelor și respectiv curenților și cu Z, Y impendanțele, respectiv admitanțele operaționale.

2. Extinderea metodei potențialelor la noduri

2.1. *Ecuațiile matriceale în admitanțe de transfer ale multipolului*

Fie multipolul din figura 1, având potențialele bornelor de acces față de un punct de referință arbitrar V_1, V_2,...,V_j,., V_k,...,V_n și ale nodurilor interioare, care nu se leagă în exterior V_{n+1},..., V_s,..., V_t,..., V_{n+n_i} față

*) Lucrare comunicată la sesiunea științifică a cadrelor didactice din Institutul politehnic București 22—23 februarie 1964.

de același punct de referință, unde j, k sînt două borne oarecare din cele n borne de acces, iar t și s — două noduri oarecare din cele n noduri interne.

Aplicînd prima teoremă a lui Kirchhoff în punctele de acces se obțin n ecuații dintre care numai $(n-1)$ ecuații sînt independente căci avem

$$\sum_{1}^{n} I_k = 0. \tag{1}$$

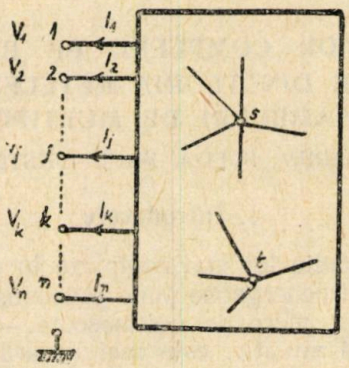


Fig. 1

Ecuația matriceală a rețelei, presupusă fără cuplaje magnetice, scrisă conform metodei potențialelor la noduri, pentru cele $n + n_i$ noduri, se exprimă

$$[Y_{lm}]\,[V_m] = [I_{scl}] - [I_l] \tag{2}$$

unde:

l și m sînt indicii nodurilor multipolului fără a ține seamă dacă este vorba de o bornă de acces (pentru care $l, m = k, j$) sau un nod interior ($l, m = t, s$);

V_m — potențialul nodului m;

I_{scl} — curentul de scurtcircuit al nodului l calculat ca sumă algebrică a curenților de scurtcircuit a laturilor legate la nodul l;

I_l — curentul ce iese din rețea prin nodul l. Evident:

$$I_l = I_k \quad \text{pentru} \quad l = k$$

$$I_l = 0 \quad \text{,,} \quad l = t$$

Y_{lm} — admitanța de transfer de la nodul m la nodul l care pentru:
$l \neq m$ este suma cu semn schimbat a admitanțelor ce leagă nodul l de m;
$l = m$ este suma admitanțelor ce se leagă la nodul l.

Separînd în matricele admitanțelor de transfer, a curenților și a potențialelor termenii referitori la bornele de acces de cei referitori la nodurile interioare, vom avea :

$$[Y_{lm}] = \begin{vmatrix} [Y_{jk}] & [Y_{js}] \\ [Y_{tk}] & [Y_{ts}] \end{vmatrix} \tag{3}$$

$$[V_m] = \begin{bmatrix} [V_k] \\ [V_s] \end{bmatrix} \tag{4}$$

$$[I_{scl}] = \begin{bmatrix} [I_{scj}] \\ [I_{sct}] \end{bmatrix} \tag{5}$$

$$[I_l] = \begin{bmatrix} [I_j] \\ [0] \end{bmatrix} \tag{6}$$

unde s-a notat prin [0] matricea coloană cu n_t elemente nule.

Ecuația (2) a multipolului se va scrie :

$$\begin{bmatrix} [Y_{jk}] & [Y_{js}] \\ [Y_{tk}] & [Y_{ts}] \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} [V_k] \\ [V_s] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [I_{scj}] \\ [I_{sct}] \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} [I_j] \\ [0] \end{bmatrix} \tag{7}$$

care descompusă dă :

$$[Y_{jk}]\,[V_k] + [Y_{js}]\,[V_s] = [I_{scj}] - [I_j] \tag{8}$$

$$[Y_{tk}]\,[V_k] + [Y_{ts}]\,[V_s] = [I_{sct}] \tag{9}$$

Din ecuația (9) rezultă matricea potențialelor nodurilor interne funcție de matricea potențialelor accesurilor

$$[V_s] = [Y_{ts}]^{-1}\{[I_{sct}] - [Y_{tk}]\,[V_k]\} \tag{10}$$

care, introdusă în ecuația (8) dă :

$$[I_j] = \{[I_{scj}] - [Y_{js}]\,[Y_{ts}]^{-1}\,[I_{sct}]\} - \{[Y_{jk}] - [Y_{js}]\,[Y_{ts}]^{-1}\,[Y_{tk}]\}\,[V_k] \tag{11}$$

care poate fi scrisă sub forma :

$$\boxed{[I_j] = [I'_{scj}] - [Y'_{jk}]\,[V_k]} \tag{12}$$

Relația (12) reprezintă expresia matriceală a curenților la bornele de acces funcție de potențialele acestora, unde :

$$[I'_{scj}] = [I_{scj}] - [Y_{js}]\,[Y_{ts}]^{-1}\,[I_{sct}] \tag{13}$$

este matricea curenților de scurtcircuit a bornelor de acces, ținînd seamă de influența nodurilor interne — matricea curenților pentru scurtcircuitul tuturor bornelor de acces (fig. 2).

Relația (13) permite calculul matricei $[I'_{scj}]$ din matricile $[I_{scl}]$ și $[Y_{lm}]$.

Matricea admitanțelor de transfer ale bornelor de acces are expresia;

$$[Y'_{jk}] = [Y_{jk}] - [Y_{js}]\,[Y_{ts}]^{-1}\,[Y_{tk}] \tag{14}$$

unde admitanța de transfer de la borna k la borna j este:

$$Y'_{jk} = \left(\frac{-I_j}{V_k}\right)_{V_{j=0,\ j\neq k}} \tag{15}$$

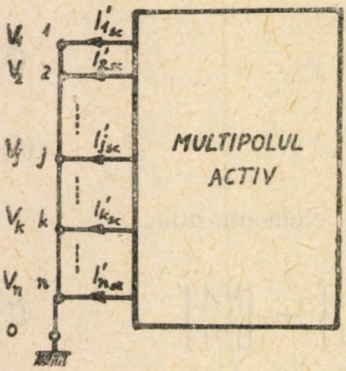


Fig. 2

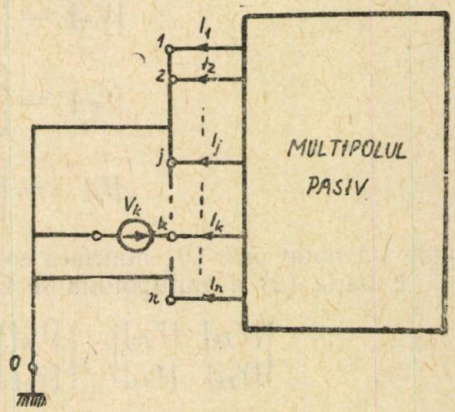


Fig. 3

iar admitanța proprie a accesului k este:

$$Y'_{kk} = \left(\frac{-I_k}{V_k}\right)_{V_{j=0,\ j\neq k}} \tag{16}$$

calculate ca în figura 3 pentru scurtcircuitarea la punctul de referință a tuturor bornelor cu excepția bornei k, după pasivizarea multipolului.

Ecuația (12) se poate găsi direct prin metoda superpoziției, ținînd seamă de linearitatea circuitului. Modul de rezolvare expus permite calculul matricei curenților de scurtcircuit al bornelor de acces și al matricei admitanțelor de transfer între accesuri cu ajutorul relațiilor (13) și (14) direct din structura rețelei.

2.2. *Ecuațiile matriceale ale sistemului de multipli neconectat*

Fiind dat un sistem de N multipoli neinterconectați avem pentru fiecare multipol m o ecuație de forma (12)

$$[I_j]_m = [I'_{scj}]_m - [Y'_{jk}]_m\,[V_k]_m \tag{17}$$

$$m = 1,2,\ldots,N$$

ansamblul de N ecuații matriciale rezultate putînd fi pus sub forma:

$$[I_j]_a = [I'_{scj}]_a - [Y'_{jk}]_a\,[V_k]_a \tag{18}$$

Ecuația (18) este de aceeași formă cu ecuația (12), însă caracterizează ansamblul de multipoli nelegați. Matricile care intervin în această ecuație caracterizează ansamblul de multipoli înainte de interconectare și rezultă prin compunerea matricelor multipolilor:

$$[I_j]_a = \begin{vmatrix} [I_j]_1 \\ [I_j]_2 \\ \vdots \\ [I_j]_m \\ \vdots \\ [I_j]_N \end{vmatrix} \quad (19) \qquad [V_k]_a = \begin{vmatrix} [V_k]_1 \\ [V_k]_2 \\ \vdots \\ [V_k]_m \\ \vdots \\ [V_k]_N \end{vmatrix} \quad (20)$$

$$[I'_{scj}]_a = \begin{vmatrix} [I'_{scj}]_1 \\ [I'_{scj}]_2 \\ \vdots \\ [I'_{scj}]_m \\ \vdots \\ [I'_{sej}]_N \end{vmatrix} \quad (21) \qquad [Y'_{jk}]_a = \begin{vmatrix} [Y'_{jk}]_1 & [0] & \dots & [0] \\ [0] & [Y'_{jk}]_2 & \dots & [0] \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ [0] & [0] & \dots & [Y'_{jk}]_N \end{vmatrix} \quad (22)$$

2.3. *Ecuațiile de interconexiune a multipolilor*

Fiind dat ansamblul de N multipoli m, descris de ecuațiile matriciale (18) înainte de interconectare, se pune problema deducerii ecuațiilor care caracterizează un anumit mod de interconectare particular al multipolilor, adică obținerea ecuațiilor rețelei compuse din ecuațiile multipolilor și condițiile de interconectare.

Interconectarea constă din legarea unor borne de acces ale mai multor multipoli în cîte un pol comun. Vor rezulta N_p poli de interconexiune, a căror potențiale V_p le vom considera noile necunoscute ale problemei. Evident numai $(N_p - 1)$ din potențialele V_p intervin ca necunoscute independente, ceea ce permite să considerăm punctul de referință în unul din polii de interconexiune (de exemplu al N_p-lea). noile variabile rămînînd tensiunile V'_p ale polilor p față de polul de referință N_p ales.

Toate bornele de acces ale multipolilor legate la un pol p vor avea același potențial cu aceasta. Vom avea deci:

$$[V_k]_a = [C]\,[V'_p], \quad (23)$$

unde $[C]$ este matricea de legare a bornelor de acces ale ansamblului de multipoli la polii de interconexiune;

Termenii C_{pk} ai matricei de interconectare nu pot fi decît + 1 sau 0, conform relației (24), ceea ce constituie un avantaj al acestei forme de scriere a ecuațiilor.

$$C_{pk} = \begin{cases} 0 \text{ borna } k \text{ nu este legată la polul } p \\ 1 \text{ borna } k \text{ este legată la polul } p. \end{cases} \quad (24)$$

Matricea $[C]$ are numărul de linii egal cu numărul total al bornelor de acces și numărul de coloane egal cu numărul polilor independenți $(N_p - 1)$.

Prin interconectare apar, în afara ecuațiilor în potențiale (23), ecuații în curenți, care cer ca suma curenților bornelor multipolilor, legate la un pol de interconectare oarecare, să fie nulă.

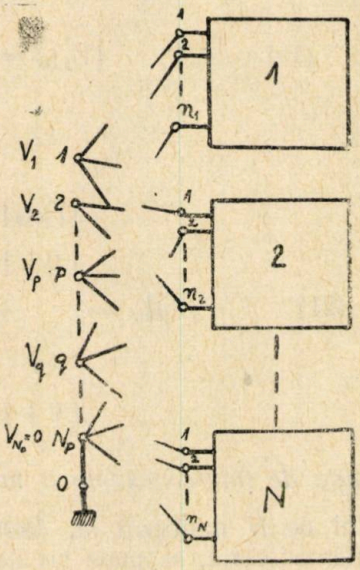


Fig. 4

Se vede ușor că avem:

$$[C]_t\,[I_j]_a = 0 \tag{25}$$

în cazul cînd ansamblul de multipoli interconectați nu se mai leagă în exterior sau

$$[C]_t\,[I_J]_a = [I_p] \tag{26}$$

în cazul cînd rețeaua studiată este legată spre exterior,

$[I_p]$ fiind matricea curenților cedați în exterior pe la polul de interconexiune p;

și

$[C]_t$ — transpusa matricei de interconexiune.

În cazul considerat, al unei rețele descompusă în subrețelele componente, rezultă ecuațiile de interconectare:

$$[V_k]_a = [C]\,[V'_p] \tag{23}$$

$$[C]_t\,[I_j]_a = 0 \tag{25}$$

caracteristice unui anumit tip de legare a multipolilor activi, precizat de matricea $[C]$. În cazul cînd aceiași multipoli sînt astfel interconectați, de exemplu pentru circuitele de comandă realizate cu module, nu se modifică decît matricea $[C]$, sistemul de multipoli neconectați fiind caracterizați tot de ecuațiile (18), Metoda este avantajoasă în special la studiul mai multor variante de interconectare a unor multipoli dați.

2.4. *Ecuațiile sistemului de multipoli activi după interconectare*

Ecuațiile (18) ale sistemului de multipoli activi neconectați și ecuațiile (23), (25) de interconectare permit să găsim ecuațiile sistemului de multipoli activi interconectați, considerînd ca necunoscute potențialele polilor de interconectare.

Rezultă succesiv:

$$[C]_t\,[I_j]_a = [C]_t\,[I'_{scj}]_a - [C]_t\,[Y'_{jk}]_a\,[C]\,[V'_q] = 0 \tag{27}$$

și

$$\boxed{[Y''_{pq}]\,[V'_q] = [I''_{scp}]} \tag{28}$$

Ecuația matriceală (23) corespunde extinderii metodei potențialelor la noduri la sisteme de multipoli interconectați. S-au notat:

$$[I''_{scp}] = [C]_t\,[I'_{scj}]_a \tag{29}$$

— matricea curenților de scurtcircuit a polilor, calculată pentru scurtcircuitul tuturor polilor (fig. 5).

$$[Y''_{pq}] = [C]_t\,[Y'_{jk}]_a\,[C] \tag{30}$$

— matricea admitanțelor de transfer între poli de interconectare.

Y''_{pq} este admitanța calculată la scurtcircuitul tuturor polilor, cu excepția polului q;

$$Y''_{pq} = \left(\frac{-I'_p}{V'_q}\right)_{\substack{V_p = 0 \\ p \neq q}} \tag{31}$$

Y''_{qq} — admitanța între polul q și toți ceilalți poli în scurtcircuit.

$$Y''_{qq} = \left(\frac{-I'_q}{V'_q}\right)_{\substack{V_p = 0 \\ p \neq q}} \tag{32}$$

Din relația (28) se poate calcula matricea tensiunilor polilor față de un pol luat de referință ($V_{Np} = 0$).

$$\boxed{[V'_q] = [Y''_{pq}]^{-1}\,[I''_{scp}]} \tag{33}$$

În continuare, cu (23) se deduce matricea potențialelor accesurilor multipolilor, apoi cu (12) matricea curenților accesurilor și cu (10) a potențialelor nodurilor interne. Astfel, rețeaua este complet rezolvată din punctul de vedere al metodei tensiunilor la noduri printr-o rezolvare în serie.

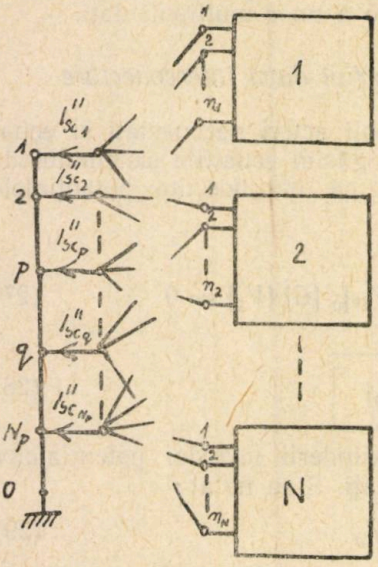


Fig. 5

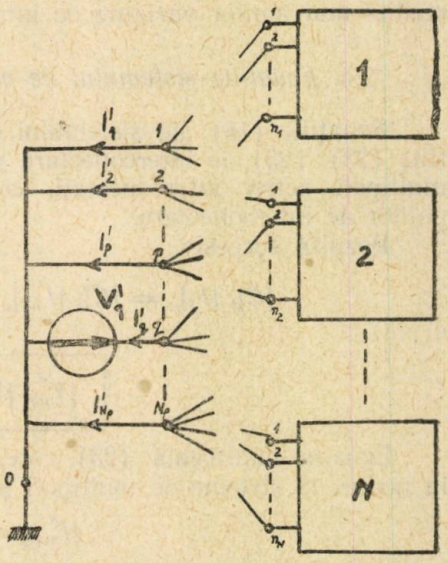


Fig. 6

Avantajul metodei constă în faptul că ecuațiile pentru sistemul de multipoli activi rămîn valabile, indiferent de modul lor de conectare, putîndu-se studia diversele rețele care pot fi obținute prin interconectarea unui număr de multipoli dați. Aceasta prezintă interes în automatizările cu elemente standardizate (module) și în problemele de modelare cu rețele electrice tipice.

2.5. *Teorema lui Norton generalizată pentru sistemul de multipoli activi interconectați*

2.5.1. *Interconectarea a doi multipoli activi*

Fie sistemul de doi multipoli activi din figura 7, caracterizat de ecuațiile matriceale:

$$[I_j]_1 = [I_{scj}]_1 - [Y'_{jk}]_1 [V_k]_1 \tag{34}$$

și

$$[I_j]_2 = [I_{scj}]_2 - [Y'_{jk}]_2 [V_k]_2 \tag{35}$$

Presupunînd că fiecare multipol are n borne de acces, rezultă că matricile $[I_j]_1$, $[I_j]_2$, $[V_k]_1$ și $[V_k]_2$ au cîte n termeni dispuși în coloană.

Matricea de interconexiune are numărul de linii egal cu numărul total al bornelor de acces $(2n)$, numărul de coloane egal cu al polilor de interconexiune independenți $(n-1)$ și este de forma:

$$[C]=\left[\begin{array}{cccc} 1 & 0 & \cdots\cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots\cdots & 0 \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ 0 & 0 & \cdots\cdots & 1 \\ 0 & 0 & \cdots\cdots & 0 \\ \hline 1 & 0 & \cdots\cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots\cdots & 0 \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ 0 & 0 & \cdots\cdots & 1 \\ 0 & 0 & \cdots\cdots & 0 \end{array}\right] \tag{36}$$

Sistemul celor doi multipoli după interconectare este descris de o ecuație de tipul ecuației (33):

$$[V'_q]=[Y''_{pq}]^{-1}\,[I''_{scq}] \tag{33}$$

Matricile coloană $[V'_q]$ și $[I''_{scp}]$ au cîte $(n-1)$ termeni, referitori la cei $(n-1)$ poli de interconexiune independenți. Matricea $[Y''_{pq}]$ este pătrată avînd $(n-1)$ linii și $(n-1)$ coloane.

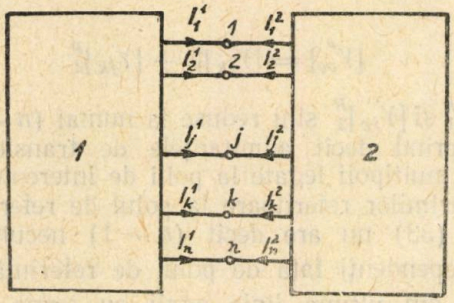


Fig. 7

După cum s-a arătat (relația 29) avem:

$$[I''_{scp}]=[C]_t\,[I'_{scj}]_a=\underbrace{\begin{bmatrix} 1\,0\cdots 0\,0 & 1\,0\cdots 0\,0 \\ 0\,1\cdots 0\,0 & 0\,1\cdots 0\,0 \\ \cdot\,\cdot\quad\cdot\,\cdot & \cdot\,\cdot\quad\cdot\,\cdot \\ \cdot\,\cdot\quad\cdot\,\cdot & \cdot\,\cdot\quad\cdot\,\cdot \\ \cdot\,\cdot\quad\cdot\,\cdot & \cdot\,\cdot\quad\cdot\,\cdot \\ 0\,0\cdots 1\,0 & 0\,0\cdots 1\,0 \end{bmatrix}}_{\longleftarrow 2n \text{ coloane} \longrightarrow} \begin{array}{c} \uparrow \\ n-1 \\ \text{linii} \\ \downarrow \end{array} \underbrace{\begin{bmatrix} [I'_{scj}]_1 \\ [I'_{scj}]_2 \end{bmatrix}}_{\text{o coloană}} \begin{array}{c} \uparrow \\ 2n \\ \text{linii} \\ \downarrow \end{array} \tag{37}$$

de unde rezultă

$$[I''_{scp}] = [I'_{scj}]_1^R + [I'_{scj}]_2^R \tag{38}$$

Indicele superior R de la matricele curenților de scurtcircuit al bornelor de acces ale multipolilor, marchează reducerea acestora la numai $(n-1)$ termeni, corespunzători celor $(n-1)$ borne de acces ale fiecărui multipol legate la cei $(n-1)$ poli de interconexiune independenți. Prin înmulțirea cu matricea $[C]_t$ în relația (37), se elimină termenii corespunzători bornelor de acces legate la polul de interconectare n, considerat de referință.

Calculul matricei $[Y''_{pq}]$ se face conform relației (30) :

$$[Y''_{pq}] = \underbrace{\begin{bmatrix} 10\cdots00 & 10\cdots00 \\ 01\cdots00 & 01\cdots00 \\ \cdots & \cdots \\ 00\cdots10 & 00\cdots10 \end{bmatrix}}_{\longleftarrow\ 2n\ \text{coloane}\ \longrightarrow} \begin{matrix}\uparrow\\ (n-1)\\ \text{linii}\\ \downarrow\end{matrix} \underbrace{\begin{bmatrix} [Y'_{jk}]_1 & [0] \\ [0] & [Y'_{jk}]_2 \end{bmatrix}}_{2n\ \text{coloane}} \begin{matrix}\uparrow\\ 2n\\ \text{linii}\\ \downarrow\end{matrix} \underbrace{\begin{bmatrix} 10\cdots0 \\ 01\cdots0 \\ \cdots \\ \cdots \\ 00\cdots1 \\ 00\cdots0 \\ 10\cdots0 \\ \cdots \\ \cdots \\ 00\cdots1 \\ 00\cdots0 \end{bmatrix}}_{(n-1)\ \text{coloane}} \begin{matrix}\uparrow\\ \\ \\ \\ \\ 2n\\ \text{linii}\\ \\ \\ \\ \downarrow\end{matrix} \tag{39}$$

de unde rezultă :

$$[Y''_{pq}] = [Y'_{jk}]_1^R + [Y'_{jk}]_2^R \tag{40}$$

Matricele $[Y'_{jk}]_1^R$ și $[Y'_{jk}]_2^R$ sînt reduse la numai $(n-1)$ linii și $(n-1)$ coloane și nu cuprind decît admitanțele de transfer între bornele de acces ale celor doi multipoli legate la polii de interconexiune independenți.

Eliminarea mărimilor referitoare la polul de referință n este necesară deoarece sistemul (33) nu are decît $(n-1)$ necunoscute : potențialele V'_q ale polilor independenți față de polul de referință. Matricele $[Y'_{jk}]_1$ și $[Y'_{jk}]_2$ au termenii din ultima linie egali cu suma termenilor primelor $(n-1)$ linii cu semn schimbat. Aceste matrici au determinantul caracteristic nul și ca urmare nu au inversă.

Nedeterminarea dispare la trecerea la matricele reduse. Avantajul acestui mod de lucru în care ecuațiile fiecărui multipol se scriu utilizînd o variabilă în plus(considerînd necunoscute toate potențialele V_k ale celor n accesuri) constă în faptul că se poate alege polul de referință după interconectare, într-un mod unic pentru întregul sistem de multipoli.

Inlocuind matricele $[I''_{scp}]$ și $[Y''_{pq}]$ calculate cu ecuațiile (38) și (40) în ecuația (33) rezultă :

$$[V'_q] = \{[Y'_{jk}]_1^R + [Y'_{jk}]_2^R\}^{-1} \{[I'_{scj}]_1^R + [I'_{scj}]_2^R\} \tag{41}$$

O dată găsite potențialele polilor de interconectare rezultă și potențialele accesurilor utilizînd relația (23) :

$$[V_k]_a = \begin{bmatrix} [V_k]_1 \\ [V_k]_2 \end{bmatrix} = [C]\,[V'_q] = \begin{bmatrix} [V'_q] \\ 0 \\ [V'_q] \\ 0 \end{bmatrix}. \tag{42}$$

Pentru a sublinia analogia ecuației (41) cu teorema lui Norton s-a adoptat scrierea convențională :

$$[U_q] = [V'_q] = \frac{[I'_{scj}]_1^R + [I'_{scj}]_2^R}{[Y'_{jk}]_1^R + [Y'_{jk}]_2^R} \tag{43}$$

similară cu forma uzuală a teoremei lui Norton.

În cazul cînd al doilea multipol este pasiv relația (43) devine :

$$[U_q] = \frac{[I'_{scj}]_1^R}{[Y'_{jk}]_1^R + [Y'_{jk}]_2^R} \tag{44}$$

2.5.2. *Generalizarea teoremei lui Norton pentru sistemul de multipoli activi interconectați*

Ecuația (27) poate fi scrisă sub forma convențională :

$$[V'_q] = \frac{[C]_t\,[I'_{scj}]_a}{[C]_t\,[Y'_{jk}]_a\,[C]} \tag{45}$$

analogă cu a ecuației (43) constituind generalizarea teoremei lui Norton pentru un sistem de multipoli activi interconectați.

În cazul cînd după interconectarea multipolilor sistemul mai are legături în exterior, astfel încît mai există curenți care părăsesc rețeaua prin polii de interconexiune, vom avea, conform relațiilor (26), (18) și (23) :

$$[C]_t\,[I'_{scj}]_a - [C]_t\,[Y'_{jk}]\,[C]\,[V'_q] = [I_p] \tag{46}$$

sau

$$[I_p] = [I''_{scp}] - [Y''_{pq}]\,[V'_q] \tag{47}$$

ecuație de aceeași formă cu ecuația (12).

Relațiile (29) și (30) permit calculul matricelor de scurtcircuit și ale admitanțelor de transfer ce apar în ecuația (12), printr-o tehnică similară, considerînd subrețelele obținute prin interconectarea unor rețele și mai simple. Acest mod de lucru înlocuiește utilizarea relațiilor (13) și (14).

Se ajunge astfel la problema interconectării ansamblurilor de multipoli interconectați (multipolii compuși) care nu se deosebește principial de cea precedentă, însă permite calculul mai ușor, din aproape în aproape al matricelor caracteristice. Această problemă este echivalentă cu descompunerea succesivă a unei rețele date în subrețele și a acestora în noi subrețele de ordin superior etc.

3. Extinderea metodei curenților ciclici

3.1. *Ecuațiile matriceale în impedanțe de transfer ale multipolului*

Fie multipolul din figura 8, în care presupunem cunoscuți curenții de contur $\mathcal{J}_k$ și căutăm tensiunile la borne U_k definite ca în figura 8.

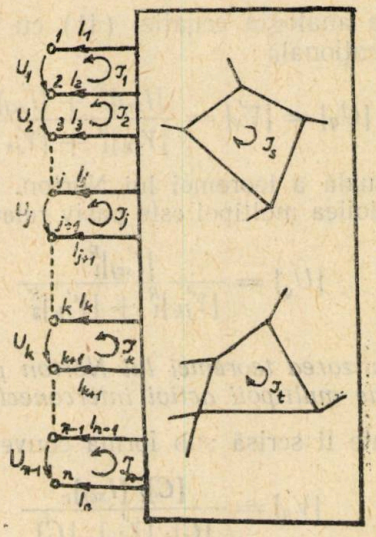


Fig. 8

Indicii rămîn cu semnificațiile din problema precedentă, însă referitori la ochiurile fundamentale

j, k — pentru ochiurile care trec prin bornele de acces

s, t — „ „ interioare.

Modul de tratare este analog și rezultă succesiv:

— ecuația matriceală a rețelei scrisă conform metodei curenților ciclici:

$$[Z_{lm}]\,[\mathcal{J}_m] = [E_l] - [U_l] \tag{48}$$

unde indicii l și m se referă la ochiurile interne sau externe fără deosebire.

$\mathcal{J}_m$ — curentul ciclic în ochiul m;

E_l — suma tensiunilor electromotoare din ochiul l;

U_l — tensiunea la borne în cazul în care ochiul l trece pe la bornele de acces. Asocierea sensurilor curentului ciclic și al tensiunii la borne (fig. 8) corespunde convenției de la generatoare.

Evident:

$$\begin{aligned} U_l &= U_k \text{ pentru } l = k \\ U_l &= 0 \quad \text{„} \quad l = t \end{aligned} \tag{49}$$

Z_{lm} este impendanța de transfer de la ochiul m la ochiul l.

Separînd în matricea impedanțelor de transfer și matricele de tensiune și curenți partea referitoare la ochiurile ce trec pe la bornele de acces, de cea referitoare la ochiurile interne, vom putea scrie ecuația (48) sub forma:

$$\begin{bmatrix} [Z_{kj}] & [Z_{ks}] \\ [Z_{tj}] & [Z_{ts}] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [\mathcal{J}_j] \\ [\mathcal{J}_s] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [E_k] \\ [E_t] \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} [U_k] \\ [0] \end{bmatrix} \tag{50}$$

care se poate descompune în ecuațiile:

$$[Z_{kj}]\,[\mathcal{J}_j] + [Z_{ks}]\,[\mathcal{J}_s] = [E_k] - [U_k] \tag{51}$$

$$[Z_{tj}]\,[\mathcal{J}_j] + [Z_{ts}]\,[\mathcal{J}_s] = [E_t] \tag{52}$$

Din (52) avem:

$$[\mathcal{J}_s] = [Z_{ts}]^{-1}\{[E_t] - [Z_{tj}]\,[\mathcal{J}_j]\} \tag{53}$$

care introdus în (51) dă:

$$[U_k] = \{[E_k] - [Z_{ks}]\,[Z_{ts}]^{-1}\,[E_t]\} - \{[Z_{kj}] - [Z_{ks}]\,[Z_{ts}]^{-1}\,[Z_{tj}]\}\,[\mathcal{J}_j] \tag{54}$$

care poate fi scrisă sub forma:

$$\boxed{[U_k] = [E'_k] - [Z'_{kj}]\,[\mathcal{J}_j]} \tag{55}$$

Ultima relație reprezintă ecuația matriceală a tensiunilor la borne, funcție de curenții ciclici ce trec prin bornele de acces, unde:

$$[E'_k] = [E_k] - [Z_{tj}]\,[Z_{ts}]^{-1}\,[E_t] \tag{56}$$

este matricea tensiunilor electromotoare în ochiurile ce trec pe la borne, ținînd seamă de influența ochiurilor interne — matricea tensiunilor la borne la mersul în gol pe toate bornele (fig. 9):

$$[E'_k] = [U_k]_{\mathcal{J}_{k=0}} = [U_{k0}] \tag{57}$$

Matricea impendanțelor de transfer între două ochiuri de acces, ținînd seamă de influența ochiurilor interne, este de forma

$$[Z'_{kj}] = [Z_{kj}] - [Z_{ks}]\,[Z_{ts}]^{-1}\,[Z_{tj}] \tag{58}$$

unde:

$$Z'_{kj} = \left(\frac{-U_k}{\mathcal{J}_j}\right)_{\mathcal{J}_k = 0,\ k \neq j} \tag{59}$$

este impedanța de transfer de la ochiul j, la ochiul k măsurată ca raportul dintre tensiunea U_k la bornele ochiului k cînd este alimentat cu curent numai ochiul j, și curentul $\mathcal{J}_j$ al acestui ochi (fig. 10).
și

$$Z'_{jj} = \left(\frac{-U_j}{\mathcal{J}_j}\right)_{\mathcal{J}_k = 0,\ k \neq j} \tag{60}$$

impedanța proprie a intrării la bornele ochiului j.

Ecuația (55) poate fi dedusă direct cu ajutorul teoremei superpoziției ținînd seamă de linearitatea circuitului și aplicînd la bornele de acces (la perechile de borne de acces pe care le vom numi intrările multipolului) surse de curent $\mathcal{J}_1, \ldots, \mathcal{J}_{n-1}$.

Ecuația (55) este o formă duală a ecuației (12).

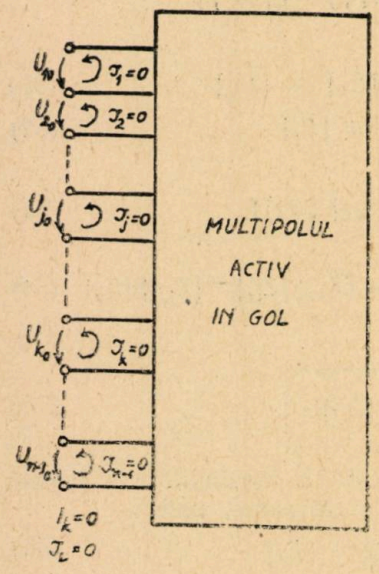


Fig. 9

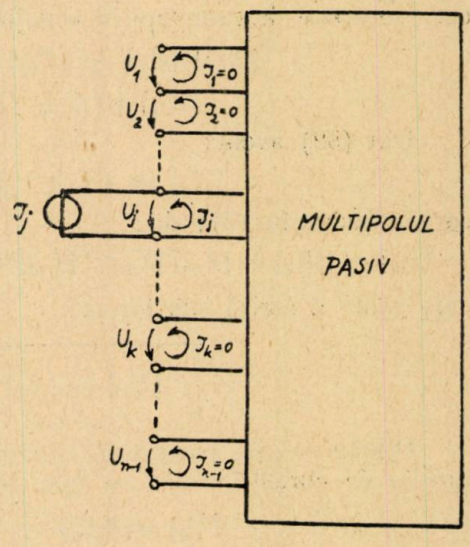


Fig. 10

3.2. *Ecuațiile matriceale ale sistemului de multipoli neconectat*

Pentru ansamblul de N multipoli, putem scrie o ecuație de forma:

$$[U_k]_a = [E'_k]_a - [Z'_{kj}]_a\,[\mathcal{J}_j]_a \tag{61}$$

care provine din ecuațiile scrise pentru fiecare multipol m.

$$[U_k]_m = [E'_k]_m - [Z'_{kj}]_m \cdot [\mathcal{J}_j]_m \tag{62}$$

prin compunerea matricelor sistemelor componente, ca mai jos:

$$[U_k]_a = \begin{bmatrix} [U_k]_1 \\ \vdots \\ [U_k]_m \\ \vdots \\ [U_k]_N \end{bmatrix} \quad [63] \qquad [E'_k]_a = \begin{bmatrix} [E'_k]_1 \\ \vdots \\ [E'_k]_m \\ \vdots \\ [E'_k]_N \end{bmatrix} \quad (64)$$

$$[\mathcal{J}_j]_a = \begin{bmatrix} [\mathcal{J}_j]_1 \\ \vdots \\ [\mathcal{J}_j]_m \\ \vdots \\ [\mathcal{J}_j]_N \end{bmatrix} \quad (65) \qquad [Z'_{kj}]_a = \begin{bmatrix} [Z'_{kj}]_1 & \cdots & [0] & \cdots & [0] \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ [0] & \cdots & [Z'_{jk}]_m & \cdots & [0] \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ [0] & \cdots & [0] & \cdots & [Z'_{kj}]_N \end{bmatrix}. \quad (66)$$

3.3. *Ecuațiile de interconectare a multipolilor*

Fiind dat sistemul de N multipoli, după interconectare rezultă N_o ochiuri independente, care conțin intrările.

Curenții $\mathcal{J}'_p$ pe aceste ochiuri vor fi noile necunoscute ale problemei.

Ecuațiile de interconectare în curenți care exprimă legătura între curenții la intrare și curenții ochiurilor de interconectare sînt de forma:

$$[\mathcal{J}_j]_a = [C]\ [\mathcal{J}'_p] \quad (67)$$

unde matricea [C] are numărul de linii egal cu numărul intrărilor tuturor multipolilor, iar al coloanelor cu numărul ochiurilor fundamentale de

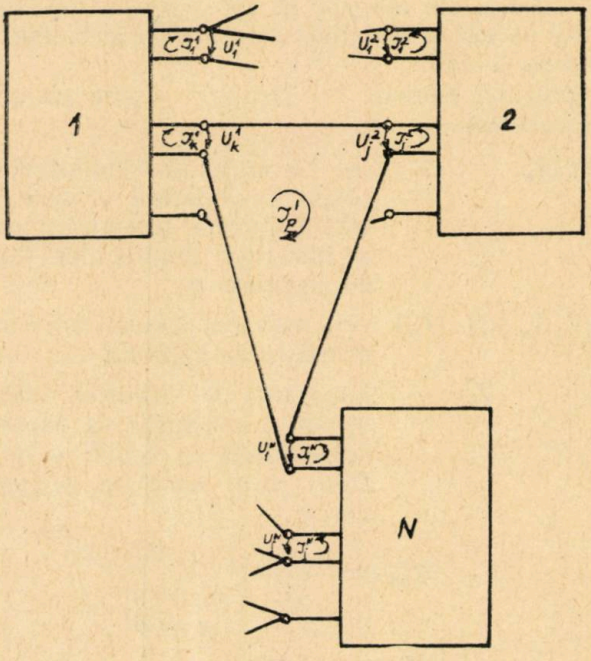


Fig. 11

legătură. Coeficienții C_{jp} sînt egali cu O dacă ochiul p nu trece la intrarea j, ± 1 dacă trece în sensul direct (vezi figura 11) sau invers la intrarea j.

Se poate vedea ușor că ecuațiile de interconectare pentru tensiuni vor fi:

$$[C]_t\,[U_k]_a = 0 \tag{68}$$

căci suma tensiunilor pe un ochi de legătură trebuie să fie nulă dacă sistemul nu mai are legături în exterior.

3.4. *Ecuațiile sistemului de multipoli activi după interconectare*

Ecuațiile (61) ale ansamblului de multipoli neconectați combinate cu ecuațiile de interconexiune (67) și (68) dau succesiv:

$$[C]_t\,[E'_k]_a - [C]_t\,[Z'_{kj}]_a\,[C]\,[\mathcal{J}'_p] = 0 \tag{69}$$

care, scrisă sub forma:

$$\boxed{[Z''_{qp}]\,[\mathcal{J}'_p] = [E''_q]} \tag{70}$$

reprezintă ecuația sistemului de multipoli interconectați. Această ecuație poate fi stabilită direct pe baza liniarității circuitului, metoda folosită permițînd însă calculul din aproape în aproape al matricelor caracteristice și găsirea relativ ușoară a ecuațiilor pentru diferite moduri de interconectare a unor multipoli dați.

Ecuația reprezintă teorema lui Thévenin pentru un sistem de multipoli activi interconectați.

$[E''_q] = [C]_t\,[E'_k]_a$ (71) este matricea tensiunilor electromotoare în ochiul de legătură q, care poate fi calculată ca suma tensiunilor de mers în gol a intrărilor multipolilor legate la ochiul de legătură q.

$[Z''_{qp}] = [C_t]\,[Z'_{kj}]_a\,[C]$ (72) este matricea impedanțelor de transfer între ochiurile de legătură .

Z''_{qp} — impedanța de transfer între ochiul p și ochiul q, calculată ca raportul dintre tensiunea dată în ochiul q de un curent ce trece prin ochiul p și mărimea acestui curent

$$Z''_{qp} = \left(\frac{-U'_q}{\mathcal{J}'_p}\right)_{\substack{\mathcal{J}_q = 0 \\ q \neq p}} \tag{73}$$

Z''_{pp} — impedanța proprie a ochiului p

$$Z''_{pp} = \left(\frac{-U'_p}{\mathcal{J}'_p}\right)_{\substack{\mathcal{J}_p = 0 \\ q \neq p}} \tag{74}$$

Se poate arăta că impedanța proprie a unui ochi de legătură este suma impedanțelor proprii ale intrărilor și a impedanțelor mutuale dintre intrările cuprinse în ochiul de legătură.

Din relația (70) rezultă curenții ciclici din ochiurile de legătură:

$$[\mathcal{J}'_p] = [Z''_{qp}]^{-1} [E''_q] \tag{75}$$

Cunoscînd matricea $[\mathcal{J}'_p]$ se pot deduce succesiv dacă este necesară o rezolvare mai amănunțită a rețelei, matricea $[\mathcal{J}_j]_a$ cu ecuația (67) și apoi cu (53), matricea $[\mathcal{J}_s]$ rețeaua fiind astfel complet rezolvată, din punctul de vedere al curenților ciclici. Rezultă imediat curenții pe laturi.

3.5. *Teorema lui Thévenin generalizată pentru sistemul de multipoli activi interconectați*

3.5.1. *Interconectarea a doi multipoli activi*

Fie sistemul de doi multipoli activi 1 și 2 din figura 12, caracterizat de ecuațiile matriceale:

$$[U_k]_1 = [E'_k]_1 - [Z'_{kj}], [\mathcal{J}_j]_1 \tag{76}$$

$$[U_k]_2 = [E'_k]_2 - [Z'_{kj}]_2 [\mathcal{J}_j]_2 \tag{77}$$

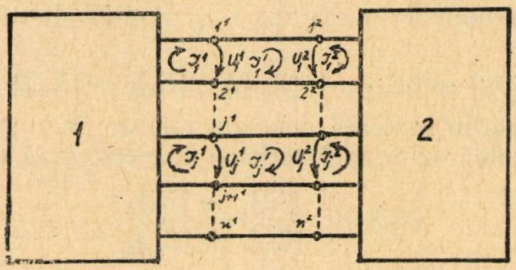


Fig. 12

Matricea de interconexiune are numărul de linii egal cu numărul total al intrărilor $(2n-2)$ și numărul de coloane egal cu al ochiurilor de interconexiune independente $(n-1)$ și este de forma:

$$[C] = \begin{bmatrix} +1 & 0 \cdots\cdots & 0 \\ 0 & 1 \cdots\cdots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 \cdots\cdots & 1 \\ -1 & 0 \cdots\cdots & 0 \\ 0 & -1 \cdots\cdots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 \cdots\cdots & -1 \end{bmatrix} \begin{matrix} \uparrow \\ \\ \\ \\ \\ (2n-2) \text{ linii} \\ \\ \\ \\ \\ \downarrow \end{matrix} \tag{78}$$

$$\longleftarrow (n-1) \text{ coloane} \longrightarrow$$

După interconectare sistemul celor doi multipoli este descris de o ecuație de tipul :

$$[\mathcal{J}'_p] = [Z''_{qp}]^{-1}\,[E_q] \tag{79}$$

în care matricele coloane $[\mathcal{J}'_p]$ și $[E'_q]$ au cîte $(n-1)$ termeni, iar matricea $[Z''_{qp}]$ este o matrice pătrată.

S-a arătat (relația 71) că avem :

$$[E''_q] = [C]_t\,[E'_k]_a = \begin{bmatrix} 1 & 0 \cdots & 0 & -1 & 0 \cdots & 0 \\ 0 & 1 \cdots & 0 & 0 & -1 \cdots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 \cdots & 1 & 0 & 0 \cdots & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [E'_k]_1 \\ \\ \\ [E'_k]_2 \end{bmatrix} \tag{80}$$

de unde rezultă :

$$[E''_q] = [E'_k]_1 - [E'_k]_2 \tag{81}$$

Calculul matricei $[Z''_{qp}]$ se face cu ajutorul relației (72) :

$$[Z''_{qp}] = [C]_t\,[Z'_{kj}]_a\,[C] = [Z'_{kj}]_1 + [Z'_{kj}]_2 \tag{82}$$

Înlocuind în ecuația (79) matricele $[E''_q]$ și $[Z''_{qp}]$ astfel calculate, rezultă :

$$[\mathcal{J}'_p] = \{[Z'_{kj}]_1 + [Z'_{kj}]_2\}^{-1}\{[E'_k]_1 - [E'_k]_2\} \tag{83}$$

Pentru a scoate în evidență analogia relației (83) cu forma uzuală a teoremei lui Thévenin, se adoptă scrierea convențională din relația (84) :

$$[\mathcal{J}'_p] = \frac{[E'_k]_1 - [E'_k]_2}{[Z'_{kj}]_1 + [Z'_{kj}]_2} \tag{84}$$

similară cu forma uzuală a teoremei lui Thévenin scrisă pentru interconectarea a doi dipoli activi. În acest caz însă matricea $[\mathcal{J}'_p]$ cuprinde curenții de contur din ochiurile de interconexiune ale sistemului și nu curenții din bornele de acces.

3.5.2. *Generalizarea teoremei lui Thévenin pentru sistemul de multipoli activi interconectați*

Relația (79) scrisă sub forma convențională :

$$[\mathcal{J}'_p] = \frac{[C]_t\,[E'_k]_a}{[C]_t\,[Z'_{jk}]_a\,[C]} \tag{85}$$

analoagă cu a ecuației (84), constituie o generalizare a teoremei lui Thévenin pentru sistemul de multipoli activi interconectați.

Ca în cazul generalizării teoremei lui Norton (vezi § 2.5.2), dacă sistemul de multipoli interconectați mai are legături în exterior se poate pune problema interconectării ansamblurilor de multipoli interconectați, rezolvarea rețelei făcîndu-se din aproape în aproape în etape succesive.

4. Concluzii

Ecuațiile (45) și (85) care constituie generalizări ale teoremelor lui Norton respectiv Thévenin pentru ansambluri de multipoli activi interconectați permit o rezolvare sistematică și comodă a rețelelor electrice complicate.

Spre deosebire de alte metode de calcul bazate pe ideea descompunerii în subrețele ([3], [4], [12]), metoda propusă nu necesită formule speciale de calcul ci utilizează relații simple care generalizează bine cunoscutele teoreme ale lui Norton și Thévenin. În plus metoda propusă are avantajul că în locul ecuațiilor complicate ale întregului sistem interconectat (corespunzătoare tuturor ochiurilor independente sau nodurilor sistemului interconectat) conduce la sisteme de ecuații mai simple care permit rezolvarea în etape, întîi a mărimilor care caracterizează starea exterioară (la accesuri) a subrețelelor și apoi din aproape în aproape a mărimilor care caracterizează starea elementelor interioare (componente) ale fiecăruia din subrețele.

În anexă se prezintă două exemple de aplicare a metodelor de calcul propuse.

APLICAȚII

Aplicația I

Fie circuitul din figura 13, pe care îl considerăm descompus în două subrețele ca în figura 14.

Rezolvarea acestui circuit se poate face aplicînd direct teorema lui Norton generalizată (§ 2.5.1).

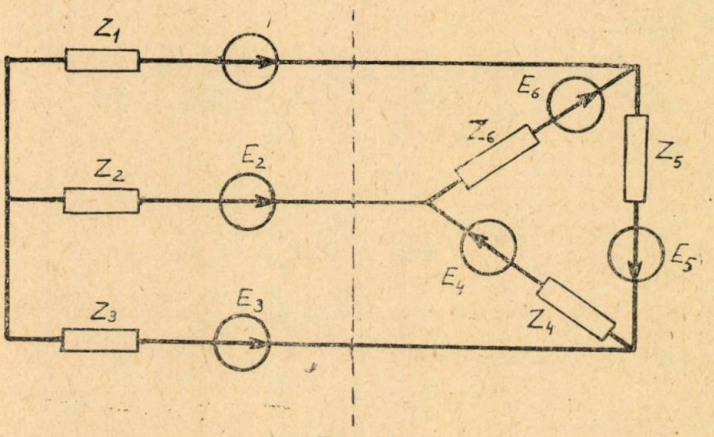


Fig. 13

Vom aplica însă metoda generalizată a potențialelor la noduri pentru ilustrarea acesteia. Fiecare multipol va fi caracterizat de o ecuație de tipul (12) (vezi § 2.1).

$$[I_j]_1 = [I'_{sc}]_1 - [Y'_{jk}]_1 [V_k]_1 \qquad (86)$$

pentru primul multipol și

$$[I_j]_2 = [I'_{scj}]_2 - [Y'_{jk}]_2 [V_k]_2 \tag{87}$$

pentru cel de al doilea.

Similar cu cazul precedent, se pune problema calculării matricelor

$$[Y'_{jk}]_1,\ [Y'_{jk}]_2,\ [I'_{scj}]_1 \text{ și } [I'_{scj}]_2.$$

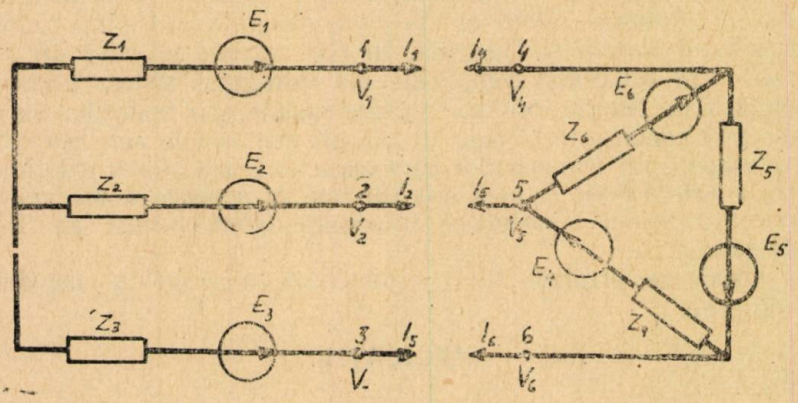


Fig. 14

Admitanța proprie Y'_{11} a bornei de acces 1 este după cum s-a arătat la § 2.1., admitanța ce leagă borna 1 de toate celelalte borne scurtcircuitate (vezi ecuația 16).

Avem deci:

$$Y'_{11} = \frac{1}{Z_1 + \dfrac{Z_2 Z_3}{Z_2 + Z_3}} = \frac{Z_2 + Z_3}{Z_1 Z_2 + Z_2 Z_3 + Z_3 Z_1} \tag{88}$$

și similar:

$$Y'_{22} = \frac{Z_3 + Z_1}{Z_1 Z_2 + Z_2 Y_3 + Z_3 Z_1} \tag{89}$$

$$Y'_{33} = \frac{Z_1 + Z_2}{Z_1 Z_2 + Z_2 Z_3 + Z_3 Z_1} \tag{90}$$

$$Y'_{44} = \frac{1}{Z_5} + \frac{1}{Z_6} \tag{91}$$

$$Y'_{55} = \frac{1}{Z_6} + \frac{1}{Z_4} \tag{92}$$

$$Y'_{66} = \frac{1}{Z_4} + \frac{1}{Z_5} \tag{93}$$

Admitanța de transfer Y'_{12} de la borna 2 la 1 se obține conform relației (15), calculînd curentul dat la borna 1 de o tensiune unitară aplicată între borna 2 și celelalte borne scurtcircuitate.

Avem deci:

$$Y'_{12} = Y'_{21} = -Y_{11} \cdot \frac{Z_3}{Z_2 + Z_3} = \frac{-Z_3}{Z_1Z_2 + Z_2Z_3 + Z_3Z_1} \tag{94}$$

Și similar:

$$Y'_{23} = Y'_{32} = -\frac{Z_1}{Z_1Z_2 + Z_2Z_3 + Z_3Z_1} \tag{95}$$

$$Y'_{31} = Y'_{31} = -\frac{Z_2}{Z_1Z_2 + Z_2Z_3 + Z_3Z_1} \tag{96}$$

$$Y'_{45} = Y'_{54} = -\frac{1}{Z_6} \tag{97}$$

$$Y'_{56} = Y'_{65} = -\frac{1}{Z_4} \tag{98}$$

$$Y'_{64} = Y'_{46} = -\frac{1}{Z_5} \tag{99}$$

Elementele matricelor curenților de scurtcircuit se calculează pentru scurtcircuit la toate bornele de acces.

Se vede că avem:

$$I'_{sc_1} = Y'_{11}E_1 + Y'_{12}E_2 + Y'_{13}E_3 \tag{100}$$

$$I'_{sc_2} = Y'_{21}E_1 + Y'_{22}E_2 + Y'_{23}E_3 \tag{101}$$

$$I'_{sc_3} = Y'_{31}E_1 + Y'_{32}E_2 + Y'_{33}E_3 \tag{102}$$

și

$$I'_{sc_4} = \frac{E_6}{Z_6} - \frac{E_5}{Z_5} \tag{103}$$

$$I'_{sc_5} = \frac{E_4}{Z_4} - \frac{E_6}{Z_6} \tag{104}$$

$$I'_{sc_6} = \frac{E_5}{Z_5} - \frac{E_4}{Z_4} \tag{105}$$

În acest fel ansamblul de doi multipoli neinterconectați este complet caracterizat, indiferent de modul de interconectare.

Conectarea particulară din figura 13 este caracterizată de o matrice de conexiune $[C]$ cu 6 linii și 2 coloane, a cărei elemente satisfac relația (24) (vezi § 2.3).

Se vede ușor că avem:

$$[C] = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \tag{106}$$

dacă am considerat polul 3 de interconectare drept pol de referință.

Se pot astfel ușor calcula matricele caracteristice ale sistemului de multipoli interconectați cu relațiile (29) și (30).

Avem astfel:

$$[I''_{sc_p}] = [C]_t\,[I'_{sc_k}]_a = \begin{bmatrix} 1\,0\,0\,1\,0\,0 \\ 0\,1\,0\,0\,1\,0 \end{bmatrix} \begin{vmatrix} I'_{sc_1} \\ I'_{sc_2} \\ I'_{sc_3} \\ I'_{sc_4} \\ I'_{sc_5} \\ I'_{sc_6} \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} I'_{sc_1} + I'_{sc_4} \\ I'_{sc_2} + I'_{sc_5} \end{bmatrix} \tag{107}$$

și

$$[Y''_{pq}] = [C]_t\,[Y'_{jk}]_a\,[C] = \begin{bmatrix} Y_{11} + Y_{44} & Y_{12} + Y_{45} \\ Y_{21} + Y_{54} & Y_{22} + Y_{55} \end{bmatrix} \tag{108}$$

Se pot găsi și în acest caz elementele matricelor direct, ținînd seamă de semnificațiile lor date de relațiile (31) și (32). Rezultă un sistem cu două ecuații cu două necunoscute, din care se obțin imediat potențialele polilor de interconectare 1 și 2 față de polul 3 luat ca referință. Matriceal ecuația este

$$[V'_q] = [Y''_{pq}]^{-1}\,[I''_{sc_p}] \tag{109}$$

Rezultă apoi din (23) potențialele accesurilor multipolilor și din (12) curenții la accesuri, așa cum se indică la § 2.4. Cu aceasta rețeaua este rezolvată.

Se observă că în aplicația prezentată, calculul este destul de simplu, iar mărimile ce intervin au o semnificație fizică imediată.

Acest exemplu simplu, care se rezolvă mai ușor direct, a fost ales pentru ilustrarea comodă a tehnicii de calcul propuse.

Pe măsură ce crește numărul nodurilor interne față de numărul accesurilor metoda de calcul propusă devine mai avantajoasă.

Aplicația II

Vom exemplifica aplicarea metodei generalizate a curenților de contur pentru proiectarea unui circuit electronic cu tranzitoare. Von considera cazul unui amplificator de curent continuu cu mai multe etaje.

De obicei, fiecare etaj de amplificare se proiectează separat, considerînd ca generator etajul precedent și ca sarcină pe următorul. Acest mod de calcul are avantajul simplității și satisface în general cerințele de exactitate impuse schemelor electronice. Punînd însă problema discutării influenței reciproce a tuturor elementelor schemei, va fi necesară proiec-

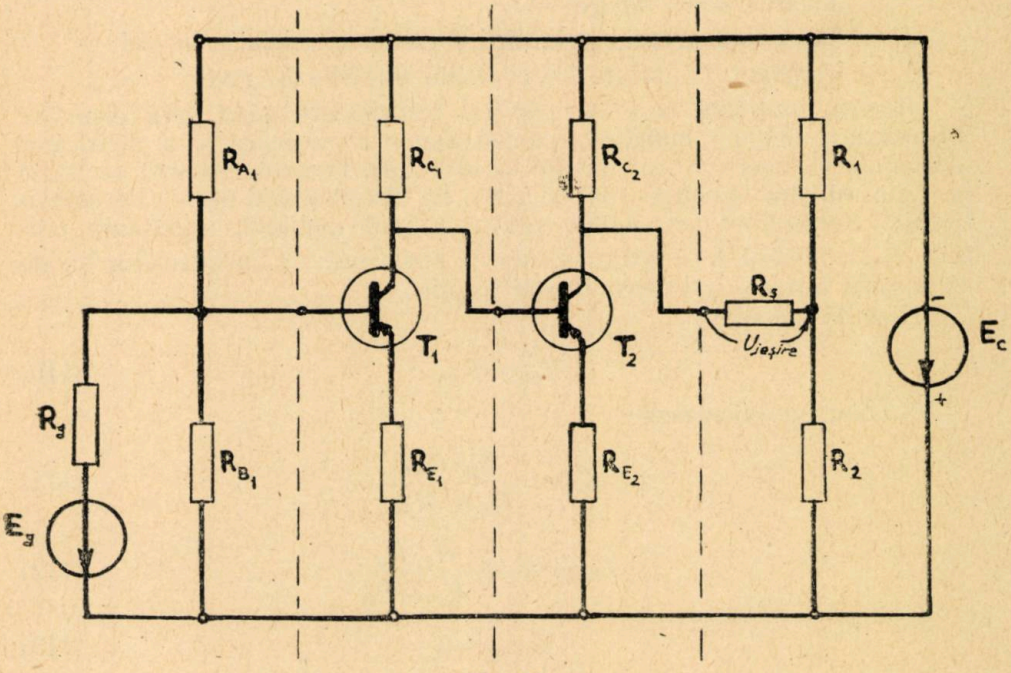


Fig. 15

tarea circuitului ca un întreg. În acest caz, volumul calculelor va crește mult. Utilizarea metodei propuse permite găsirea unui algoritm de rezolvare a circuitului, utilizînd eventual pentru efectuarea calculelor o mașină electronică cifrică.

În figura 15 este reprezentată schema unui amplificator de curent continuu cu tranzistoare, cu două etaje.

Metoda se aplică similar și în cazul unui amplificator cu mai multe etaje.

Vom împărți circuitul în subrețele după liniile punctate, corespunzător separării unui circuit de intrare, a două etaje de amplificare structural identice și a unui circuit de ieșire. Schema bloc a montajului împărțit astfel în multipoli, modul de interconectare a acestora, numerotarea intrărilor și a ochiurilor de interconexiune este dată în figura 16. Fiecare multipol este descris de o ecuație de forma :

$$[U_k]_m = [E'_k]_m - [Z'_{kj}]_m [I_j]_m \tag{62}$$

unde m este numărul atribuit multipolului respectiv.

După cum s-a arătat (§ 3.1) semnificațiile mărimilor care intervin în aceste ecuații sînt:

U_k este tensiunea la intrarea k a multipolului m;

$\mathcal{J}_j$— curentul de contur ce trece prin intrarea j;

Z'_{kj}— impedanța de transfer de la intrarea j; la intrarea k, cu toate intrările $k \neq j$ în gol;

Z'_{jj}— impedanța proprie a intrării j cu toate celelalte în gol;

E'_k— tensiunea la intrarea k cu toate intrările în gol.

Pentru multipolii care nu cuprind tranzistoare (deci fără elemente comandate), calculul matricelor impedanțelor de transfer și a matricelor tensiunilor de mers în gol funcție de structura fiecărui multipol se poate face, fie utilizînd ecuațiile (56) și (58), fie direct, ținînd seamă de semnificațiile elementelor lor. Astfel, pentru primul multipol, impedanța proprie Z'_{11} a intrării 1 se poate calcula ca suma tuturor impedanțelor legate de această intrare cînd celelalte sînt în gol.

Rezultă imediat:

$$Z'_{11} = R_{A1} \tag{110}$$

Similar se calculează:

$$Z'_{22} = \frac{R_g \cdot R_{B1}}{R_g + R_{B1}} \tag{111}$$

$$Z'_{99} = R_s + \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2} \tag{112}$$

$$Z'_{10,10} = 0 \tag{113}$$

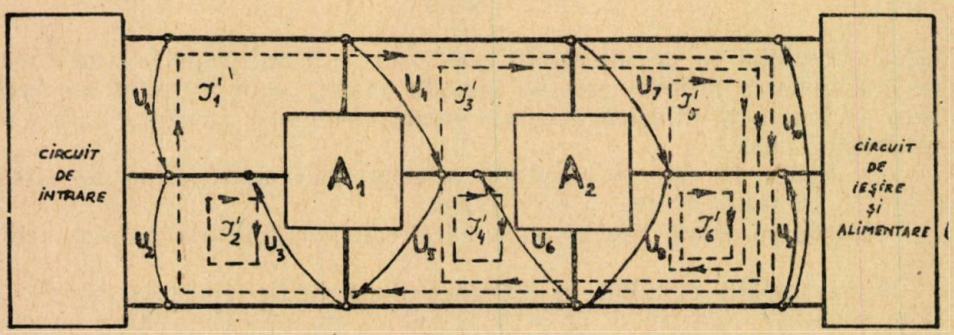


Fig. 16

Impedanța de transfer Z'_{12} de la intrarea 2 la intrarea 1 se calculează ca suma impedanțelor comune intrărilor 1 și 2 cînd celelalte sînt în gol, cu semnul plus dacă cei doi curenți de contur I_1 și I_2 le străbat în același sens și cu minus în cazul contrar.

Rezultă deci :

$$Z'_{12} = Z'_{21} = 0 \tag{114}$$

și

$$Z'_{9,10} = Z'_{10,9} = 0 \tag{115}$$

In cazul multipolilor care cuprind tranzistoare, în exemplul considerat cele două etaje de amplificare, se înlocuiesc întîi tranzistoarele cu schemele echivalente adecvate regimului de funcționare considerat.

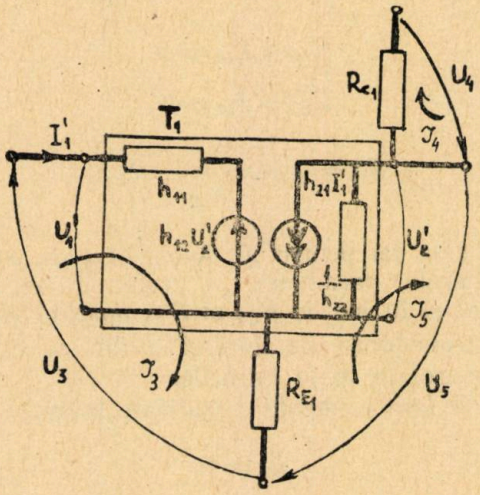


Fig. 17

Fiind vorba de un amplificator de curent continuu vom utiliza pentru tranzistoare schemele echivalente „*h*" cu parametrii hibrizi statici.

In figura 17 este reprezentat primul dintre etajele de amplificare după înlocuirea tranzistorului cu schema echivalentă. Calculul impedanțelor proprii ale intrărilor și ale impedanțelor de transfer se fac cu relațiile (60). Vom avea, de exemplu :

$$Z'_{33} = \left(\frac{-U_3}{\mathcal{I}_3}\right)_{\substack{I_4=0 \\ I_5=0}} = h_{11} + \frac{h_{12}U'_2}{\mathcal{I}_3} + R_{E1} \tag{116}$$

Dar în situația $\mathcal{I}_4 = 0$ și $\mathcal{I}_5 = 0$, se vede ușor că

$$U'_2 = -\frac{h_{21}I'_1}{h_{22}} = -\frac{h_{21}}{h_{22}}\mathcal{I}_3 \tag{117}$$

de unde:

$$Z'_{33} = h_{11} - \frac{h_{12}h_{21}}{h_{22}} + R_{E1} \tag{118}$$

Similar, rezultă:

$$Z'_{44} = R_{C1} \tag{119}$$

$$Z'_{55} = \frac{1}{h_{22}} + R_{E1} \tag{120}$$

și

$$Z'_{34} = Z'_{43} = 0 \tag{121}$$

$$Z'_{45} = Z'_{54} = 0 \tag{122}$$

$$Z'_{53} = Z'_{35} = \frac{h_{21}}{h_{22}} - R_{E1}. \tag{123}$$

Calculul se face la fel pentru al doilea etaj de amplificare și eventual pentru următoarele, parametrii „h" referindu-se de fiecare dată la tranzistorul respectiv și în loc de R_{C1} și R_{E1} apărînd R_{C2}, R_{E2} etc.

Tensiunile electromotoare ale fiecărei intrări se calculează direct ca tensiuni de mers în gol la toate intrările.

Pentru multipolii fără elemente comandate rezultă:

$$E'_1 = 0 \tag{124}$$

$$E'_2 = \frac{-R_{B1}}{R_{B1} + R_g} E_g \tag{125}$$

$$E'_9 = +\frac{R_2}{R_1 + R_2} E_C \tag{126}$$

$$E'_{10} = +E_C \tag{127}$$

iar pentru cele două etaje de amplificare:

$$E'_3 = E'_4 = E'_5 = E'_6 = E'_7 = E'_8 = 0 \tag{128}$$

Astfel, cunoscînd matricele Z'_{jk} și E'_k pentru toți multipolii aceștia sînt complet caracterizați indiferent de modul lor particular de interconectare. Pentru cazul de interconectare reprezentat în figura 16, matricea $[C]$ de interconectare va avea zece linii și șase coloane corespunzător numărului total de intrări și respectiv numărului de ochiuri de interconectare.

Aplicînd cele expuse la § 3.3., matricea de interconectare rezultă de forma :

$$[C] = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} \tag{129}$$

Putem astfel să calculăm matricele impedanțelor de transfer și ale tensiunilor electromotoare ale ochiurilor de interconectare cu ajutorul relațiilor (71) și (72).

Avem, astfel imediat :

$$[E''_q] = [C]_t\,[E'_k] = \begin{vmatrix} E'_1 + E'_2 + E'_{10} \\ E'_2 \\ E'_{10} \\ 0 \\ E'_{10} \\ E'_g \end{vmatrix} \tag{130}$$

Se pot găsi însă și în acest caz elementele matricelor sistemului interconectat ținînd seamă de semnificațiile lor, precizate la § 3.4.

Astfel, impedanța proprie Z''_1 a ochiului de interconexiune 1 este suma impedanțelor proprii ale intrărilor conectate la ochiul 1 și a impedanțelor de transfer dintre intrările cuprinse în ochiul 1, adică :

$$Z''_{11} = Z'_{11} + Z'_{22} + Z'_{10,10} + 2\,Z'_{12} \tag{131}$$

Similar :

$$Z''_{22} = Z'_{22} + Z'_{33} \tag{132}$$

$$Z''_{33} = Z'_{44} + Z'_{55} + Z'_{10,10} + 2\,Z'_{45} \tag{133}$$

$$Z''_{44} = Z'_{55} + Z'_{66} \tag{134}$$

$$Z''_{55} = Z'_{77} + Z'_{88} + Z'_{10,10} + 2\,Z'_{78} \tag{135}$$

$$Z'_{66} = Z'_{88} + Z'_{99} \tag{136}$$

Impedanța de transfer Z''_{12} de la ochiul 2 la ochiul 1 este suma impedanțelor de transfer între intrările conectate la ochiul 1 și cele conectate la ochiul 2, luate cu semnul ce rezultă din asocierea sensurilor pozitive ale celor două ochiuri cu sensurile pozitive ale intrărilor.

Regula de asociere a sensurilor este următoarea : dacă ambele intrări sînt parcurse la fel, în sens direct sau invers, de sensurile directe ale ochiurilor discutate, impedanța de transfer se ia cu semnul pozitiv, în caz contrar, semnul este negativ.

Rezultă astfel :

$$Z''_{12} = Z''_{21} = Z'_{22} + Z'_{12} \tag{137}$$

$$Z''_{13} = Z''_{31} = Z'_{99} + Z'_{10,10} + 2\,Z'_{9,10} \tag{138}$$

$$Z''_{14} = Z''_{41} = 0 \tag{139}$$

$$Z''_{15} = Z''_{51} = Z'_{99} + Z'_{10,10} + 2\,Z'_{9,10} \tag{140}$$

$$Z''_{16} = Z''_{61} = Z'_{99} \tag{141}$$

$$Z''_{23} = Z''_{32} = Z'_{53} + Z'_{34} \tag{142}$$

$$Z''_{24} = Z''_{42} = Z_{53} \tag{143}$$

$$Z''_{25} = Z''_{52} = Z''_{26} = Z''_{62} = 0 \tag{144}$$

$$Z''_{34} = Z''_{43} = Z'_{55} + Z'_{45} \tag{145}$$

și așa mai departe.

Cunoscînd matricele $[E'_p]$ și $[Z''_{pq}]$ problema este rezolvată din punctul de vedere al algoritmului de găsirea soluției, deoarece avem :

$$[\mathcal{J}'_p] = [Z''_{pq}]^{-1}\,[E'_q] \tag{146}$$

relație care dă curenții din ochiurile de interconectare.

În cazul rețelei prezentate este important de cunoscut numai curenții $\mathcal{J}_2$, $\mathcal{J}_4$ și $\mathcal{J}_6$ la intrarea, respectiv la ieșirea etajelor de amplificare.

Tensiunea de ieșire va fi

$$\mathcal{J}_{\text{ieșire}} = R_s \cdot \mathcal{J}_6 \tag{147}$$

iar amplificarea ansamblului va fi :

$$A = \frac{U_{\text{ieșire}}}{E_g} \tag{148}$$

Se pot, de asemenea, calcula ușor factorii de amplificare în curent a fiecărui etaj de amplificare:

$$Ai_1 = \frac{\mathcal{J}_4}{\mathcal{J}_2} \tag{149}$$

$$Ai_2 = \frac{\mathcal{J}_6}{\mathcal{J}_4} \tag{150}$$

și al ansamblului

$$Ai = Ai_1 \cdot Ai_2 = \frac{\mathcal{J}_6}{\mathcal{J}_2}. \tag{151}$$

Catedra de electrotehnică II
Institutul politehnic București

BIBLIOGRAFIE

1. *Р. А. Воронов:* Общая теория четырехполюсников и многополюсников, Гостехиздат, 1951.
2. *О. М. Богатырев:* Общий метод решения задач линейных цепей при переменных сопротивлениях в ветвях, «Электричество», № 9, 1955.
3. *Г. Е. Пухов:* Теория метода подсхем, «Электричество», № 8, 1952
4. *И. Г. Максимович:* Линейные электрические цепи и их преобразования, ГЭИ, Москва, 1961.
5. *В. П. Сигорский:* Методы анализа электрических схем и много полюсными элементами, ИАН Украинской ССР, Киев, 1958
6. *M. Bayard:* Théorie des réseaux de Kirchhoff. Editions de la Revue d'Optique, Paris, 1954.
7. *Wilhelm Cauer:* Theorie der linearen Wecheselstrom Schaltungen, Berlin, Akademie Verlag 1954.
8. *L. Weinberg:* Networks Analysis and Synthesis, McGraw-Hill, 1962.
9. *F. Reza, S. Seely:* Modern Network Analysis, McGraw-Hill, New-York, 1959.
10. *S. Mason, Zimmermann:* Electronic circuits, signals, and systems, John Wiley & sons, New-York — London, 1960.
11. *G. Kron:* Tensor Analysis of Networks, New-York, 1939.
12. *Myril B. Reed, Georgia B. Reed ș.a.:* A digital approach to Power-System Engineering — I. II, III, IV, A.I.E.E., Power Apparatus and Systems, number 54, 1961.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC BUCUREȘTI
Tomul XXVI — 1964. Fascicola 4

ELECTRONICĂ

C.Z. 621.3.02

ASUPRA UNDELOR PLANE NEOMOGENE

EDMOND NICOLAU

În literatura de specialitate, prin unde plane neomogene se înțeleg undele plane la care vectorul de undă este complex [1], [2]. Ne propunem ca în cele ce urmează să demonstrăm că în medii omogene izotrope și nedisipative nu pot exista unde plane neomogene.

Precizăm că propagarea se studiază în cazul unei variații în timp armonice a mărimilor caracteristice cîmpului electromagnetic.

Notînd cu F unul din fazorii cîmpului, se va scrie

$$\underline{F} = \underline{F}_s \exp(-jmz)$$

unde, în cazul undelor neomogene

$$m = m_r + jm_i$$

Sistemul de coordonate s-a ales astfel încît direcția de propagare a undelor plane respective să coincidă cu axa z.

Separînd exponentul real de cel imaginar, rezultă

$$\underline{F} = \underline{F}_s \exp(m_i z) \exp(-jm_r z)$$

ceea ce arată că amplitudinea cîmpului are o variație exponențială în timpul propagării.

2. Această proprietate pare însă a fi în contradicție cu principiul conservării energiei. În adevăr [3] există o anumită legătură între fluxul vectorului Poynting complex S și densitatea de putere p generată sau disipată în mediul în care are loc propagarea.

În cazul mediilor nedisipative, se poate scrie

$$\nabla \mathbf{S}_r = -Re(p)$$

Dacă ne situăm în afara regiunii în care sînt generatori, atunci

$$\nabla \mathbf{S}_r = 0 \quad \text{sau} \quad \int_{\Sigma} \mathbf{S}_r \mathbf{n}\, da = 0$$

Σ fiind o suprafață închisă ce nu închide în interior generatori.

Dacă se ia suprafața Σ ca fiind un cilindru la care cele două baze sînt cuprinse în plane echifază, atunci se poate demonstra că în cazul undelor plane, puterea ce trece prin cele două baze este aceeași — deci cîmpul rămîte constant de-a lungul liniilor normale pe planele echifază.

Deci, prin propagare cîmpul nu-și schimbă amplitudinea, ceea ce este normal, mediul nefiind disipativ și neconținînd nici surse distribuite.

În cazul undelor neomogene, se constată totuși o atenuare exponențială a cîmpului — cu un exponent pozitiv sau negativ — deși propagarea se produce într-un mediu nedisipativ. Aceasta vine în contradicție cu principiul conservării energiei, deci sîntem tentați să emitem ipoteza că nu pot exista unde plane neomogene în medii nedisipative. Vom demonstra aceasta după ce în prealabil vom stabili ecuațiile undelor plane neomogene.

3. Pentru a stabili ecuațiile verificate de undele neomogene, se pleacă de la legile cîmpului electromagnetic, adică de la ecuațiile lui Maxwell.

Legea inducției se scrie

$$\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ E_x & E_y & E_z \end{vmatrix} = -j\omega\mu\mathbf{H}$$

Deoarece F nu depinde decît de z, scriem

$$\mathbf{F}(z) = \mathbf{F}_o \exp(-jmz) = \mathbf{F}_o \exp(-j\mathbf{m}r)$$

unde $\mathbf{m}$ este un vector complex orientat după axa z.

Ecuațiile corespunzătoare legii inducției sînt:

$$-\frac{\partial E_y}{\partial z} = -j\omega\mu H_x$$

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} = -j\omega\mu H_y$$

$$0 = -j\omega\mu H_z$$

sau

$$mE_y = \omega\mu H_x$$

$$-mE_x = \omega\mu H_y$$

$$0 = \omega\mu H_z$$

ceea ce poate fi scris mai concis

$$\mathbf{m} \times \mathbf{E} = \omega\mu\mathbf{H}. \tag{1}$$

Implicit,

$$H_z = 0.$$

În mod analog, din legea circuitului magnetic se stabilește că

$$\mathbf{m} \times \underline{\mathbf{H}} = -\omega \varepsilon \underline{\mathbf{E}} \tag{2}$$

cu corolarul său

$$E_z = 0 .$$

În ceea ce privește ecuațiile de stare, ele dau

$$\nabla \underline{\mathbf{E}} = \frac{\partial \underline{E}_z}{\partial z} = -j m \underline{E}_z = 0$$

respectiv

$$-j m \underline{E}_z = 0$$

care sînt automat satisfăcute, deoarece

$$E_z = 0 \quad \text{și} \quad H_z = 0 .$$

4. În același timp cîmpul considerat satisface ecuația undelor, deci

$$\square \underline{\mathbf{E}} = 0$$

ceea ce dă

$$-m^2 \underline{\mathbf{E}} + \frac{\omega^2}{v^2} \underline{\mathbf{E}} = 0$$

de unde

$$m^2 = \left(\frac{\omega}{v}\right)^2 . \tag{3}$$

Aceeași condiție se obține din ecuația undelor scrisă pentru $\underline{\mathbf{H}}$.

S-a considerat mai sus $\mathbf{m}$ este un vector complex, astfel încît m se obține efectuînd produsul scalar

$$m^2 = \mathbf{m}\,\mathbf{m} .$$

În acest caz

$$m^2 = (\mathbf{m}_r + j\,\mathbf{m}_i)\,(\mathbf{m}_r + j\,\mathbf{m}_i)$$

$$= m_r^2 - m_i^2 + 2j\,\mathbf{m}_r\,\mathbf{m}_i . \tag{4}$$

Din relațiile (3) și (4) rezultă

$$m_r^2 - m_i^2 = \left(\frac{\omega}{v}\right)^2$$

$$\mathbf{m}_r\,\mathbf{m}_i = 0$$

Ultima formulă arată că vectorii $\mathbf{m}_r$ și $\mathbf{m}_i$ sînt ortogonali între ei.

5. Ne propunem să stabilim poziția reciprocă a vectorilor $\underline{\mathbf{E}}_r$, $\underline{\mathbf{E}}_i$, $\underline{\mathbf{H}}_r$, $\underline{\mathbf{H}}_i$, $\mathbf{m}_r$ și $\mathbf{m}_i$.

Proprietățile generale ale undelor plane cer ca în același timp să fie satisfăcute relațiile care arată că $\underline{E}$, $\underline{H}$ și $\underline{m}$ formează un triedru triortogonal :

$$\underline{E}\ \underline{H} = 0$$
$$\underline{E}\ \underline{m} = 0 \tag{5}$$
$$\underline{H}\ \underline{m} = 0 .$$

Ținînd seama de faptul că vectorii $\underline{E}$, $\underline{H}$ și $\underline{m}$ sînt complecși, separînd în (5) părțile reală și imaginară, se obține

$$\mathbf{E}_r\ \mathbf{H}_r - \mathbf{E}_i\ \mathbf{H}_i = 0 \tag{6}$$
$$\mathbf{E}_r\ \mathbf{H}_i + \mathbf{E}_i\ \mathbf{H}_r = 0 \tag{7}$$
$$\mathbf{E}_r\ \mathbf{m}_r - \mathbf{E}_i\ \mathbf{m}_i = 0 \tag{8}$$
$$\mathbf{E}_r\ \mathbf{m}_i + \mathbf{E}_i\ \mathbf{m}_r = 0 \tag{9}$$
$$\mathbf{H}_r\ \mathbf{m}_r - \mathbf{H}_i\ \mathbf{m}_i = 0 \tag{10}$$
$$\mathbf{H}_r\ \mathbf{m}_i + \mathbf{H}_i\ \mathbf{m}_r = 0 . \tag{11}$$

Să revenim la legile de evoluție.
Soluțiile (1) și (2) se pot scrie și sub forma

$$(\mathbf{m}_r + j\mathbf{m}_i) \times (\mathbf{E}_r + j\mathbf{E}_i) = \omega\mu\,(\mathbf{H}_r + j\mathbf{H}_i)$$
$$(\mathbf{m}_r + j\mathbf{m}_i) \times (\mathbf{H}_r + j\mathbf{H}_i) = -\omega\varepsilon\,(\mathbf{E}_r + j\mathbf{E}_i) .$$

Separînd partea reală de cea imaginară se obține

$$\mathbf{m}_r \times \mathbf{E}_r - \mathbf{m}_i \times \mathbf{E}_i = \omega\mu\,\mathbf{H}_r \tag{12}$$
$$\mathbf{m}_i \times \mathbf{E}_r + \mathbf{m}_r \times \mathbf{E}_i = \omega\mu\,\mathbf{H}_i \tag{13}$$
$$\mathbf{m}_r \times \mathbf{H}_r - \mathbf{m}_i \times \mathbf{H}_i = -\omega\varepsilon\,\mathbf{E}_r \tag{14}$$
$$\mathbf{m}_i \times \mathbf{H}_r + \mathbf{m}_r \times \mathbf{H}_i = -\omega\varepsilon\,\mathbf{E}_i . \tag{15}$$

Pentru obținerea unor informații privind structura undelor neomogene, înmulțim vectorial ecuația (12) cu $\mathbf{m}_r$:

$$\mathbf{m}_r \times (\mathbf{m}_r \times \mathbf{E}_r) - \mathbf{m}_r \times (\mathbf{m}_i \times \mathbf{E}_i) = \omega\mu\,\mathbf{m}_r \times \mathbf{H}_r .$$

Dezvoltînd dublele produse vectoriale se obține

$$(\mathbf{m}_r\ \mathbf{E}_r)\ \mathbf{m}_r - (\mathbf{m}_r\ \mathbf{m}_r)\ \mathbf{E}_r - (\mathbf{m}_r\ \mathbf{E}_i)\ \mathbf{m}_i + (\mathbf{m}_r\ \mathbf{m}_i)\ \mathbf{E}_i = \omega\mu\,\mathbf{m}_r \times \mathbf{H}_r . \tag{16}$$

Cum din (9) avem

$$\mathbf{m}_r\ \mathbf{E}_i = -\mathbf{m}_i\ \mathbf{E}_r$$

din (16) rezultă că

$$(\mathbf{m}_r\ \mathbf{E}_r)\ \mathbf{m}_r + (\mathbf{m}_i\ \mathbf{E}_r)\ \mathbf{m}_i - m_r^2\ \mathbf{E}_r = \omega\mu\,\mathbf{m}_r \times \mathbf{H}_r .$$

$$\mathbf{E}_r (1 - m_r^2) = \omega \mu \mathbf{m}_r \times \mathbf{H}_r$$

ceea ce arată că $\mathbf{E}_r$ este normal atît pe $\mathbf{m}_r$ cît și pe $\mathbf{H}_r$:

$$\mathbf{E}_r \mathbf{m}_r = 0 \tag{18}$$

$$\mathbf{E}_r \mathbf{H}_r = 0 . \tag{19}$$

Se poate proceda în mod analog, înmulțind vectorial ecuația (12) cu $\mathbf{m}_r$ sau, în general, înmulțind vectorial cu $\mathbf{m}_r$ sau $\mathbf{m}_i$ oricare din ecuațiile (12) — (15).

Calculele pot fi însă evitate observînd că (14) se poate obține din (12), schimbînd $\mathbf{E}$ în $\mathbf{H}$ și μ $\mathbf{H}$ în $-\varepsilon$ $\mathbf{E}$. Aceasta înseamnă că din (14) se obține

$$\mathbf{H}_r (1 - m_r^2) = - \omega \varepsilon \mathbf{m}_r \times \mathbf{E}_r$$

ceea ce arată că $\mathbf{H}_r$ este normal, atît pe $\mathbf{m}_r$ cît și pe $\mathbf{E}_r$:

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_r \mathbf{m}_r &= 0 \\ \mathbf{H}_r \mathbf{E}_r &= 0 . \end{aligned} \tag{20}$$

Din (18), (19) și (20) rezultă că $\mathbf{E}_r$, $\mathbf{H}_r$ și $\mathbf{m}_r$ formează un triedru dreptunghic.

În ceea ce privește ecuația (13), ea se poate obține din (12) făcînd transformările

$$\mathbf{m}_r \to \mathbf{m}_i \qquad -\mathbf{m}_i \to \mathbf{m}_r \qquad \mathbf{H}_r \to \mathbf{H}_i .$$

Făcînd aceste transformări în (17) se obține

$$\mathbf{E}_r (1 - m_i^2) = \omega \mu \mathbf{m}_i \times \mathbf{H}_i .$$

Aceasta arată că $\mathbf{E}_r$ este normal și pe $\mathbf{m}_i$ și pe $\mathbf{H}_i$:

$$\mathbf{E}_r \mathbf{m}_i = 0$$

$$\mathbf{E}_r \mathbf{H}_i = 0 .$$

În fine, deoarece (15) se obține din (12) prin transformările

$$\mathbf{m}_r \to \mathbf{m}_i \qquad \mathbf{m}_i \to \mathbf{m}_r \qquad \mathbf{E}_r \to \mathbf{H}_r \qquad \mathbf{E}_i \to \mathbf{H}_i$$

$$\mu \mathbf{H}_r \to - \varepsilon \mathbf{E}_i$$

rezultă că (17) se transformă în

$$\mathbf{H}_r (1 - m_i^2) = - \omega \varepsilon \mathbf{m}_i \times \mathbf{E}_i$$

ceea ce arată că $\mathbf{H}_r$ este normal atît pe $\mathbf{m}_i$ cît și pe $\mathbf{E}_i$:

$$\mathbf{H}_r \mathbf{m}_i = 0$$

$$\mathbf{E}_i \mathbf{H}_r = 0 .$$

Dar (13) se poate obține din (12) și cu transformările

$$\mathbf{E}_i \to \mathbf{E}_r \qquad \mathbf{E}_r \to \mathbf{E}_i \qquad \mathbf{H}_r \to \mathbf{H}_i \qquad \mathbf{m}_r \leftrightarrow \mathbf{m}_i$$

ceea ce dă

$$\mathbf{E}_i (1 - m_i^2) = \omega \mu \mathbf{m}_i \times \mathbf{H}_i .$$

Aceasta arată că $\mathbf{E}_i$ este normal și pe $\mathbf{m}_i$ și pe $\mathbf{H}_i$:

$$\mathbf{E}_i \mathbf{m}_i = 0$$

$$\mathbf{E}_i \mathbf{H}_r = 0$$

deci și $\mathbf{E}_i$, $\mathbf{m}_i$, $\mathbf{H}_i$ formează un triedru dreptunghic.

Dar, în același timp, între aceste două triedre $(\mathbf{E}_i, \mathbf{H}_i, \mathbf{m}_i)$ și $(\mathbf{E}_r, \mathbf{H}_r \mathbf{m}_r)$ există anumite relații. Astfel $\mathbf{m}_i$ și $\mathbf{m}_r$ sînt ortogonali, ca și $\mathbf{m}_i$ și $\mathbf{H}_r$, $\mathbf{E}_r$ și $\mathbf{H}_i$, $\mathbf{E}_r$ și $\mathbf{m}_i$.

Dar aceste trei relații nu pot fi satisfăcute simultan.

Să considerăm numai primele două relații : $\mathbf{m}_i$ este normal pe și $\mathbf{m}_r$ $\mathbf{H}_r$, ceea ce arată că $\mathbf{m}_i$ este paralel cu $\mathbf{E}_r$. Dar din a doua și a patra relație rezultă că $\mathbf{m}_i$ este normal simultan pe $\mathbf{H}_r$ și pe $\mathbf{E}_r$, ceea ce este însă în contradicție cu afirmația precedentă.

Deci undele plane neomogene nu pot exista în medii nedisipative, omogene și izotrope.

Menționăm că în lucrarea [2] se afirmă că undele plane neomogene nu pot exista în medii nemărginite, nesatisfăcînd condițiile de la infinit. Dar, așa cum s-a demonstrat aci, aceste unde nu pot exista nici în domenii finite ; în concluzie, în medii omogene, izotrope și nedisipative nu pot exista unde plane neomogene.

Catedra de radiocomunicații
Institutul politehnic București

BIBLIOGRAFIE

1. *J. A. Stratton,* Electromagnetic Theory, McGraw Hill. New York.

2. *F. I. Fedorov,* Optika anizotropnîh sred, Izd. Akad. Nauk, R.S.S.R., Minsk 1958.

3. *Edm. Nicolau,* Propagarea undelor electromagnetice, vol. I, Ed. Acad. R.P.R., 1960, pag. 176.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC BUCUREȘTI
Tomul XXVI — 1964, Fascicola 4

MAȘINI TERMICE

C. Z. 621.43

INFLUENȚA ZONEI DE ARDERE DIN FLACĂRA TURBULENTĂ ASUPRA FENOMENULUI DE DISPERSIUNE CICLICĂ DIN MOTORUL CU APRINDERE PRIN SCINTEIE

BERTHOLD GRÜNWALD

Fenomenul de dispersiune ciclică constă în ireproductibilitatea fazelor de ardere din ciclurile succesive ale unui motor cu ardere internă.

La motorul cu aprindere prin compresiune fenomenul de dispersiune ciclică însoțește procesul de ardere ca o componentă secundară. La motorul cu aprindere prin scînteie fenomenul de dispersiune ciclică intervine ca o componentă principală a procesului mărind gradul lui de complexitate.

Unii autori apreciază că dacă toate ciclurile unui motor cu aprindere prin scînteie ar atinge presiunea maximă, s-ar obține un cîștig de putere de 20%.

Problema poate fi privită și dintr-un punct de vedere opus ; dacă unele cicluri n-ar prezenta abateri de la valoarea medie s-ar îmbunătăți performanțele motorului la limita de detonație.

Fenomenul de dispersiune ciclică se intensifică în cazul arderii amestecurilor sărace ceea ce face imposibilă utilizarea lor.

Cu privire la natura fenomenului de dispersiune ciclică au fost enunțate păreri diferite .

Atribuind fluctuația presiunii maxime, poziției pe ciclu a scînteii, variației intensității scînteii, turbulenței, induse fie de fluidul care pătrunde în cilindru, fie de flacăra însăși, Vichnievschi și Weissman [1] conchid în 1953 că nu se poate aprecia care dintre acești factori este predominant.

Ulterior, atît Salè (1958) cît și Soltan (1960) ajung la concluzia că abaterile presiunii maxime nu sînt datorate variației momentului de aprindere sau caracteristicilor instalației pentru declanșarea scînteii [2], [3].

Se consideră că fenomenele care au loc în primele două faze ale procesului de ardere influențează diferit dispersiunea ciclică.

Peșchin consideră că „ireproductibilitatea primului stadiu al procesului de ardere, depinde în esență de perfecțiunea amestecului (omogenitatea amestecului) care conduce la oscilațiile momentului în care începe arderea masei principale de amestec [4].

Salé menționează un punct de vedere opus : „omogenitatea amestecului nu pare să constituie o cauză esențială a fenomenului de dispersiune" [2].

In ceea ce privește influența fazei principale de ardere asupra fenomenului de dispersiune ciclică părerile autorilor menționați mai sus coincid.

Astfel în 1956 Peșchin notează : „Procesul arderii turbulente a masei principale de încărcătură este prin sine însuși (independent de poziția pe ciclu) ireproductibil, iar ireproductibilitatea este legată de ireproductibilitatea turbulenței".

In 1958, Salé și Vichnievschi menționează că : „caracterul aleator al propagării în medii turbulente sugerează ideea că dispersia constată în motor, este legată de natura însăși a procesului de ardere".

Acest punct de vedere este justificat de încercările lui Salé care au arătat că : „reducerea dispersiunii duratelor de ardere (determinate cu ajutorul bujiilor de ionizare n.n.) este însoțită de o micșorare foarte importantă a fluctuațiilor locale, de la forma frontului flacării".

Este posibilă apariția unei dispersiuni pronunțate în condițiile unei propagări identice? Dacă răspunsul este pozitiv, cum se explică în acest caz fenomenul de dispersiune?

Aceste întrebări ne-au fost sugerate de un model fizic nou pe care l-am propus într-o lucrare anterioară.

Una din particularitățile fundamentale ale propagării flăcărilor turbulente o constituie desfășurarea reacției chimice într-o zonă de mare adîncime.

Folosind date experimentale recente, în lucrările [5], [6], [7] autorul elaborează un model fizic nou al propagării flăcării turbulente în motorul cu aprindere prin scînteie.

Caracteristicile esențiale ale modelului propus sînt :

a) rămînerea în urmă a vitezei reacției chimice în raport cu viteza masică de propagare, din care cauză în spatele frontului de aprindere *) o fracțiune însemnată din numărul de molecule de combustibil intră în reacție cu întîrziere ;

b) nepotrivirea dintre momentul final al propagării și momentul în care intră în reacție ultimele molecule de combustibil din camera de ardere.

c) coincidența dintre momentul final al propagării și momentul în care presiunea atinge valoarea maximă ; această coincidență reprezintă o particularitate esențială a propagării flăcării în motorul cu aprindere prin scînteie.

Printre ciclurile ridicate de autor, pe un motor I.T.9—1 la rapoarte de comprimare diferite, s-a găsit că un număr relativ mare (10—15%) se bucură de proprietatea că presiunea maximă se realizează la același unghiu RAC, adică realizează sfîrșitul propagării în același moment.

In figura 1 se prezintă două asemenea cicluri : ciclul intermediar și cel de deasupra lui (condițiile de experimentare sînt menționate în legenda figurii). Ciclurile sînt astfel alese, încît unul dintre ele (ciclul interme-

*) Conceptul clasic de front de flacără este impropriu pentru flăcările turbulente, deoarece presupune arderea amestecului pe o suprafață de ardere.

diar) este foarte apropiat de diagrama medie (presiunea maximă diferă cu numai 0,4 Kgf/cm^2) ; în cele ce urmează se va numi acest ciclu, normal, spre deosebire de cel de-de-asupra lui care se va numi ciclu dispers.

Interpretarea acestor cicluri în lumina modelului fizic propus permite elaborarea unei explicații noi a fenomenului de dispersiune ciclică.

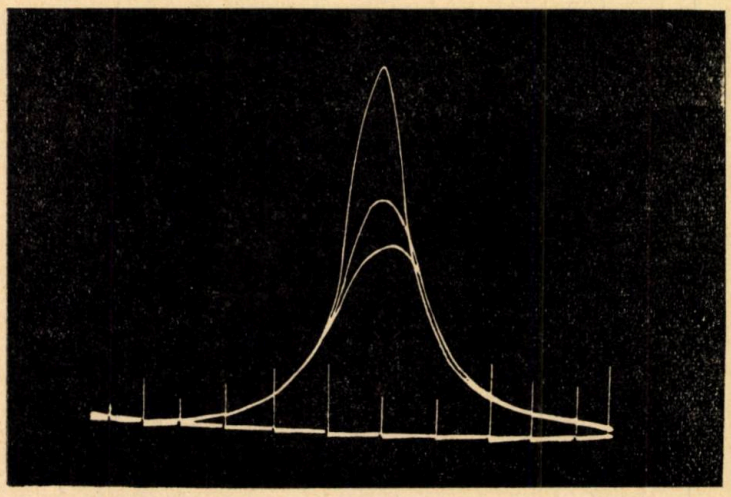


Fig. 1

S-a aplicat ciclurilor menționate mai sus, metoda de prelucrare propusă în lucrările [7], [8].

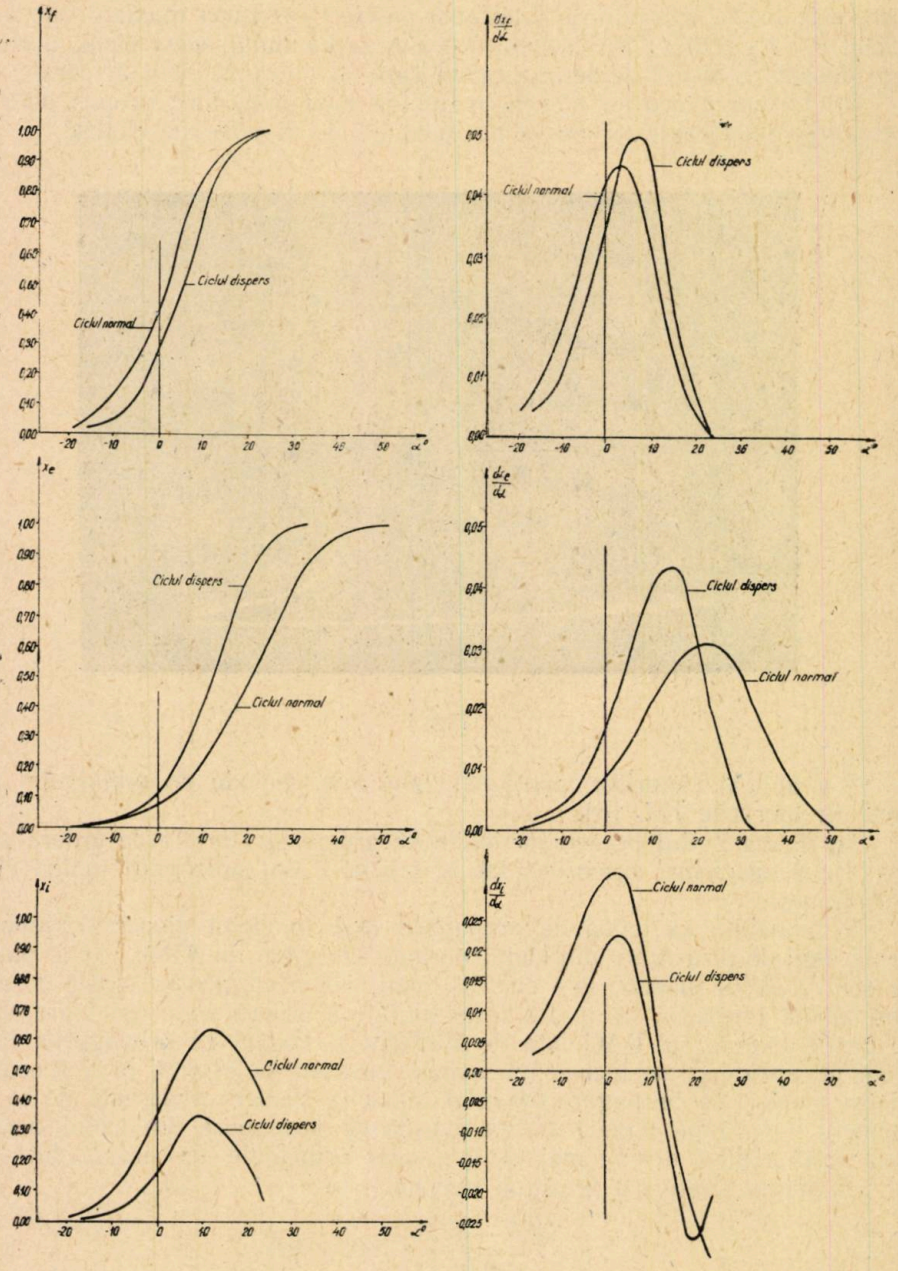
In figura 2 sînt prezentate legile de ardere și vitezele de ardere pentru cele două cicluri succesive, iar în tabela 1 sînt prezentați indicii cinetici obținuți.

Se constată că legea de propagare (x_f) în ciclul dispers rămîne în urma legii de propagare din ciclul normal. De pildă, la 8°RAC după p.m.i., x_f pentru ciclul dispers este cu 27% mai mic decît pentru ciclul normal. Din tabela 1 rezultă că durata fazei inițiale a arderii este mai mare chiar în ciclul dispers (31°RAC față de 26,2°RAC). Faptul că propagarea frontului de aprindere se încheie în același moment se explică prin aceea că viteza masică de propagare ($dx_f/d\alpha$) în ciclul dispers depășește de la un moment dat (după p.m.i.) viteza masică de propagare din ciclul normal ceea ce și explică durata mai mică a fazei principale de ardere. ($\alpha_y - \alpha_1$).

Abaterea relativă a presiunii maxime este :

$$\delta = \frac{29{,}7 - 19{,}0}{19{,}0} \cdot 100 = 56\%$$

Astfel, creșterea enormă a presiunii în ciclul dispers, poate apare surprinzătoare dacă se ține seama că condițiile de propagare a flăcării sînt mai puțin favorabile în acest ciclu față de cele din ciclul normal.



LEGILE DE ARDERE ȘI VITEZELE DE ARDERE PENTRU DOUA CICLURI SUCCESIVE DIFERITE

Fig. 2

Pentru a explica divergența însemnată dintre cele două diagrame este util să se urmărească legile de ardere (x_e) și vitezele de ardere efective ($dx_e/d\alpha$).

Se constată că viteza maximă de ardere efectivă ($dx_e/d\alpha$) este pentru ciclul dispers 0,04350 iar pentru ciclul normal 0,0317, deci cu 37% mai mare în primul caz; fracțiuna de amestec care intră efectiv în reacție este totdeauna mai mare în ciclul dispers, legea de ardere efectivă în acest ciclu, fiind deasupra legii de ardere efective din ciclul normal. În fine, se menționează că maximul legii de ardere întîrziate, (x_i) scade cu 45% în ciclul dispers.

Cele menționate mai sus indică desfășurarea unor procese chimice mult mai intense în spatele frontului de aprindere, în cazul ciclului dispers.

Faptele prezentate pot fi explicate dacă se părăsește modelul clasic al propagării flăcărilor turbulente care consideră că intensitatea transformărilor chimice din flacără sînt determinate de mărirea considerabilă a suprafeței de ardere fie datorită deformării frontului de flacără, fie datorită fărîmițării lui.

O reprezentare nouă a flăcărilor turbulente a fost făcută de A. S. Socolic [9] care consideră zona de ardere ca o succesiune de autoaprinderi. În modelul autoaprinderii succesive, flacăra turbulentă are un caracter statistic.

Potrivit teoriei lui Kolmogorov [10] un curent turbulent, la numere mari ale lui Reynolds este rezultatul suprapunerii turbioanelor sau elementelor de volum de diferite scări. Dimensiunile elementelor de volum variază de la valorile cele mai mari, comensurabile cu dimensiunile curentului, pînă la valorile cele mai mici, comensurabile cu scările la care se produce disiparea energiei pulsațiilor în căldură. Elementele de volum de diferite scări nu numai că pot coexista unele alături de celelalte dar sînt răspîndite chiar unele în interiorul celorlalte ceea ce determină un grad ridicat de turbulență locală, internă.

Mișcarea haotică a elementelor de volum de scară mare, care ard, reprezintă acel factor principal, hotărîtor, care împinge înainte frontul de aprindere. La contactul elementelor de volum alcătuite din amestec proaspăt se produce spargerea și în parte amestecarea lor. Datorită turbulenței locale, interne, are loc intensificarea difuziunii centrilor activi, și a transferului de căldură în amestecul proaspăt ceea ce ușurează autoaprinderea lor; totodată se produce și stingerea amestecurilor care ard din cauza diluării lui cu amestec proaspăt și a reducerii locale de temperatură (efect termic). Astfel iau naștere procesele de autoaprindere și stingere pulsatorie.

Dacă difuzia turbioanelor mari determină înaintarea rapidă a frontului de aprindere, amestecarea cu gazele proaspete frînează desfășurarea reeacției. Se pot distinge astfel două laturi contradictorii ale fenomenului de turbulență: una care accelerează propagarea, alta care frînează reacția; prima determină vitezele mari de propagare, cealaltă adîncimea mare a zonei de ardere.

Dacă se admite ca model fizic de propagare a flăcărilor turbulente modelul autoaprinderii succesive dezvoltat mai sus, atunci trebuie considerat *că nu numai propagarea este un fenomen aleator, dar și arderea din spatele frontului de aprindere.*

Aprinderea și stingerea succesivă a elementelor de volum, vor depinde de condițiile locale de amestecare și de viteza reacției chimice astfel în cît gradul de ardere efectivă poate varia sensibil în diferite părți ale zonei de ardere și în diferite momente ale procesului.

Caracterul aleator al proceselor din zona de ardere se poate manifesta mai pregnant numai într-o fracțiune din durata procesului de ardere, pentru ca apoi să fie influențată sensibil întreaga desfășurare a lui.

Deși duratele necesare pentru atingerea vitezelor maxime de creștere a presiunii diferă puțin între ele (cu 6,4% mai mare în ciclul dispers, tabela 1) totuși vitezele maxime de creștere a presiunii diferă aproape de două ori (tabela 1). Potrivit ecuației stabilite de autor [6] viteza de creștere a presiunii este proporțională cu viteza masică de propagare $(dx_f/d\alpha)$ și cu gradul de ardere în tranșă (χ); primul parametru nu diferă esențial în cele două cicluri (fig. 2) în schimb, cel de al doilea se modifică sensibil (tabela 1) ceea ce subliniază din nou că în zona de ardere s-a intensificat intrarea în reacție a combustibilului.

Dacă se ține seama că la începutul fazei principale presiunile în cele două cicluri erau încă identice, o intensificare a proceselor de ardere în spatele frontului de aprindere a apărut între momentele ζ_1 și ζ_t adică pe o fracțiune egală cu 30% din durata propagării. Este suficient ca presiunea să crească întîmplător la un moment dat pentru ca apoi dispersiunea ciclică să apară ca un fenomen cu autoaccelerare: activarea întîmplătoare a transformărilor chimice din zona de ardere din cauza unor condiții locale mai avantajoase, determină o creștere a presiunii care la rîndul ei acționează ca un factor cinetic esențial în intensificarea reacției.

Dealtfel este semnificativ că ceea ce apare distinct între cele două cicluri este tocmai gradul mediu de ardere în tranșă, care este cu peste 50% mai mare în cazul ciclului dispers.

Este interesant de remarcat că pentru ciclurile independente, cercetate mai sus durata calculată a fazei inițiale este mai mare în ciclul dispers. Acest fapt subliniază caracterul aleator al arderii chiar în prima fază a procesului.

Într-o lucrare anterioară [7] se pune sub semnul întrebării opinia, curent răspîndită în literatura de specialitate potrivit căreia dezvoltarea focarului inițial se face prin flacără laminară. După părerea noastră propagarea flăcării pe baza mecanismului turbulent este posibilă chiar de la apariția focarului inițial.

În dezvoltarea unei asemenea reprezentări ar apare dificultăți dacă se admite părerea că turbulența nu poate acționa la scări atît de mici, de ordinul de mărime al primului nucleu de flacără.

Această obiecțiune vine însă în contradicție atît cu datele experimentale recente cît și cu reprezentările noi ale flăcărilor turbulente.

Într-o mișcare turbulentă există un spectru de pulsații de toate frecvențele. De la pulsațiile cu frecvențele cele mai mici „se deplasează" per-

Tabela 1

Felul ciclului	Durata fazei inițiale $\alpha_1 - \alpha_s$		Durata fazei principale $\alpha_y - \alpha_1$		Durata fazei finale $\alpha_z - \alpha_y$		Durata totală a arderii $\alpha_z - \alpha_s$		Gradul de ardere în tranșă $\varkappa$	Viteza maximă de creștere a presiunii p'_{max}	Durata $\alpha_t - \alpha_s$
	°RAC	% față de $\alpha_y - \alpha_s$	°RAC	% față de $\alpha_y - \alpha_s$	°RAC	% față de $\alpha_y - \alpha_s$	°RAC	% față de $\alpha_y - \alpha_s$			°RAC
Dispers	31	45	38	55	10	14	79	114	0,925	1,12	52
Normal	26,2	38	42,8	72	27,6	40	96,6	140	0,602	0,58	49

α_s — avansaul la declanșarea scînteii electrice;

α_t — momentul în care se stinge presiunea maximă;

$\alpha_1 - \alpha_s$ — durata primei faze a arderii;

$\alpha_y - \alpha_1$ — durata fazei principale a arderii;

$\alpha_z - \alpha_y$ — durata fazei finale a arderii;

$\alpha_z - \alpha_s$ — durata totală a arderii;

$\alpha_y - \alpha_s$ — durata primelor două faze sau durata totală a propagării;

$\varkappa$ — gradul de ardere în tranșă (fracțiunea din cantitatea de combustibil aflată în volumul parcurs de frontul de aprindere, într-un timp $\Delta\tau$, care intră în reacție).

manent un „flux de energie" spre pulsațiile cu frecvențele cel mai mari, care se disipează în final în energia internă a fluidului.

Potrivit calculelor efectuate pe această bază [7] scara celor mai mici elemente de volum la care este posibilă dispersarea energiei în motor este de ordinul sutimilor de milimetru ceea ce demonstrează că turbulența este posibilă în orice condiții, chiar atunci cînd reacția se desfășoară în volume ale căror dimensiuni sînt de ordinul de mărime ale aceluia cuprins între electrozii bujiei.

În condițiile unui volum mic al reacției, micropulsațiile tind într-atît să dilueze amestecul, să modifice compoziția chimică locală, să reducă temperatura și să împrăștie concentrația de centri activi — care oricum nu poate fi importantă — încît propagarea flăcării este sensibil frînată iar viteza de reacție trebuie să joace un rol important în dezvoltarea transformărilor chimice și a nucleului de flacără.

În aceste condiții fluctuațiile locale în calitatea amestecului și gradul de turbulență modifică sensibil viteza de ardere ceea ce poate afecta întreaga desfășurare a procesului.

Se ajunge astfel la concluzia că o cauză a fluctuațiilor de presiune, tot atît de importantă ca și abaterile de la dimensiunile medii ale frontului de aprindere, o constituie abaterile locale de la viteza medie de reacție determinată de gradul insuficient de amestecare la toate scările de turbulență, în spatele frontului de aprindere a elementelor de volum care ard cu elementele de volum de amestec proaspăt.

Astfel, chiar și în condițiile unui amestec perfect omogen, abateri locale de la viteza medie de reacție pot apare datorită fluctuațiilor locale din spectrul de pulsații și difuziunii neuniforme a elementelor de volum de toate dimensiunile. Se înțelege ca neomogenitățile locale din amestec trebuie să amplifice abaterile locale de la viteza medie de reacție.

În aceste condiții de dezvoltare a procesului, orice factor care acționează în sensul diminuării abaterilor locale de la viteza medie de reacție, va contribui la scăderea gradului de dispersiune ciclică.

Astfel, suprapunerea peste turbulența neorganizată a unui curent dirijat de amestec, trebuie să contribue nu numai la omogenizarea chimică a amestecului, dar și la îmbunătățirea gradului de amestecare a turbioanelor de diferite scări. De asemeni, apare rațional ca modificarea corespunzătoare a condițiilor de stare care măresc viteza de reacție să suplinească în parte lipsa de amestecare, la diferite scări ale turbulenței, astfel încît abaterile în lipsă de la viteza medie de reacție să se reducă.

Așadar, practic ar fi de așteptat ca mărirea raportului de comprimare, utilizarea unui combustibil cu o viteză de reacție sporită și montarea unui deflector pe supapa de admisie să contribuie la reducerea gradului de dispersiune ciclică.

Experiențele prezentate mai jos confirmă aceste concluzii.

Gradul de dispersiune se determină prin abaterile presiunii maxime de la valoarea medie, pentru i cicluri succesive.

Dacă se notează :

p_{yi} — presiunea maximă medie ;

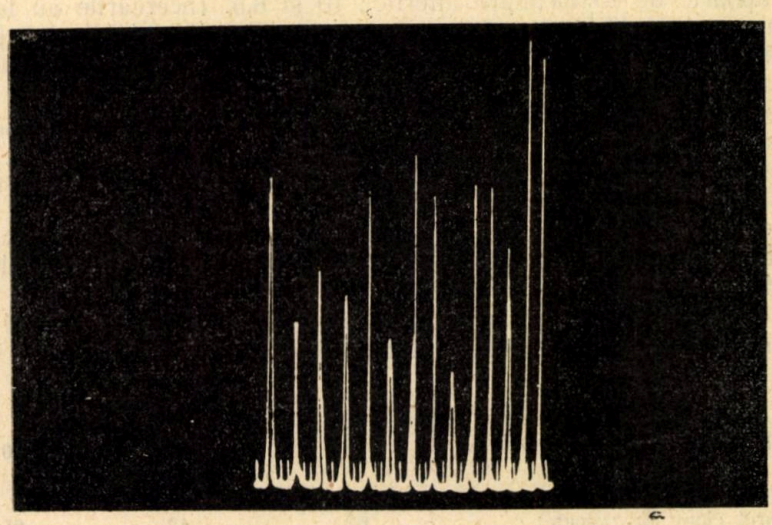
p_{ym} — presiunea maximă în i cicluri

atunci, gradul de dispersiune ciclică δ este raportul dintre abaterea medie (Δp_{ym}) și presiunea maximă medie a ciclurilor, adică,

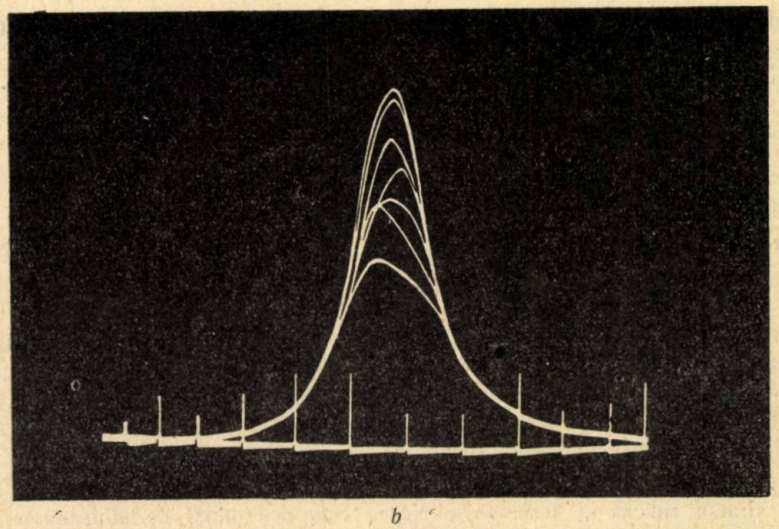
$$\delta = \frac{\Delta p_{ym}}{p_{ym}}$$

unde

$$\Delta p_{xm} \frac{\Sigma \left| p_{yi} - p_{ym} \right|}{i}$$



a



b

Fig. 3. a — Cicluri succesive restrînse și alăturate; b — Cicluri succesive desfășurate și suprapuse

Pentru determinarea presiunii maxime medii se admite că media aritmetică a presiunilor maxime este valoarea cea mai probabilă.

In lucrarea noastră gradul de dispersiune ciclică a fost determinat pentru 45—65 cicluri succesive. În acest scop au fost ridicate 2—3 fotografii cuprinzînd 12—15 cicluri succesive restrînse și alăturate (fig. 3 a) și un număr de 5—7 fotografii cuprinzînd 3—7 cicluri succesive desfășurate (fig. 3 b).

În figurile 4, 5 se prezintă fotografiile unor cicluri succesive pentru două rapoarte de comprimare diferite: 10 și 8,5. Încercările au fost efectuate pe motorul IT 9—1, cu raport de comprimare variabil și injecție de benzină. Chiar și o simplă inspectare a fotografiilor indică o reducere a gradului de dispersiune la mărirea raportului de comprimare.

Din tabela 2 rezultă că gradul de dispersiune se reduce cu 39% la mărirea raportului de comprimare de la 7 la 10 *).

Pentru a pune în evidență influența naturii combustibilului asupra gradului de dispersiune ciclică au fost organizate încercări pe motorul IT 9—1, cu doi combustibili cu proprietăți antidetonate diferite și anume: izooctanul și combustibilul etalon F_2, cu cifra octanică 82. Pentru a evita detonația s-a utilizat un raport de comprimare 7.

Se constată că la utilizarea combustibilului etalon F_2, gradul de dispersiune ciclică scade cu 20,6% (tabela 3).

Tabela 2

Raportul de comprimare	7	8,5	10
Numărul ciclurilor ridicate	61	42	65
Gradul de dispersiune	0,34	0,27	0,207

Tabela 3

Combustibilul	Izooctan	Etalon F_2
Gradul de dispersiune	0,34	0,27

In fine se menționează experiențele lui Salé [21] care evidențiază influența unui curent organizat asupra gradului de dispersiune ciclică.

Reducerea gradului de dispersiune ciclică în prezența deflectorului este explicată de Salé prin aceea că „forma frontului de flacără este mult mai stabilă în cazul mișcării turbionare create de deflector".

*) Gradul ridicat de dispersiune ciclică este determinat de alimentarea motorului cu injecție de benzină, utilizarea izooctanului drept combustibil (pentru a evita detonația la raportul de comprimare 10) și excesului de aer utilizat ($\lambda = 1{,}12$).

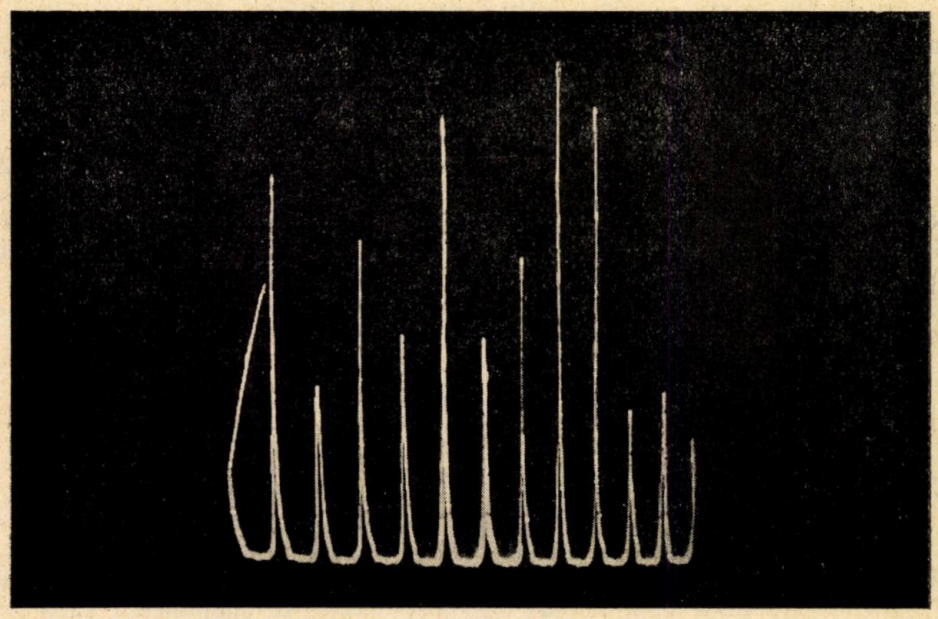


Fig. 4

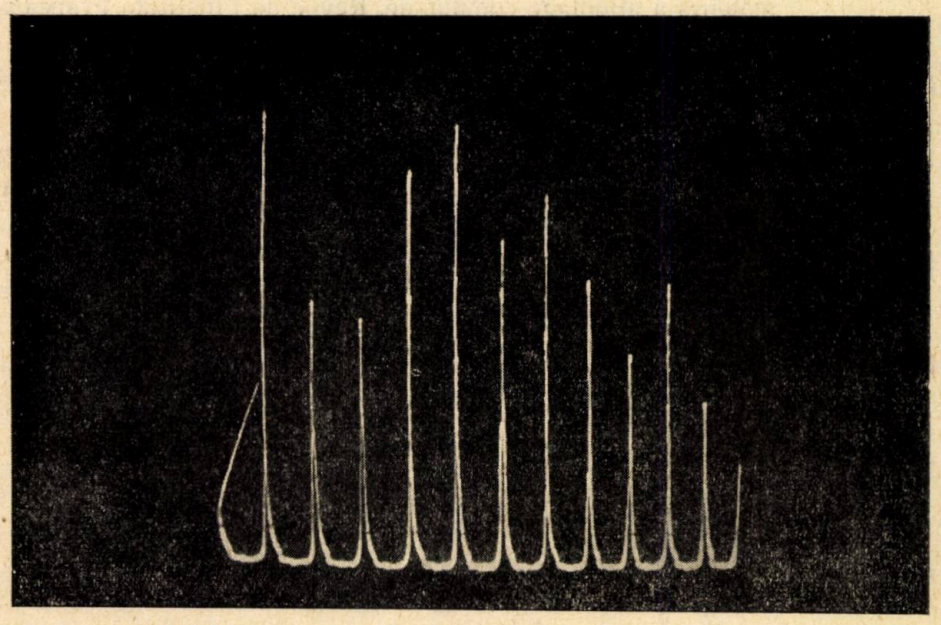


Fig. 5

Prelucrarea diagramelor medii, obținute de Salé, prin metoda elaborată de autor indică o divergență mai mare a legilor de ardere efectivă (x_e) în comparație cu legile de propagare (x_f) ceea ce vine în sprijinul explicației că fluctuațiile de presiune sînt determinate și de procesele care au loc în zona de ardere, din spatele frontului de aprindere.

In concluzie, în lucrarea prezentată, s-a elaborat o explicație nouă a fenomenului de dispersiune ciclică din motorul cu aprindere prin scînteie. Datele experimentale confirmă presupunerea făcută că fluctuațiile de presiune pot fi provocate și de caracterul aleator al arderii din spatele frontului de aprindere, determinat de aprinderea și stingerea succesivă a elementelor de volum de amestec. De aici rezultă căi practice de acționare pentru reducerea gradului de dispersiune ciclică.

Catedra de motoare cu ardere internă
Institutul politehnic București

BIBLIOGRAFIE

1. *Vichnievsky R., Weissmann J.* — Méthode de mésure électronique statistique pour l'étude des phénomènes de combustion dans les moteurs alternatifs. Rev. Inst. Franc. Pétr., 8—1953.

2. *Salé B.* — Contribution à l'étude de la combustion normale, dans les moteurs à allumage commandé. Revue de l'Institute Française du Pétrol 6, 7, 8, 9 —1958.

3. *Soltan J. P.* — Cylinder pressure variations in petrol enginees. Proc. Automob. Div. Instr. Mech. Engrs., 2—1960—1961.

4. *Peșkin M. A.* — Issledovanie vliania nekotorîh factorov na graniți obednenia smesii v țilindre benzinovo dvigatelia-Porșnevie vnutr. sg. Ed. Acad. U.R.S.S. — 1956.

5. *Grünwald B.* — Un model fizic nou al arderei în motorul cu aprindere prin scînteie. Studii și cercetări energetice și electrotehnice, seria B, 2/1964.

6. *Grünwald B.* — O ecuație de propagare a flăcărilor turbulente în motorul de aprindere prin scînteie. Bul. Inst. polit. Buc. Tom XXVI, 4—1963.

7. *Grünwald B.* — Cu privire la împărțirea pe faze a procesului de ardere din motorul cu aprindere prin scînteie. Bul. Inst. polit. Buc. Tom XXVI—5—1963.

8 *Grünwald B.* — Cercetarea procesului de ardere din motorul cu aprindere prin scînteie pe baza diagramei presiune-unghiu RAC, cu considerarea adîncimii zonei de ardere. Studii și cercetări energetice și electrotehnice, seria B, 3/1964.

9. *Socolic A. S.* — Ob experimentalnoi osnove teorii turbulentnovo gorenaia. Gorenie v turb. potoke. Izd. Ac. nauk. SSSR—1959.

10. *Kolmogorov A. N.* — Localnaia structura turbulentnosti v nesjimaemoi jidcosti pri oceni bolșih cislah Reynolds. DAN—SSSR T. 30,4 —1941.

11. *Kolmogorov A. N.* — Rasseianie energhii prii localno izotropnoi turbulentnosti DAN—SSSR, Tom 32,1—1941.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC BUCUREȘTI
Tomul XXVI — 1964, Fascicola 4

CENTRALE ELECTRICE

C.Z. 697.34

INFLUENȚA STRUCTURII CONSUMULUI DE CĂLDURĂ ASUPRA CĂLDURII LIVRATE ÎN TERMOFICARE ȘI COEFICIENTULUI DE TERMOFICARE *

CAMIL WLEZEK

Dezvoltarea termoficării și preluarea prin termoficare a unui consum tot mai mare de căldură a făcut ca și în țara noastră instalațiile de termoficare să devină unul din elementele principale în economia de combustibil.

Obținerea eficienței maxime a termoficării este legată de studierea fiecărui factor ce influențează asupra economicității termoficării și de optimizarea lui.

Unul din factorii principali care influențează asupra eficacității termoficării este consumul de căldură.

În această lucrare se studiază din problema consumului termic numai aspectul structurii consumului și al modului în care schimbarea acestuia influențează asupra indicilor principali ai termoficării.

Consumul termic urban este în principiu compus din:

— consum de căldură pentru încălzire (q_i)

— consum de căldură pentru apa caldă menajeră (q_{ac})

— consum de căldură pentru ventilație și condiționări (q_v) etc.

Dintre acestea ponderea mare o reprezintă consumul pentru încălzire și pentru apă caldă menajeră. Consumul de căldură pentru ventilație are o pondere redusă în consumul total (în perioadele de vîrf de consum dispare; iar vara poate fi asimilat cu consumul de apă caldă menajeră).

Deoarece consumul de căldură pentru apa caldă menajeră prezintă variații orare mari cu vîrfuri zilnice și săptămînale, în calcule a fost luat în considerație pentru consumul de căldură o valoare medie anuală (q_{ac}^m)

* Lucrare comunicată în sesiunea științifică a cadrelor didactice din Institutul politehnic București, 22—23 februarie 1964.

Schimbarea structurii consumului urban de căldură adică a raportului dintre sarcina termică medie pentru apa caldă menajeră (q_{ac}^m) și a consumului total maxim de căldură de încălzire și apă caldă (q_t)

$$\gamma = \frac{q_{ac}^m}{q_t} = \frac{q_{ac}^m}{q_{ac}^m + q_{inc}^{max}}$$

se datorește unui complex de factori legați atît de evoluția în timp a soluțiilor de alimentare cu căldură cît și de condițiile climatologice și chiar în cadrul acelorași condiții climatologice de soluțiile constructive adoptate, de materialele utilizate, de condițile de trai ale populației, de obiceiuri etc.

Această modificare a raportului „γ" este ilustrată și în literatura de specialitate. Conform datelor din literatură pentru primele instalații de termoficare „γ" a avut valoarea zero, și în decursul timpului a crescut atingînd în prezent valori de 15—25%.

În U.R.S.S. acest raport pentru anumite zone — din nordul țării cu raioane cu construcții vechi este de 15—20% și de 20—30% pentru raioanele cu construcții noi din zonele temperate, ajungînd chiar la valori de 50% pentru raioanele de construcții noi din sud [*B*—1, 2] ; În general se observă tendința de creștere a valorii lui „γ, în decursul anilor și cu creșterea gradului de confort.

În țara noastră de asemenea a apărut tendința de schimbare a structurii consumului de căldură urban ca urmare a :

— creșterii continue a consumului de căldură pentru apa caldă menajeră legată de ridicarea nivelului și a condițiilor de trai a oamenilor muncii ;

— a reconsiderării din punct de vedere termic a materialelor de construcție și adoptarea de noi materiale ;

— a perfecționărilor și eliminării strangulărilor din sistemele de alimentare.

Pentru condițiile de la noi din țară trebuie făcută remarca că în majoritatea cazurilor sistemele de termoficare sînt în perioada de tranzit, consumul termic neajungînd la valoarea nominală iar sistemele de termoficare funcționînd la capacități de lucru parțiale.

Cu această observație se poate lua ca titlu informativ pentru condițiile de la noi din țară o valoare medie de 18...20% cu tendințe de urcare.

1. Coeficientul de termoficare

Unul din principalii indici tehnico-economici ai sistemelor de termoficare îl reprezintă coeficientul orar de termoficare α_h.

Întrucît definirea acestui coeficient poate fi făcută și în funcție de temperaturi se va arăta în cele ce urmează modul în care schimbarea structurii consumului conduce la modificarea lui α_h. Se vor studia două cazuri și anume cazul unei sarcini termice de încălzire pură ($\gamma=0$) și cazul unei sarcini termice combinate ($\gamma \neq 0$) în ipoteza graficului de reglare calitativ al apei în rețea pentru mai multe temperaturi nominale.

1.1. *Coeficientul orar de termoficare pentru sarcina de încălzire* ($\gamma = 0$)

Coeficientul orar de termoficare pentru cazul unei sarcini numai de încălzire conform definiției este dat de raportul

$$\alpha_h = \frac{q_p}{q} \tag{1}$$

unde: $q_p = \left(\frac{\text{kcal}}{\text{h}}\right)$ = debitul de căldură livrat de prize la un moment dat;

$q = \left(\frac{\text{kcal}}{\text{h}}\right)$ — debitul de căldură maxim cerut la temperatura de calcul.

Consumul orar de căldură pentru încălzire la un moment dat este:

$$q^h_{inc} = x\, V\, (t_1 - t_e) \text{ [kcal/h]} \tag{2}$$

unde: x = caracteristica termică de încălzire [kcal/m³ h°C]
V = volumul clădirii (m³)
t_1 = temperatura interioară (°C)
te = temperatura exterioară (°C)

Consumul orar maxim de căldură pentru încălzire este:

$$q^h_{max} = x\, V\, (t_1 - t_{ec}) \text{ [kcal/h]} \tag{3}$$

unde: t_{ec} = temperatura minimă exterioară de calcul luată în considerație conform STAS în vigoare (pentru București = —19°C).

Făcînd raportul celor două consumuri și simplificînd obținem

$$\alpha_{inc} = \frac{t_i - t_e}{t_i - t_{cc}} \tag{4}$$

1.2. *Coeficientul orar de termoficare pentru o sarcină mixtă de încălzire și apă caldă menajeră* ($\gamma \neq 0$)

Consumul de căldură pentru apa caldă menajeră se consideră ca o valoare medie anuală reprezentînd un procent (γ_1) din consumul de căldură maxim orar de încălzire

$$q^h_{ac} = \gamma_1 \cdot q^h_{max.\,inc.} \tag{5}$$

Consumul total de căldură va fi:

$$q^h_{inc+ac} = q^h_{inc} + q^h_{ac} = q^h_{inc} + \gamma_1\, q^h_{max.\,inc} \tag{6}$$

Consumul total maxim orar de căldură va fi:

$$q^h_{\substack{max \\ inc+ac}} = q^h_{max.\,inc.} + \gamma_1\, q^h_{max.\,inc.} = (1 + \gamma_1)\, q^h_{max.\,inc.} \tag{7}$$

Raportul sarcinii la un moment dat, va fi în urma calculelor :

$$\alpha_{inc+ac} = \frac{q^h_{inc+ac}}{q^h_{(inc.+ac)\,max}} = \frac{1}{1+\gamma_1} \cdot \frac{t_i - t_e}{t_i - t_{ec}} + \frac{\gamma_1}{1+\gamma_1} =$$

$$= \frac{1}{1+\gamma_1} \alpha_{inc} + \frac{\gamma_1}{1+\gamma_1}$$

$$\alpha_{inc+ac} = \frac{1}{1+\gamma_1} (\alpha_{inc} + \gamma_1) \tag{8}$$

Dacă exprimăm cota de apă caldă menajeră ca un procent din cantitatea totală de căldură vom avea :

$$\gamma = \frac{q^h_{ac}}{q^h_{\substack{inc \\ max}} + q^h_{ac}} = \frac{\gamma_1}{1+\gamma_1} \tag{9}$$

Ceea ce revine dacă înlocuim în ecuația de mai sus la :

$$\alpha_{inc+ac} = \gamma + (1-\gamma)\,\alpha_{inc} \tag{10}$$

Această relație care redă modul în care coeficientul orar de termoficare este influențat de structura internă a consumului de căldură respectiv de cota de apă caldă menajeră față de o sarcină de încălzire pură este reprezentată grafic în fig. 1.

Se face remarca că acest coeficient nu reprezintă raportul dintre debitul termic livrat de turbină și sarcina termică maximă ci raportul dintre sarcina termică la un moment dat și sarcina termică maximă de calcul.

Debitul termic al prizei turbinei nu trebuie încă luat în considerare.

1.3. *Modul de acoperire al consumului de căldură*

Intrucît se analizează problema termoficării, sursa de căldură care se ia în considerare o formează prizele turbinelor de termoficare. Căldura livrată prin priza mașinilor de termoficare prezintă două limitări :

— o limitare în ceea ce privește debitul maxim de căldură posibil a fi livrat ; (debitul este limitat la valori finite dependente de mărimea și tipul mașinii) ;

— o limitare în ceea ce privește parametrii la care poate fi livrată căldura, turbinele moderne de termoficare putînd livra căldura sub formă de abur la presiuni cuprinse între 0,5 ata și 2 . . . 2,5 ata.

Fiecare tip de mașină este caracterizat printr-un debit și o presiune nominală la priză, dar se poate asigura debitul nominal al prizei la orice presiune cuprinsă între presiunea nominală și presiunea maximă.

Deoarece există o gamă largă de tipuri de mașini de termoficare la care debitul nominal se poate livra la diverse presiuni nominale, în gene-

ral cuprinse între 0,8 și 1,3 ata, pentru o unitate de comparație, calculele s-au întocmit în ipoteza debitului nominal la $p = 1{,}2$ ata.

De asemenea pentru a nu influența generalitatea rezultatelor prin schema termică a centralei care impune numărul de mașini, s-a luat în

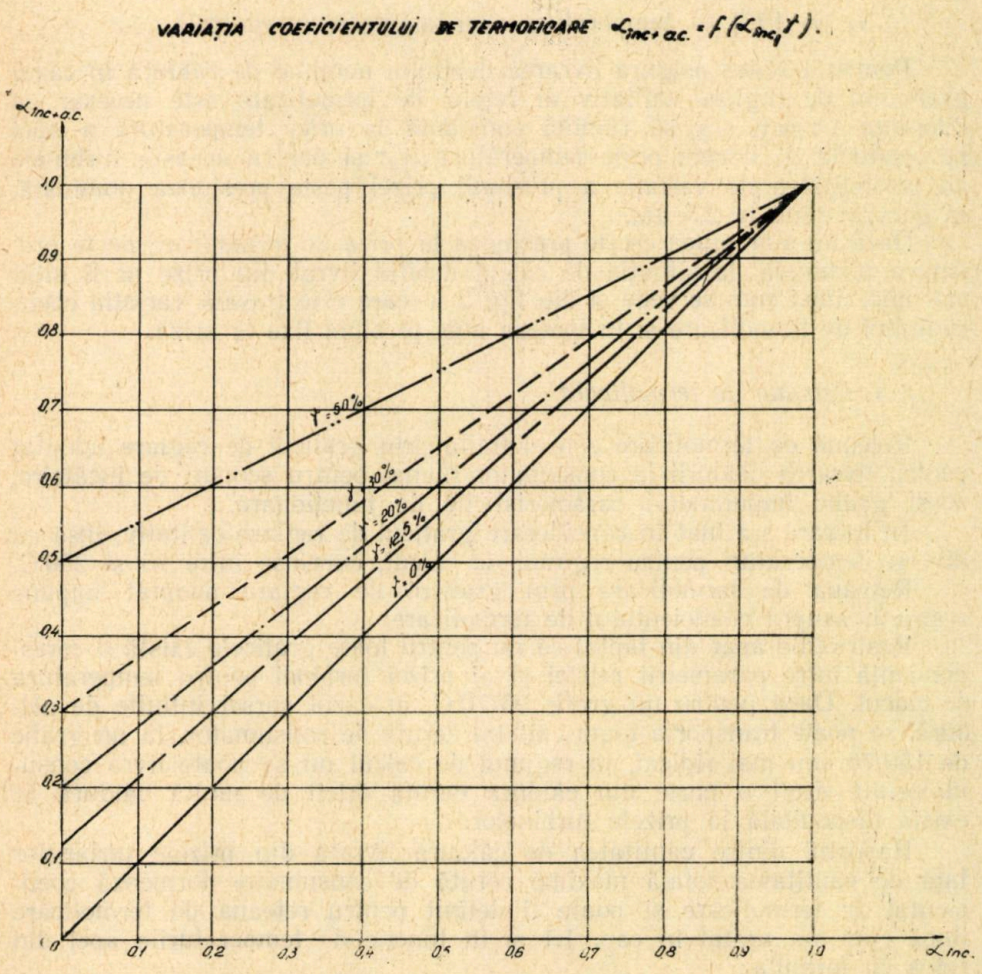


Fig. 1

considerație cazul ideal în care debitul prizelor turbinelor este infinit la presiunea nominală fiind limitat numai în ceea ce privește parametrii la care este livrată căldura (sursa infinită).

Din calculele termice se știe că avînd un abur saturat de 1,2 ata temperatura maximă la care se poate încălzi apa de rețea este de maximum

95°C și că oricît de multă căldură s-ar livra la această presiune nu este posibilă încălzirea apei mai mult. Cantitatea de căldură absorbită de rețea este dată de relația:

$$q = G\,c\,(\tau_a - \tau_i)\ \text{Kcal/h} \tag{11}$$

unde τ_a = 95°C temperatura apei la ieșirea din boiler, corespunzător presiunii de 1,2 ata

τ_i = [°C] — temperatura apei la intrare în centrală.

Pentru a putea asigura livrarea debitului nominal de căldură în cazul graficului de reglare calitativ al rețelei de termoficare este necesar ca diferența $\Delta\tau = \tau_a - \tau_i$ să rămînă constantă la orice temperatură a apei pe conducta de ducere peste temperatura „τ_a" și pentru aceasta turbinele au posibilitatea de variație a presiunii prizei peste presiunea nominală, în general pînă la 2,5 ata.

Dacă nu s-ar putea crește presiunea la priza de termoficare peste presiunea nominală, la situația de calcul debitul livrat din prize ar fi mult mai mic, după cum se vede și din fig. 2 în care este trasată variația coeficientului de termoficare și în ipoteza unei presiuni fixe la priză.

1.4. *Rețeaua de termoficare*

Rețeaua de termoficare este definită prin graficul de reglare adoptat pentru livrarea căldurii la consumator numai pentru scopuri de încălzire, acest grafic impunîndu-i caracteristicile de funcționare.

În lucrare s-a luat în considerare graficul de reglare calitativ, însă cu diverse temperaturi pentru regimul de calcul, cuprinse între 95 și 250°C.

Rețeaua de termoficare prin graficul de reglare adoptat impune restricții asupra coeficientului de termoficare.

Restricțiile apar din faptul că nu pentru toate graficele există o corespondență între parametrii rețelei și ai prizei turbinei pentru temperatura de calcul. Dacă pentru un grafic 95/70°C, în cazul sursei infinite de căldură, se poate transporta toată căldura cerută de consumator, la un grafic de 150/70 sau mai ridicat, la regimul de calcul nu se poate livra consumatorului decît o parte din căldura cerută oricît de multă căldură ar exista disponibilă la prizele turbinelor.

Raportul dintre cantitatea de căldură livrată din prizele turbinelor față de cantitatea totală maximă cerută de consumator formează coeficientul de termoficare și poate fi definit pentru rețeaua de termoficare după cum s-a arătat în cap. 1.1 și în funcție de temperaturile apei din rețea cu formula:

$$\alpha_h = \frac{q^h}{q^h_{max}} = \frac{\tau_a - \tau_i}{(\tau_d - \tau_i)_{calcul}} = \frac{\Delta\tau_{rețea}}{\Delta\tau_{rețea\ calcul}} \tag{12}$$

unde:

τ_a = [°C] — temperatura apei în rețea la ieșirea din boilerul de bază al turbinei;

$\tau_d = [°C]$ — temperatura apei de rețea la ieșirea din cazanul de apă caldă de vîrf sau boilerul de vîrf, pentru temperatura exterioară de calcul ;

$\tau_f = [°C]$ — temperatura apei de rețea pe conducta de întoarcere.

1.5. *Coeficientul de termoficare limită*

Dacă se face abstracție de debitul prizei considerîndu-l infinit și se analizează formula coeficientului de termoficare, definit ca raportul diferențelor de temperatură din rețea, se constată că rețeaua de termoficare impune un coeficient de termoficare care depinde numai de graficul de reglare și de presiunea nominală a prizei și care este o valoare limită, peste care nu se poate livra căldură consumatorului deși acesta o solicită și sursa ar avea-o disponibilă.

Deoarece graficul de reglare se referă numai la consumul de căldură, solicitat pentru încălzire, în cazul unui consum de căldură combinat (încălzire și apă caldă) în cadrul aceluiași grafic satisfăcîndu-se și alimentarea cu căldură pentru apă caldă menajeră, coeficientul de termoficare depinde și de structura consumului de căldură conform formulei 10.

Valorile limită ale coeficientului de termoficare calculate pentru presiunea nominală a prizei de 1,2 ata, pentru diverse grafice de reglare și cote de apă caldă menajeră se dau în tabela 1 și sînt reprezentate grafic în fig. 2.

Tabela 1

Grafic reglare / Cota apă caldă	95/70	130/70	150/70	180/70	250/70
$\gamma = 0$	1,0	0,654	0,547	0,439	0,305
$\gamma = 20\%$	1,0	0,720	0,640	0,550	0,445
$\gamma = 30\%$	1,0	0,825	0,775	0,715	0,605

Studiind tabela, se constată că în ipoteza existenței unei surse infinite de căldură în termoficare ($\alpha_{h\,\infty}$) din cauza rețelei de termoficare :

— pentru fiecare grafic există o valoare maximă limită a sarcinei termice preluabile prin termoficare ($\alpha_{h\,\infty}^{lim}$) peste care nu se poate livra căldură din prize ;

— valorea sarcinei termice limită ($\alpha_{h\,\infty}^{lim.}$) depinde :

a) de structura consumului de căldură, crescînd cu creșterea lui γ ;

b) graficul de reglare a temperaturii apei din rețea, scăzînd cu creșterea temperaturilor nominale ;

c) de presiunea nominală a prizei de termoficare.

În cazul sursei finite de căldură, care este cazul real, apare un coeficient de termoficare intitulat, „$\alpha_{h\ finit}$" impus de debitele reale ale prizelor.

În acest caz dacă $\alpha_{h\ finit} < \alpha_{h\infty lim.}$ atunci în calcule, se utilizează α_{finit}.
Dacă însă $\alpha_{h\ finit} > \alpha_{h\infty}^{lim.}$ atunci în calcule trebuie să se utilizeze $\alpha_{h\infty}^{lim.}$, deoarece $\alpha_{h\ finit}$ nu se va putea realiza din cauza rețelei de termoficare.

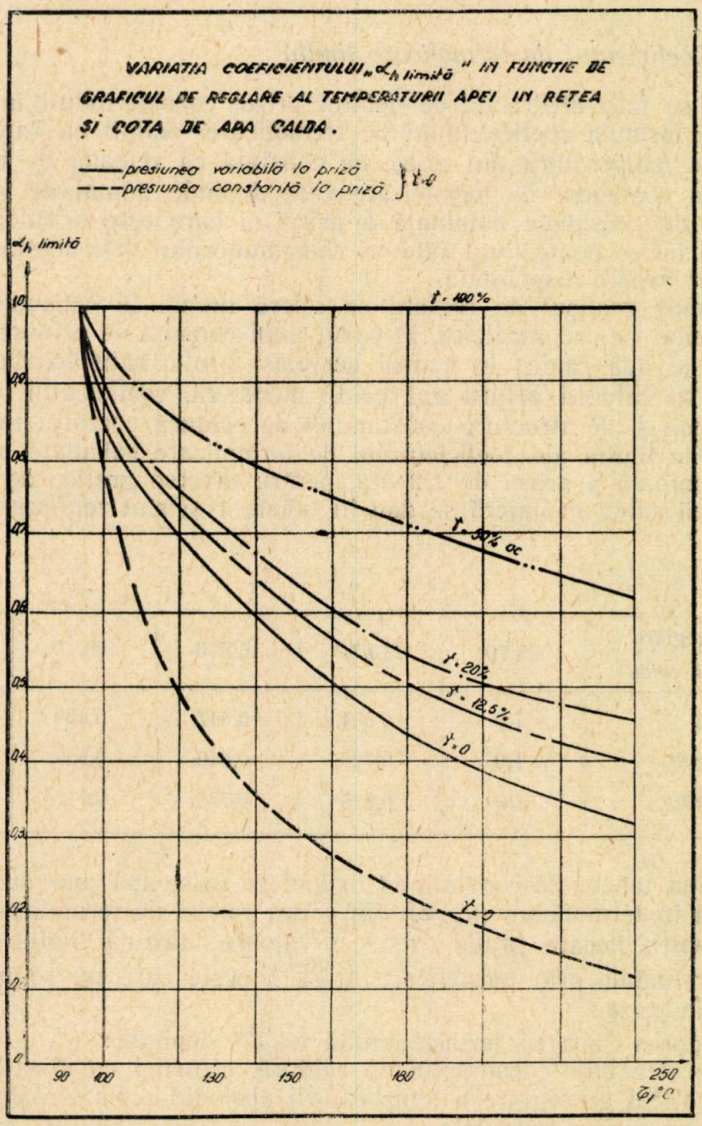


Fig. 2

Dacă se schimbă graficul de reglare a temperaturilor apei în rețea în sensul adoptării unui grafic de reglare corectat în funcție de modul de

prepararea apei menajere, sau alt tip de grafic calitativ atunci se modifică și valoarea lui $\alpha_{h\infty}^{lim.}$

In tabela 2 se indică valorile lui $\alpha_{h\infty}^{lim.}$ pentru graficul corectat intensiv în cazul preparării apei calde menajere în două trepte serie.

Tabela 2

$\gamma = 0$	Graficul	95/70	130/70	150/70	180/70	250/70
	$\alpha_{h\infty}^{lim.}$	1,0	0,654	0,547	0,439	0,305
$\gamma = 20\%$	Graficul	95/63,7	130/55	150/50	180/42	250/25
	$\alpha_{h\infty}^{lim.}$	1,0	0,694	0,590	0,493	0,347
$\gamma = 30\%$	Graficul	95 59,3	130/44,3	150/36	180/23	—
	$\alpha_{h\infty}^{lim}$	1,0	0,711	0,603	0,503	—

2. Indici derivați

Schimbarea structurii consumului urban de căldură conduce la modificarea și a celorlalți indici de termoficare și elemente de calcul ale termoficării după cum urmează :

2.1. *Curba-clasată a consumului de căldură*

Influența schimbării structurii sarcinei termice asupra curbei clasate a consumului de căldură conduce :

— în timpul iernii la aplatisarea curbei clasate, crescînd cu creșterea lui γ ;

— în timpul verii la apariția unei sarcini termice impuse de apa caldă menajeră, a cărei pondere crește cu creșterea lui γ ;

— schimbarea debitelor anuale de căldură livrabile la diferite contrapresiuni ale prizei.

Curbele clasate relative medii pe țară ale consumului de căldură pentru diverse structuri ale consumului de căldură sînt date în fig. 3, iar valorile consumului anual de căldură (Q_{an}) se indică în tabela 3.

2.2. *Durata de utilizare a sarcinei termice*

Schimbarea structurii consumului conducînd la aplatisarea curbei clasate și la creșterea coeficientului de umplere a curbei conduce la creșterea debitelor anuale de căldură livrabile în termoficare.

Durata de utilizare a sarcinei termice reprezintă raportul :

$$T = \frac{Q_{an}}{q_{h\,max}} \tag{13}$$

unde: Q_{an} = [Gcal/an] consumul anual de căldură ;

$q_{h\,max}$ = [Gcal/h] consumul orar maxim de căldură ;

CURBA MEDIE CLASATA A CONSUMULUI DE CĂLDURĂ DE ÎNCĂLZIRE ȘI A CONSUMULUI DE CĂLDURĂ DE ÎNCĂLZIRE ȘI APĂ CALDĂ MENAJERĂ.

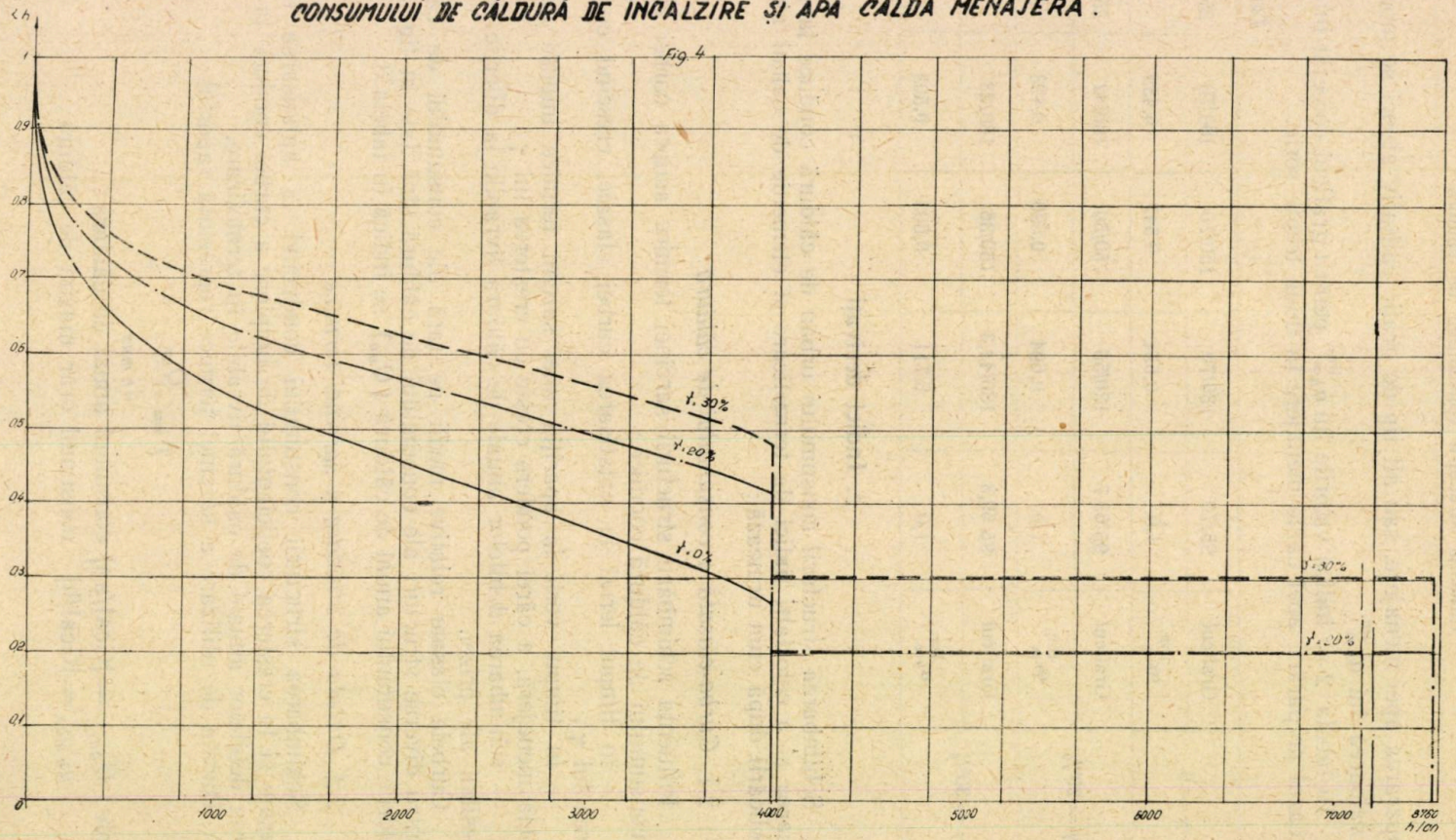


Fig. 3

Valorile duratei de utilizare a sarcinei termice în funcție de γ sînt date în tabela 3 și reprezentate în fig. 4.

Tabela 3

γ [%]	0	12,5	20	30	50	75	100
Q_{an} [cm²]	186,6	272,5	327,0	393,0	535,6	712,5	876,0
$q_{h\ max}$ [cm]	20,0	20	20	20	20	20	20
T [h/an]	1866	2725	3270	3930	5350	7125	8760

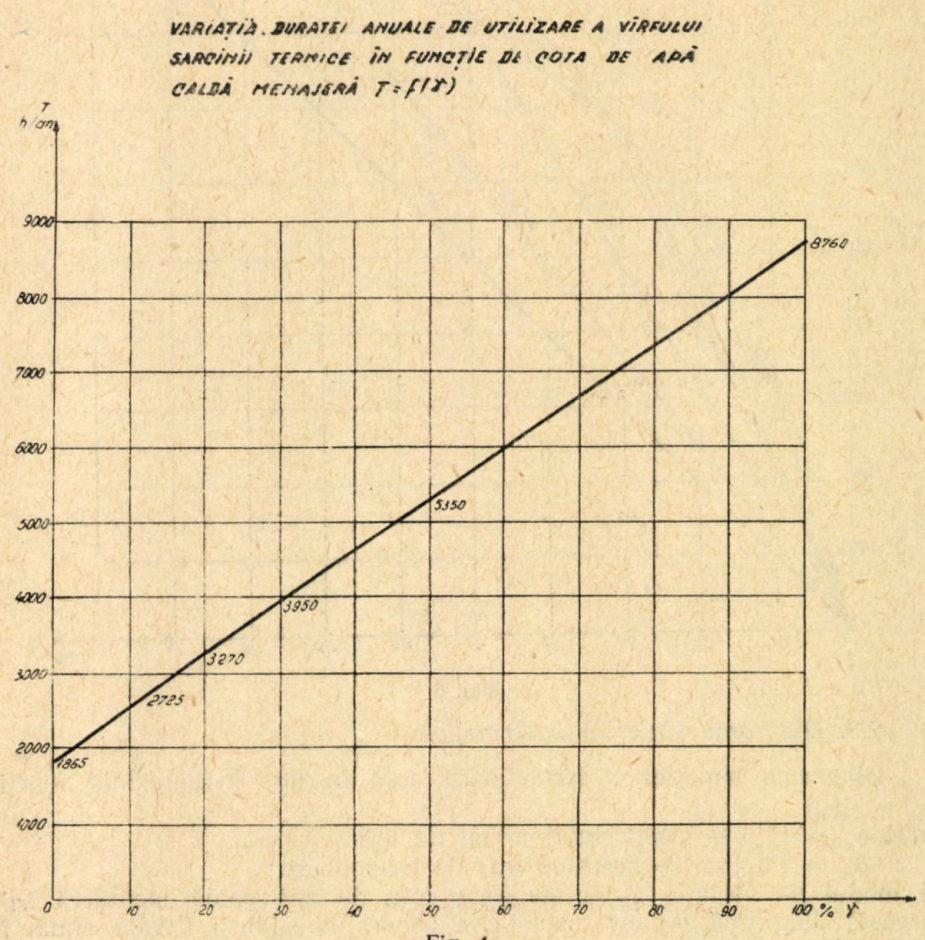


Fig. 4

Funcţia $T = f(\gamma)$ dată în fig. 4, permite calcularea uşoară a consumului anual de căldură pentru diverse situaţii ale structurii consumului (formula 13).

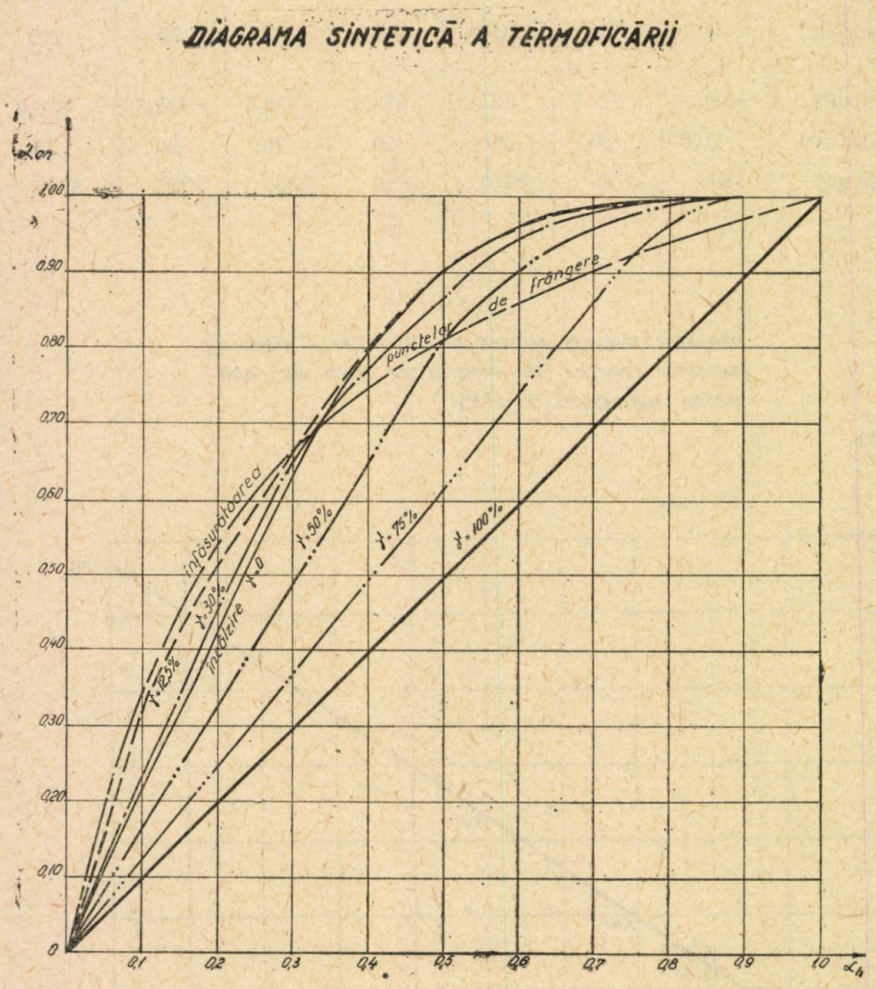


Fig. 5

2.3. *Diagrama sintetică a termoficării*

Diagrama sintetică a termoficării dată în fig. 5 reprezintă funcţia $\alpha_{an} = f(\alpha_h)$
unde $\alpha_{an} = [\%]$ — coeficientul anual de termoficare;
$\alpha_h = [\%]$ — coeficientul orar de termoficare;
şi modul de variaţie al acesteia cu cota de apă caldă menajeră „γ". Această diagramă permite calcularea uşoară a căldurii livrate anual în regim de termoficare cunoscînd pe α_h şi γ.

Din curbele prezentate în fig. 5 se vede că α_{an} este cu atît mai puternic influențat cu cît cota de apă caldă este mai mare. Pentru $0 < \gamma < 30\%$ influența nu este remarcabilă.

Aprofundarea studiului curbei sintetice a termoficării a permis construirea diagramelor din fig. 6. Din această diagramă se relevă modul în

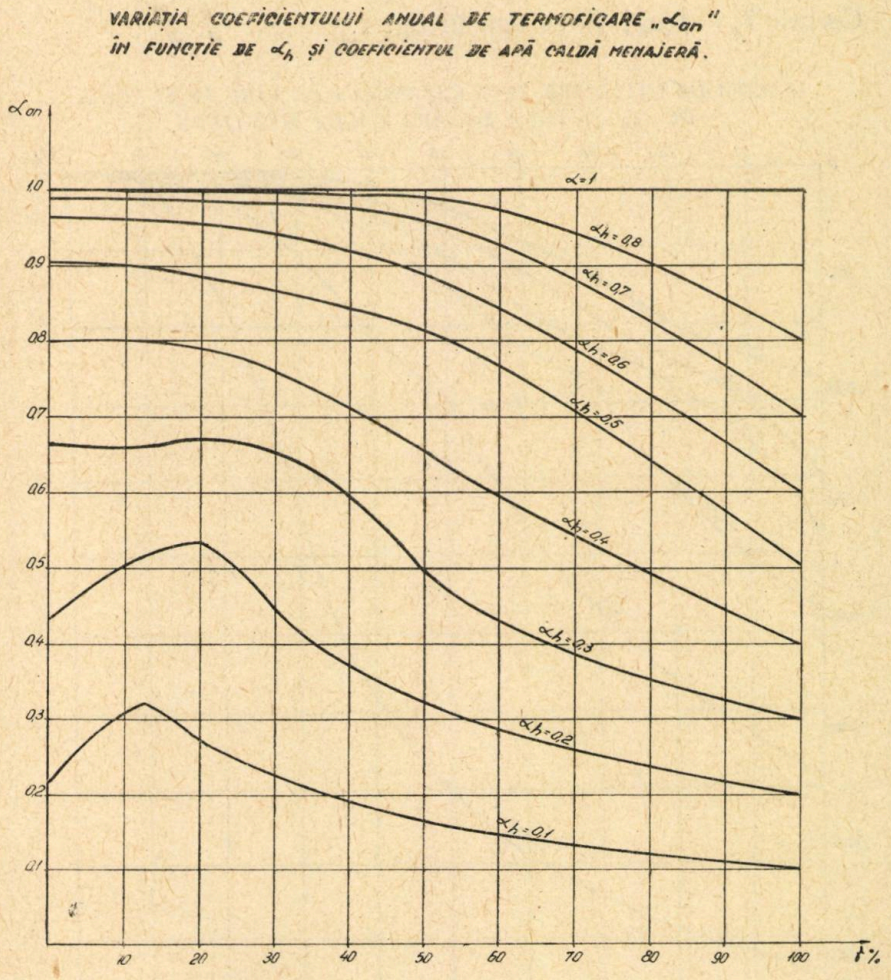


Fig. 6

care α_{an} este influențat de cotele de apă caldă, pentru un anumit coeficient α_h. Se remarcă în general alura căzătoare a curbelor la cote mari de apă caldă menajeră.

2.4. *Durata de utilizare a instalațiilor de vîrf* (T_v)

Vîrful consumului de căldură se preia prin instalații speciale la centrală concretizate prin boilere de vîrf sau cazane de apă caldă.

Durata de utilizare anuală a acestor instalații se obține pe baza datelor prezentate în capitolele precedente cu formula:

$$T_v = \frac{1 - \alpha_{an}}{1 - \alpha_h} T \qquad (14)$$

Curbele $T_v = f(\alpha_h; \gamma)$ se dau în fig. 7.

DURATA DE UTILIZARE Tv A CAZANULUI DE VÎRF ÎN FUNCȚIE DE α_h ȘI COTA DE APĂ CALDĂ MENAJERĂ

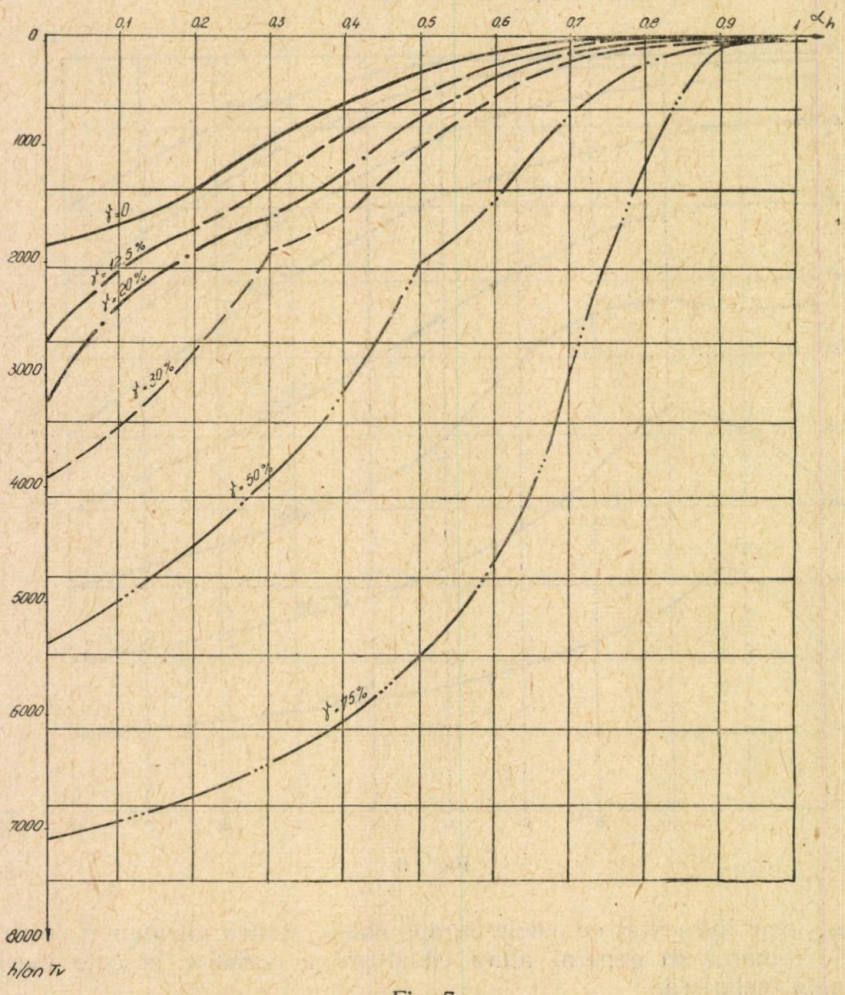


Fig. 7

2.5. *Variația relativă a cantității anuale de căldură livrate în termoficare*

Pentru o aceiași sarcină termică orară schimbarea structurii consumului conduce la modificarea cantităților absolute ale căldurii livrate în regim de termoficare.

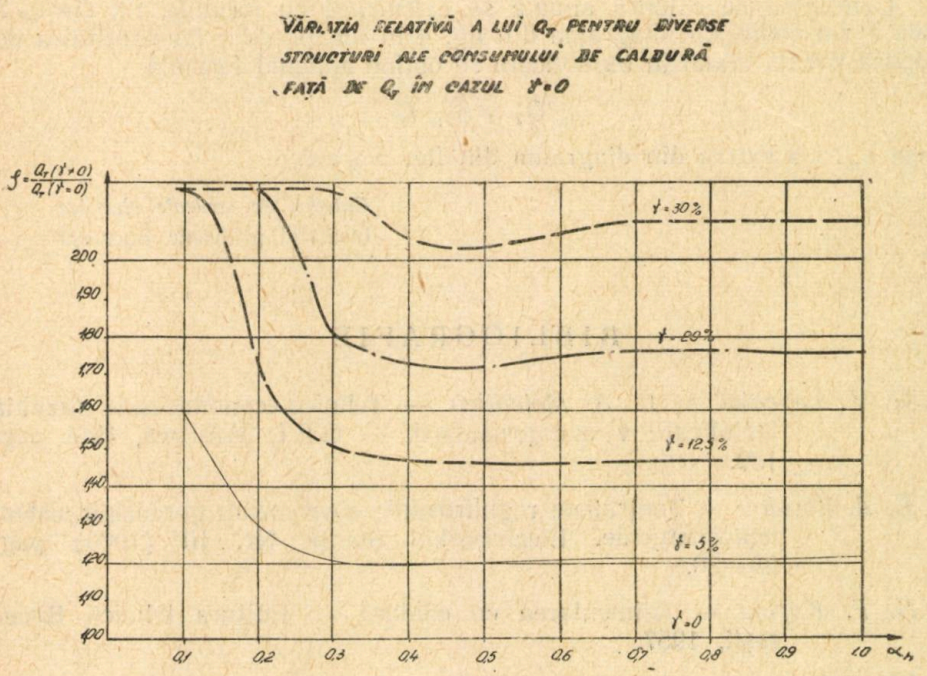


Fig. 8

Creșterea relativă a căldurii livrate anual în regim de termoficare pentru diverși γ față de cantitatea de căldură livrată anual la $\gamma=0$ este arătată în diagramele din fig. 8.

Din această figură se vede că pentru o aceiași sarcină termică se pot realiza pentru diverse cote de apă caldă „γ" cantități anuale de căldură livrate în termoficare de 2...300% mai mari decît în cazul sarcinei pure de încălzire astfel, pentru o cotă $\gamma = 30\%$ și la același coeficient de termoficare se livrează în termoficare de două ori mai multă căldură decît în cazul sarcinei pure de încălzire.

3. Concluzii

În această lucrare se face o reconsiderare a indicilor legați de consumul de căldură în termoficare în condițiile schimbării structurii acestuia și se arată importanța pentru termoficare a creșterii consumului

de căldură pentru apa caldă menajeră. Schimbarea structurii consumului de căldură conduce la modificarea cantităților de căldură livrate în termoficare atît orare cît și anuale în sensul creșterii acestora cu creșterea cotei de apă caldă menajeră.

Aplicarea formulelor și diagramelor din această lucrare permite recalcularea cantităților de căldură livrate în termoficare în cazul diferitelor structuri ale consumului de căldură știindu-se „q" și γ.

Cantitatea de căldură anuală se calculează cu formula 13; $Q = q_h T$ unde T s-a dedus din diagrama din fig. 4 în funcție de γ iar cantitatea de căldură livrată anual în termoficare se obține aplicînd formula

$$Q_T = \alpha_{an} \, Q$$

unde α_{an} s-a extras din diagrama din fig. 5 ș.a.m.d.

Catedra de centrale electrice
Institutul politehnic București

BIBLIOGRAFIE

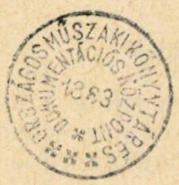
1. *G. V. Levental* și *L. A. Melentiev* — Tehnico-economiceskie razvitia teplofikații v energosistemah — G E I, Moscova, 1961 pag. 189.

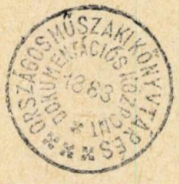
2. *E. A. Socolov* — Țentralnoe regulirovanie sovromenîh gorodskih sistem teplosnabjenie. Electriceskie Stanții Nr. 10 (1963) pag. 23—30.

3. *S. F. Kopiev* — Alimentarea cu căldură — Editura tehnică București, 1957.

4. *Gh. Colț* — Osnovie voprosi razvitia teplofikații v rumînskoi narodnoi respublike — Moscova 1964 — (Dizertație).

5. *Carol Goldenberg* și *Marinescu Mircea* — Diagrama sintetică a repartizării consumului anual de căldură pentru încălzire și nevoi casnice pe prizele turbinelor de termoficare și pe instalații de vîrf — ISPE — 1960.





ÎNTREPRINDEREA POLIGRAFICA „GRAFICA NOUA" III, BUCUREŞTI — c. 10871

INDICAȚII REDACȚIONALE

Manuscrisele vor fi prezentate în două exemplare, dactilografiate la două rînduri și colaționate de autor. Relațiile matematice și formulele se vor scrie cît mai clar, cu cerneală.

Desenele și graficele vor fi executate în tuș negru pe hîrtie de calc, numerotate și prezentate separat cu un borderou cuprinzînd nr. curent și legenda fiecărei figuri. Locul figurilor se va indica în text. Scrisul pe figuri va fi cel standardizat.

În continuarea textului, pentru fiecare exemplar se va da bibliografia de referință și, pe cîte o foaie separată de hîrtie, cîte un rezumat, în limbile : rusă, franceză, germană și engleză. La bibliografie se va indica în mod obligatoriu : numele și inițialele de prenume ale autorului, titlul și volumul lucrării, editura, locul și anul apariției, sau periodicul în care a apărut, volumul, anul, pagina inițială și finală a articolului.

Bibliografia se va întocmi în ordinea de citare în text și se va numerota curent. Referințele la bibliografie se vor face în text prin indicarea numărului de ordine al lucrării, încadrat în paranteze drepte, de exemplu [5].

Întreaga responsabilitate pentru exactitatea calculelor, datelor experiențelor și afirmațiilor științifice revine numai autorilor. Conducerea revistei își rezervă dreptul de a nu publica materialele necorespunzătoare.

40820

1995 JUL -6

F 1130

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC BUCUREȘTI

TOMUL XXVI FASCICOLA 5 ANUL 1964

SEPTEMBRIE—OCTOMBRIE

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC BUCUREŞTI

apare, cu şase fascicole pe an, în continuarea vechilor periodice ştiinţifice : „Bulletin de Mathématiques et de Physique pures et appliquées" şi „Buletinul Politehnicei din Bucureşti".

Organizat pe baze noi, el reflectă în primul rînd activitatea ştiinţifică a corpului didactic din Institutul politehnic Bucureşti. În limita spaţiului disponibil, se pot publica şi lucrări ştiinţifice ale colaboratorilor din afara institutului.

Corespondenţa şi schimburile de publicaţii cu redacţia şi administraţia Buletinului se fac pe adresa :

INSTITUTUL POLITEHNIC BUCUREŞTI
CALEA GRIVIŢEI 132
(cu menţiunea „pentru Buletinul Institutului")

БУЛЕТИНУЛ ИНСТИТУТУЛУИ ПОЛИТЕХНИК БУКУРЕШТИ

издаётся в шестых годовых выпусках являясь продолжением прежних научных периодических журналов „Bulletin de Mathématiques et de Physique pures et appliquées" и „Buletinul Politehnicei din Bucureşti".

Составленный на новых основах, он отражает в первую очередь научную деятельность преподавательского состава Бухарестского Политехнического Института. В пределах возможностей будут опубликованы и научно-исследовательские работы и внеинститутских сотрудников.

Переписка и обмен периодическими изданиями с редакцией и руководством Бюллетеня производятся по адресу :

INSTITUTUL POLITEHNIC BUCUREŞTI
CALEA GRIVIŢEI 132
(с указанием „pentru Buletinul Institutului")

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC BUCUREŞTI

est une publication, continuant les anciens périodiques scientifiques : „Bulletin de Mathématiques et de Physique pures et appliquées" et „Buletinul Politehnicei din Bucureşti".

Tel qu'il se présente, il reflète en premier lieu l'activité scientifique du corps didactique de l'Institut Polytechnique de Bucarest. On pourra y ajouter aussi, dans la limite des possibilités, les travaux des collaborateurs qui n'appartiennent pas à l'institut.

L'adresse pour la correspondance et les échanges de publications est :

INSTITUTUL POLITEHNIC BUCUREŞTI
CALEA GRIVIŢEI 132
(avec la mention „pentru Buletinul Institutului")

OORSZÁGOS MŰSZAKI KÖNYVTÁR ÉS DOKUMENTÁCIÓS KÖZPONT 1965

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC BUCUREŞTI

TOMUL XXVI — FASCICOLA 5

SEPTEMBRIE — OCTOMBRIE
1964

COMITETUL DE REDACȚIE

Prof. Dr. *I. Agîrbiceanu*, membru corespondent al Academiei R.P.R.; Prof. Dr. *I. S. Antoniu*, membru corespondent al Academiei R.P.R.; Acad. Prof. *M. Bercovici*; Prof. Dr. *E. Bratu*, membru corespondent al Academiei R.P.R.; Prof. *Gh. Buzdugan*, membru corespondent al Academiei R.P.R.; Acad. Prof. Dr. *E. Carafoli*; Conf. *S. Călin*, cand. Șt. Th.; Acad. Prof. Dr. *D. Dumitrescu*; Conf. *I. Grădișteanu*, cand. Șt. Ec.; Prof. *C. Ionescu-Bujor*; Prof. Dr. *Gh. Manea*, membru corespondent al Academiei R.P.R.; Prof. *N. Manolescu*; Prof. *St. Mantea*; Prof. *N. Marinescu*, cand. Șt. Th.; Acad. Prof. Dr. *C. Nenițescu*; Prof. *C. Penescu*, membru corespondent al Academiei R.P.R.; Prof. *M. Postelnicescu*; Acad. Prof. Dr. *R. Răduleț*; Prof. *Al. Rău*; Prof. *Al. Spătaru*; Prof. *L. Stoicescu*; Prof. *I. Zăgănescu*.

Redactor responsabil: Prof. *C. Dinculescu*
Membru corespondent
al Academiei R. P. R.

Sumar

MATEMATICA

M. Tîrnoveanu

Despre un sistem logistic semiconstructiv global 17

MECANICA

П. А. Лебедев А. И. Ефрон

Плоские колебания шатуна переменного поперечного сечения с криволинеиной осью симметрии 23

M. Atanasiu

Problemele fundamentale ale calculului mecanic al sistemului în domeniul deplasărilor cinematice 39

CHIMIE

V. T. Mărculeţiu, I. Strugaru

Recuperarea bismutului din concentrate romînești 65

D. Fărcaşiu

Choline bis — (β-chloroethyl) — carbamate, a choline derivative related to alkylating agents 69

MECANICA FLUIDELOR

D. Taşcă

Mişcări potenţiale axial-simetrice în jurul carenelor deschise, aplicate la studiul teoretic al turbo-maşinilor 73

TERMOTEHNICA

L. Stoicescu, S. Petrescu

Der erste Grundsatz der Thermodynamik für technische Prozesse welche mit endlicher Geschwindigkeit und ohne Strömung verlaufen . . . 87

C. Guţă

Consideraţii asupra determinării cîmpului de viteze în faţa paletajului mobil al compresorului axial 109

ENERGETICA

C. Wlezek

Metodă de calcul a producţiei specifice de energie electrică, medie anuală, pentru turbinele de termoficare urbană 119

Резюме

Д. К. 517

М. Тырновяну

Об одной общей полуконструктивной системе

В § 1 определяются понятия нормального алгорифма, нормального алгорифма для опознования некоторого свойства, процесса опознования некоторого свойства, логической системы, логической полуконструктивной системы, системы сообщений первой ступени, логической аналитической системы первой ступени, логической всеобщей полуконструктивной системы Σ_{lg} и даются теоремы 1.1, 1.2, 1.3, в которых выявляются структурные свойства системы Σ_{lg}, относящиеся к областям существования L.

В § 2 определяются всеобщие характеристики системы Σ_{lg}: всеобщая валентность, всеобщая модальность, всеобщее запланированное значение, всеобщее потенциальное значение, всеобщее потенциальное предполагаемое значение, всеобщее потенциальноё неопределенное значение и даются теоремы 2.1, 2.2, 2.3, в которых определяют ся общие свойства этих характеристик системы Σ_{lg} относительно множества организованных процесов сообщений в некоторой системе сообщений первой ступени.

Buletinul Institutului politehnic Bucureşti, Tom. XXVI, fasc. 5/964.

Д. К. 621—752 : 621.82

П. А. Лебедев, А. И. Ефрон

Плоские колебания шатуна с попоречным переменным сечением и с криволинейной осью симметрии

Настоящее исследование посвящено вопросу упругих колебаний шатуна, имеющего поперечные переменные сечения и криволинейную ось симметрии, составленную из бесконечного числа различных частей.

В первой части этого исследования проводится анализ сил, действующих на шатун во время этих колебаний, так что образуется система из пяти уравнений с частичными производными колебаний данного шатуна, имеющая произвольную конфигурацию, с условием чтобы плоскости симметрии совпадали с плоскостью колебания.

Во второй части исследования вырабатывается алгорифм решения указанных уравнений метода последовательных приближений. Решение доведено до представлсния нскомых фукций в виде интегралов. В случае необходимости их значения могут определяться в численном виде. Существование и равномерность решений аргументируются. Способ применения торцевых условий и способ заключения расчетного процесса также указаны.

Buletinul Institutului politehnic Bucureşti, Tom. XXVI, fasc. 5/964.

Д. К. 518 : 531.3

М. Атанасиу

Основные вопросы механического расчёта систем в области кинематических перемещений

В продолжении работы [2] представляются основные вопросы относительно механического расчёта систем твёрдых тел.

Buletinul Institutului politehnic Bucureşti, Tom. XXVI, fasc. 5/964.

Summary

D.C. 517

M. Tîrnoveanu

About a Total Semiconstructive System

In the first § the author defines the notions of normal alogarithm, normal alogarithm of recognizing a certain property, means of recognizing a property, logistic system, semiconstructive logistic system, sistem of communications of the I rate analytical logistic system, global semiconstructive logistic system Σ_{lg} and the theorems 1.1., and 1.2, bring forth the structural properties of the Σ_{lg} system, as reported to the L entity domain.

In the second § the author defines the total characteristics of the Σ_{lg} system, the total valence modality, total programatic valere, undetermined total potential value and gives the theorems 2.1,2.2,2.3, which determine the general properties of these total characteristics of the Σ_{lg} system distributed to many a means of communication organized in a I rate communication system.

Buletinul Institutului politehnic Bucureşti, Tom. XXVI, fasc. 5/964.

D.C. 621—752 : 621.82

P. A. Lebedev, A. I. Efron

Plane Oscillations of a Connecting Rod with Variable Cross-Saction and Curvilinear Symmetry Axis.

This study is assigned to the problem of the elastic oscillation of a connecting rod having variable cross-sections and a curvilinear axis of symmetry made of an infinite number of different parts.

In the first part of the study are analysed the forces operating upon the connecting rod during these oscillations, so that it makes up a five equation system with the partial derivates of this connecting rod oscillations, having an arbitrary configuration, provided that the symmetry planes and the oscillation plane coincide.

In the second part of the study the algorethm of the above mentioned equation system solution is elaborated using the successive approximation method. The solution is continued up to the representation of the sought functions as integrals. If necessary, their values may be defined under the numerical form. The existence and the uniformity of the solutions are proved.

The author indicates as well the means of using conditions and the means of concluding the calculus process.

Buletinul Institutului politehnic Bucureşti, Tom. XXVI, fasc. 5/964.

D.C. 518:531.3

M. Atanasiu

Fundamental Problems of Mechanical Calculus of Systems in the Kinematic Displacement Field.

The principles regarding the mechanical calculus of rigid body systems are exposed in the sequel of the [2] paper.

Buletinul Institutului politehnic Bucureşti, Tom. XXVI, fasc. 5/964.

Д. К. 669.763

В. Т. Маркулециу, И. Стругару

Рекуперация висмута из местных концентратов

С целью использования сырья и отходов местной продукции авторы пытаются установить метод для наиболее полной рекуперации висмута из концентратов, содержащих большое количество металла.

Метод щелочной плавки, указанный в литературе для концентратов, содержащих малое количество металла, был изменен и авторы устанавливают наилучшие условия рекуперации, достигая производительности, которая превышает 93%.

Buletinul Institutului politehnic Bucureşti, Tom. XXVI, fasc. 5/964.

Д. Фэркашиу

Д. К. 615.3

***N* — (β, β — дихлордиэтил) — уретан холина, новое производное холина типа азот-ипритов**

В работе описываетя до сих пор не известный в литературе синтез *N* — (β, β — дихлордиэтил) — уретана холина и улучшенный вариант синтеза метансульфоната холина.

Buletinul Institutului politehnic Bucureşti, Tom. XXVI, fasc. 5/964.

Д. К. 621.224

Д. Ташке

Безвихревое осесимметричное течение вокруг открытых заборников с применениями в теоретических исследованиях турбомашин

Единственное потенциальное аксиальное симметричное движение вокруг открытого объёмного водоизмещения, изученное до настоящего времени, — это трансляция вокруг полу-тела [5].

В настоящей работе предлагаетса общий метод для получения нескольких типов движений вокруг открытого объёмного водоизмещения, уточняя условия последовательности в постоянном движении и обобщая исследования для любого внешнего тока (не только равномерная трансляция).

Четыре примера, рассмотренных в работе, были выбраны при условии высшего предела подобных будь-то игла форсунки для турбин ПЕЛТОН или ТУРГОТ, или для гидромониторов (пример № 1, рис. 2), либо узел рото-статорных ступиц (и кожуха) для разных турбомашин, например, диагональные насосы (пр. 2, рис 4), осевые турбомашины (пр. 3, рис 6), турбины ФРАНЧИС или КАПЛАН и с обратным направлением центрифугальные турбомашины (пр. 4, рис 7, 8, и 9).

Этим методом получаются уравнение кривого мередиана объёмного водоизмещения и линий тока, объёмный расход $\dot{V} = 2\pi\Psi$, скорость и давление в каждой точке и путём интеграции осевая сила давления $\bar{F}_p = \int_A \bar{n}\, p\, dA$.

Достигнутые результаты способсмвуют улучшению методов проектирования турбомашин и возможно, что даже гидродинамических форм и ведут к побышению гидроэродинамического коеффициента полезного действия.

Buletinul Institutului politehnic Bucureşti, Tom. XXVI, fasc. 5/964.

D.C. 669.763

V. T. Mărculeţiu, I. Strugaru

Recovery of Bismuth from Indigenous Concentrates.

On the line of turning to account the raw materials and wastes of the indigenous manufacture, the authors try to state a method for the fullest recovery of bismuth from concentrates with great metal content.

The alkaly smelting method, proper to concentrates with little metal content, was modified and the authors stated the best recovery conditions, reaching an output over 93%.

Buletinul Institutului politehnic Bucureşti, Tom. XXVI, fasc. 5/964.

D.C. 615.3

D. Fărcaşiu

Choline, N-bis (β-chloroethyl) Carbamate, a Choline Derivative Related to Nitrogen Mustards.

In order to obtain neutral, water soluble, cytostatic agents, the yet unknown choline, bis (β-chloroethyl)-carbamate was synthesized. An improved synthesis of choline methanosulphonate, and attempts to obtain the choline diazoacetate, are also described.

Buletinul Institutului politehnic Bucureşti, Tom. XXVI, fasc. 5/964.

D.C. 621.224

D. Taşcă

Irrotational Axisymmetrical Flows Around Open Hulls, Applied to Theoretical Studies of Turbo-machines.

The single axisymmetrical flow around an open hull, studied before, is the uniform stream around the half-body [5]. In the present work, a general method is proposed to obtain many types of flows around open hulls, by specifying the continuity-condition in stationary motion and by generalizing the study for any outer current (not only the uniform stream).

The four examples given in this work were selected with boundary conditions similar either to the needle (and nozzle) of PELTON, TURGOT-turbines and hydro-monitors (the 1st example, fig. 2) or to the set of bosses of rotors and stators (carcass too) for different sorts of turbomachines as: diagonal pumps (2nd ex. fig. 4,, axial turbo-machines (3rd ex., fig. 6), FRANCIS or KAPLAN-turbines and — inversing the sense — centrifugal turbo-machines (4th ex., fig. 7 8, 9)

By this method: the equations of the hull meridian curve and of the stream-lines, the volume output $\dot{V} = 2\pi\psi$, the velocity and pressure in each point, also — by integration — the axial pressure force $\bar{F}_p = \int_A \bar{n}\, p\, dA$, become available.

The corressponding results contribute to the improvement of turbomachinery designing methods and perhaps even of hydrodynamical forms, leading to the increase of hydro-aerodynamical efficiency.

Buletinul Institutului politehnic Bucureşti, Tom. XXVI, fasc. 5/964.

Д. К. 621.1.016

Л. Стоическу, С. Петреску

Первый принцип термодинамики для технических процессов с конечной скоростью

Изучается механизм взаимодействия газ-поршень с помощью кинетической теории газов.

Устанавливается новое математическое выражение первого принципа, учитывающее скорость (w) развёртывания процесса, среднюю скорость (c) молекул газа и коэфициент „a", в котором конкретизируется влияние отношения w/c и релаксации на невозвратимость.

Это осуществляется с помощью фактора $a\,w/c$, который указывает невозвратимость и который при компрессии складывается, а при экспансии вычитывается.

Buletinul Institutului politehnic Bucureşti, Tom. XXVI, fasc. 5/964.

Д. К. 629.13

К. Гуца

Соображения относительно определения поля скоростей у входа в рабочее колесо осевого компрессора

Настоящая работа является попыткой найти аналитический, обобщенный метод определения поля скоростей на входе в рабочее колесо, независимо от выбранного закона профилирования.

Предлагаемый метод позволит:

а) Имея закон закручивания потока на выходе из направляющего аппарата или из предыдущей ступени, найтй закон изменения выходного угла потока, или

б) Имея закон изменения по радиусу выходного угла потока, найти соответствующее поле скоростей.

Метод, будучи громоздким (для $n > 5$), можно применять вычислительную технику и вопрос решается в небольшом сроке.

Buletinul Institutului politehnic Bucureşti, Tom. XXVI, fasc. 5/964.

Д. К. 621.3.016:621.165:697.34

К. Влезек

Метод расчета удельной среднегодовой выработки электроэнергии турбин городекой теплофикации

Б настоящей работе предлагается графоаналитический метод расчета среднегодовой удельной выработки электроэнергии $\left(y_{\text{ср.}}^{\text{год}}\right)$, учитывающий характеристики теплофикационной системы в целом: потребитель — тепловая сеть — турбина.

Потребитель влияет на $y_{\text{ср.}}^{\text{год}}$ родом и режимом потребления, структурой потребления и способом приготовления воды на горячее водоснабжение тепловая сеть — графиком регулирования отдачи тепла, а турбина — удельной часовой выработкой электроэнергии, эксплуатационным графиком турбины, способом подогрева сетевой воды на ТЭЦ паром отборов теплофикационной турбины и распределением нагрузки по бойлером турбины.

Суммирование всех этих влияний в сочетании с количеством тепла и соответствующей продолжительностью во времени привели к определению $y_{\text{ср.}}^{\text{год}}$ в зависимости от коэффициента теплофикации и спооба приготовления воды на горячее водоснабжение.

Buletinul Institutului politehnic Bucureşti, Tom. XXVI, fasc. 5/964.

D.C. 621.1.016

L. Stoicescu, S. Petrescu

The First Principle of Theormodynamics for Technical Processes with Finite Speed.

The mechanism of interaction gas-piston by means of the kinetic tehory of gases is studied. A new mathematical expression of the principle I is stated, which takes into account the speed w of displaying the process, the average speed of the gas molecules c and the quotient „a" which cumulates the influence of the ratio w/c and of the relaxation upon the irreversibility. This is done by means of a factor a w/c which indicates the irreversibility and which during the compression is added and during the expansion is subtracted.

Buletinul Institutului politehnic Bucureşti, Tom. XXVI, fasc. 5/964.

D.C. 629.13

C. Guţă

Considerations on Determining the Speeds Field Entering the Mobile Blade System of the Axial Compressor.

The present work constitutes a way of finding a general analytical method for determing the speed field entering the mobile blade system independent of the design law chosen.

The proposed method enables:

a) to find the variation law of the current by having the twisting law of the current at the exit of the director device or of the preceding stage.

b) to find the corresponding speed first by having the variation law with the radius of the exit angle of the current.

The method being a laborious one (for $n>5$) one may make use of the electronic computers.

Buletinul Institutului politehnic Bucureşti, Tom. XXVI, fasc. 5/964.

D.C. 621.3.016.621.165:697.34

C. Wlezek

Special Method for the Calculation of the Average Specific Power Output per Year of Backpressure Turbines used in District Heating.

A graphic and analytic method for calculating the mean annual specific production of electric energy $\left(y_{med}^{an}\right)$ is proposed, which considers the characteristics of the entire district heating system: consumer — district heating network — turbine.

y_{med}^{an} is influenced by the consumer through the mode and the conditions of the consumption, the structure of the consumption and the method of preparing hot water for domestic purposes, by the district heating network through the heat output control diagram, by the turbine through the specific power output per hour, the turbine operating diagram, the metod of heating the water in the station from the turbine bleedings and the distribution of the load on the turbine boilers.

The summation of these influences combined with the heat output which is in connection with the respective durations of time, allows to obtain the value of y_{med}^{an} in accordance with the district heating coefficient, the structure and the method of preparing hot water for domestic purposes.

Buletinul Institutului politehnic Bucureşti, Tom. XXVI, fasc. 5/964.

Résumé

C.D. 517

M. Tîrnoveanu

Sur une système semi-constructif global

Dans le premier § on définit les notions d'algorythme normal, d'algorythme normal de reconnaissance d'une propriété, de procédé de reconnaissance d'une propriété, de système logistique système logistique semi-constructif, de système de communication de premier degré, système logistique analytique de premier degré, système logistique semi constructif global Σ_{lg}, et on donne les théorèmes 1.1,1.2,1.3 par lesquels on fait ressortir les propriétés de la structure du système par rapport au domaine L-entité.

Dans le deuxième § on definit les traits caractéristiques globaux du système Σ_{lg} la valence globale la modalité globale la valeur globale, la valeur potentielle globale, la valeur potentielle probabilitique globale, la valeur potentielle globale indéterminée et on donne les théorèmes 2.1,2.2,2.3 par lesquels on détermine les propriétés générales de ces traits caractéristiques globaux du système Σ_{lg} par rapport à un ensemble de processus de communication organisés dans un système de communication de premier degré.

Buletinul Institutului politehnic Bucureşti, Tom. XXVI, fasc. 5/964.

C.D. 621—752:621.82

P. A. Lebedev, A. I. Efron

Oscillations planes d'une bielle de section transversale variable et de l'axe curviligne.

Cette étude est consacrée au problème des oscillations élastiques d'une bielle, possédant des sections transversales variables et l'axe curviligne de symétrie constitué par un nombre fini des différentes parties.

Dans la première partie de cette étude est effectuée l'analyse des forces agissantes à la bielle pendant ses oscillations, ainsi s'est formé un système de cinq équations aux dérivées partielles oscillations de cette bielle, possédant une configuration arbitraire, à la condition que son plan de symétrie et celui des oscillations coincident.

Dans la deuxième partie de cette étude est elaboré, l'algorythme de la solution du système des équations mentionnées en utilisant une méthode des approximations successives. La solution est avancée jusqu-à la représentation des fonctions cherchées sous la forme des intégrales. Dans le cas nécessaire leurs valeurs peuvent être définies sous la forme numérique. L'existence et l'uniformité de la solution sont argumentées.

Le moyen de l'utilisation des conditions frontières et celui de l'achèvement du processus de calcul sont indiqués.

Buletinul Institutului politehnic Bucureşti, Tom. XXVI, fasc. 5/964.

M. Atanasiu

C.D. 518:531.3

Les problèmes fondamentaux du calcul mécanique des systèmes dans le domaine des déplacements cinématiques.

On y présente comme suite de l'ouvrage [2] les principaux problèmes concernant le calcul mécanique des systèmes rigides.

Buletinul Institutului politehnic Bucureşti, Tom. XXVI, fasc. 5/964.

Zusammenfassung

D.K. 517

M. Tîrnoveanu

In bezug auf ein globales halbkonstruktives System.

In § 1 werden die Begriffe normaler Algorithmus, normaler Algorithmus zur Erkennung einer Eigenschaft, Verfahren zur Erkennung einer Eigenschaft, logistisches System, logistisches halbkonstruktives System, Mitteilungssystem der Stufe I, analytisches logistisches System der Stufe I, logistisches globales halbkonstruktives System Σ_{lg}, definiert und die Lehrsätze 1.1, 1.2, 1.3, durch welche die strukturellen Eigenschaften des Systems Σ_{lg}, auf das Entitätsgebiet L bezogen, hervorgehoben sind, angegeben.

In § 2 werden die globalen Charakteristiken des Systems Σ_l globale Valenz, globale Modalität, globaler programatischer Wert, globaler Potentialwert, globaler probalistischer Potentialwert, globaler unbestimmter Potentialwert definiert und es werden die Lehrsätze 2.1, 2.2, 2.3, durch welche die allgemeinen Eigenschaften dieser globalen Charakteristiken des Systems Σ_{lg}, bezogen auf eine grosse Anzahl von in einem Mitteilungssystem der Stufe I geordneten Mitteilungsverfahren, bestimmt werden, angegeben.

Buletinul Institutului politehnic Bucureşti, Tom. XXVI, fasc. 5/964.

D.K. 621—752:621.82

P. A. Lebedev, A. I. Efron

Ebene Schwingungen einer Kurbelstange mit schräg veränderlichem Querschnitt und krummliniger Symetrieachse.

Dieses Studium ist dem Problem der ellastischen Schwingungen einer Kurbelstange mit schrägen veränderlichen Querschnitten und aus einer gegebenen Zahl von verschiedenen Teilen zusammengesetzten krummlinigen Symetrieachse, gewidmet.

Im ersten Teil dieses Studiums werden die Kräfte analysiert, welche während dieser Schwingungen auf die Kurbelstange wirken so, dass ein System von fünf Gleichungen mit teilweisen Abgeleiteten (Derivaten) der Schwingungen dieser Kurbelstange entsteht, welches eine willkürliche Gestaltung besitzt mit der Bedingung, dass ihre Symetrieebene und die der Schwingungen aufeinanderfallen.

Im zweitem Teil des Studiums wird der Algorithmus der Lösung der genannten Gleichungen, unter Anwendung einer Methode der aufeinanderfolgenden Approximationen ausgearbeitet. Die Lösung ist bis zur Wiedergabe der gesuchten Funktionen in Form der Integralen fortgeschritten. Im nötigen Falle können ihre Werte in numerischer Form definiert werden. Die Existenz und Gleichförmigkeit der Lösungen sind begründet.

Die Möglichkeit der Anwendung der frontalen Bedingungen (Grenzbedingungen) wie auch der Durchführung des Rechenprozesses sind ebenfals angegeben.

Buletinul Institutului politehnic Bucureşti, Tom. XXVI, fasc. 5/964.

D.K. 518 : 531.3

M. Atanasiu

Grundlegende Probleme der mechanischen Berechnung der Systeme auf dem Gebiete der kinematischen Verschiebung.

In der Arbeit werden die wichtigsten Probleme in bezug auf die mechanische Berechnung der Systheme der starren Körper dargelegt

Buletinul Institutului politehnic Bucureşti, Tom. XXVI, fasc. 5/964.

C.D. 669.763

V. T. Mărculeţiu, I. Strugaru

La récupération du bismuth des concentrations indigènes.

Subordonnés à l'idée de la valorification des matières premières et des déchets de fabrication indigène, les auteurs essayent d'établir une méthode pour la récuperation encore plus complète du bismuth des concentrations à grande teneur en métal.

La méthode de la fonte alcaline, indiquée dans la littérature pour les concentration à petite teneure en mètal, a été modifiée, et les auteurs établissent les conditions optimes de récupération, en arrivant à un rendement de plus de 93%.

Buletinul Institutului politehnic Bucureşti, Tom. XXVI, fasc. 5/964.

C.D. 615.3

D. Fărcaşiu

N-Bis — (β-chloroethyle) — carbamate du choline, un dérivé du choline apparenté a l'ypérite azote.

On décrit la synthèse du bis — (β-chloroethyle)-carbamate du choline. On décrit de même une synthèse ameliorée du methanesulfonate du choline et les essais d'obtenir le diazoacetate du choline.

Buletinul Institutului politehnic Bucureşti, Tom. XXVI, fasc. 5/964.

C.D. 621.224

D. Taşcă

Mouvements irrotationnels à symétrie axiale autour des carènes ouvertes, appliqués à l'étude théorique des turbo-machines.

Le seul mouvement à symétrie axiale autour d'une carène ouverte, étudié jusqu'à présent, c'est la translation uniforme autour du demi-corps [5]. Dans le présent travail, l'on propose une méthode générale en vue d'obtenir plusieurs types de mouvements autour des carènes ouvertes, tout en précisant la condition de continuité en mouvement permanent et en généralisant l'étude aux cas des courants extérieurs quelconques (non seulement la translation uniforme).

Les quatre éxemples traités dans l'ouvrage, ont été choisis à condition aux limites semblables soit à aiguille (et à l'ajoutage) de l'injecteur des turbines PELTON ou TURGOT, ou bien d'hydromoniteur (éxemple nr. 1, fig. 2), soit à l'ensemble de moyeux rotostatoriques (de la carcasse aussi), pour différents types de turbo-machines, tels que : pompes diagonales (éx. 2, fig. 4), turbo-machines axiales (éx. 3, fig. 6), turbines FRANCIS ou KAPLAN et à sens inversé-turbo-machines centrifuges (éx. 4, fig. 7, 8 et 9).

Par cette méthode, l'on obtient : les équations de la courbe méridienne de la carène et des lignes de courant, le débit en volume $\dot{V} = 2\pi\psi$ la vitesse et la pression en chaque point et — par intégration — la force axiale dûe aux pressions $F_p = \int_A \bar{n}\, p\, dA$.

Les résultats obtenus contribuent à l'amélioration des méthodes employées aux projets de turbo-machines, voire des formes hydrodynamiques mêmes, conduisant ainsi à la hausse du rendement hydro-aérodynamique.

Buletinul Institutului politehnic Bucureşti, Tom. XXVI, fasc. 5/964.

D.K. 669.763

V. T. Mărculeţiu, I. Strugaru

Die Rückgewinnung des Wismuts aus inländischen Konzentraten.

Auf dem Wege der Verwertung der inländischen Rohstoffe und Fabriksabfälle, versuchen die Verfasser eine Methode zur gröstmöglichen Rückgewinnung des Wismuts aus Konzentraten mit grossem Metallgehalt, zu bestimmen.

Die in der Literatur für Konzentrate mit kleinem Metallgehalt angeführte Methode der alkalischen Schmelzung, wurde umgeändert und die Verfasser bestimmen die besten Rückgewinnungsverhältnisse, wobei ein Ergebnis von über 93% erzielt wird.

Buletinul Institutului politehnic Bucureşti, Tom. XXVI, fasc. 5/964.

D. Fărcaşiu

D.K. 615.3

N-bis (β-Chlorethyl)-Carbamylcholin, ein Derivat des Cholins, mit Alkylierungsmittelstruktur.

In dieser Arbeit wird die Synthese des bisher unbekannten Bis (β-Chlorethyl)-Carbaminsäureesters des Cholins beschrieben. Gleichzeitig wird eine verbesserte Synthese des Methansulfonsäureesters des Cholins, beschrieben.

Buletinul Institutului politehnic Bucureşti, Tom. XXVI, fasc. 5/964.

D.K. 621.224

D. Taşcă

Wirbelfreie rotationssymetrische Strömungen um offene Widerstandskörper, zum theoretischen Studium der Strömungsmaschinen angewandt.

Die einzelne wirbelfreie rotationssymetrische Strömung um einen offenen Widerstandskörper, welche man bis jetzt studiert hat, ist der gleichförmige Ström um einen Halbkörper [5]. In der vorliegenden Arbeit wird eine allgemeine Methode zweckmässig mehrere Strömungen um offene Widerstandskörper zu ergeben, bei der Festsetzung der Kontinuitätsbedingung in stationären Bewegung und bei Verallgemeinerung des Studiums für irgendwelche äussere Strömungen (nicht nur gleichförmiger Strom) vorgeschlagen.

Die vier Beispiele der Arbeit wurden mit ähnlichen Randbedingungen gewählt, entweder zur Nadel und Mündung der PELTON, TURGOT-sche Turbinen Einlaufdüsen und der Wassermoniteur (Beispiel Nr. 1, Fig. 2) oder zur Nabengesamtheit der Lauf-Leiträder (Gehäuse auch) für Strömungsmaschinen verschiedener Arten, wie: diagonale Pumpen (Bsp. 2, Fig. 4), achsiale Strömungsmaschinen (Bsp. 3. Fig. 6,, FRANCIS, oder KAPLAN-Turbinen und-mit verkehrter Richtung-Kreiselströmungsmaschinen (Bsp. 4, Fig. 7 bis 9).

Bei diese Methode ergibt man: die Gleichungen der Widerstandskörper Meridiankurve und der Stromlinien, die Raummenge $\dot{V} = 2\pi\psi$,die Geschwindigkeit und Druck in jedem Punkt und-durch intergrieren- den Achsialdruck $\overline{F}_p = \int_A \overline{n}\, p\, dA$.

Die Ergebnisse beitragen zur Verbesserung der Projektierungsverfahren von Strömungsmaschinen und vielleicht auch der hydrodynamischen Formen, welche zur Steigerung des hydro-aerodynamischen Wirkungsgrades streben.

Buletinul Institutului politehnic Bucureşti, Tom. XXVI, fasc. 5/964.

C.D. 621.1.016

L. Stoicescu, S. Petrescu

Le premier principe de la thermodynamique pour des processus techniques à vitesse finie.

Le travail étudie le mécanisme de l'interaction gaz-piston, à l'aide de la théorie cinétique des gaz. On y établit une nouvelle expression mathématique du premier principe qui tient compte de la vitesse (w) de développement du processus, de la vitesse moyenne (c) des molécules de gaz, et du coefficient „a" qui réunit l'influence du rapport w/c, ainsi que celle de la relaxation sur l'irréversibilité. Cela peut être réalisé à l'aide d'un facteur aw/c indiquant l'irréversibilité et qui s'additionne lors de la compression et se soustrait lors l'expansion.

Buletinul Institutului politehnic Bucureşti, Tom. XXVI, fasc. 5/964.

C.D. 629.13

C. Guţă

Considerations sur la détermination du champ de vitesses à l'entrée dans le dispositif mobile du compresseur axial.

Le présent travail est un essai de trouver une méthode analytique générale pour déterminer le champ de vitesses à l'entrée dans le dispositif mobile, indépendamment de la loi de profilage choisie.

La méthode proposée permet :

a) ayant la loi de torsion du courant à se sortie de l'appareil directeur, ou de l'échelon précédent, de trouver la loi de la variation du courant.

b) ayant la loi de variation avec le rayon de l'angle de sortie du courant, de trouver la champ de vitesse adéquat.

La méthode étant laborieuse (pour $n>5$) on peut recourir à l'emploi des machines à calculer électroniques.

Buletinul Institutului politehnic Bucureşti, Tom. XXVI, fasc. 5/964.

C.D. 621.3.016:621.165:697.34

C. Wlezek

Méthode spéciale pour calculer la production spécifique d'énergie électrique annuelle de la turbine pour chauffage urbain à distance.

L'ouvrage comprend une méthode graphique et analytique de calcul de la production spécifique moyenne annuelle d'énergie électrique y^{an}_{med} considérant les caractéristiques du système entier de production combinée d'énergie électrique et de chauffage à distance : consommateur — réseau de chauffage à distance — turbine.

Le consommateur influence y^{an}_{med} par la nature et le régime de la consommation, la structure de la consommation et le mode de préparation de l'eau chaude de ménage, le réseau de chauffage à distance par le graphique de réglage de la chaleur livrée et la turbine par la production spécifique horaire d'energie électrique, le graphique d'exploitation de la turbine, le mode de chauffage de l'eau du réseau dans la centrale, de la prise de la turbine et la répartition de la charge sur les chaudières de la turbine.

La somme de toutes ces influences combinées avec les quantités de chaleur auxquelles sont rapportées aussi les durées de temps respectives, a permis d'obtenir la valeur de y^{an}_{med} fonction du coefficient de chauffage à distance, de la structure et du mode de préparation de l'eau chaude ménagère.

Buletinul Institutului politehnic Bucureşti, Tom. XXVI, fasc. 5/964.

L. Stoicescu, S. Petrescu D.K. 621.1.016

Der erste Grundsatz der Thermodynamik für technische Prozesse, welche mit endlicher Geschwindigkeit und ohne Strömung verlaufen.

Der Mechanismus der Interaktion Gas-Kolben wird mit Hilfe der kinetischen Gastheorie untersucht. Es wird dabei ein neuer Ausdruck des ersten Prinzips festgestellt, welcher der Entwicklungs-Geschwindigkeit (w) des Prozesses, der mittleren Geschwindigkeit (c) der Gasmolekeln und dem Koeffizienten „a" (der eine Synthese der vom Verhältnis w/c und von der Relaxation verursachten Irreversibilität ist) Rechnung trägt. Das geschieht auf dem Wege eines Irreversibilität deutenden Faktoren, aw/c, der beim Verdichten addiert und beim Ausdehnen in Abzug gebracht wird.

Buletinul Institutului politehnic Bucureşti, Tom. XXVI, fasc. 5/964.

C. Guţă D.K. 629.13

Betrachtungen über die Bestimmung des Geschwindigkeitsfeldes beim Eintritt in das bewegliche Schaufelsystem des axialen Kompressors

Die vorliegende Arbeit stellt einen Versuch dar, eine allgemeine analytische Methode zur Bestimmung des Geschwindigkeitsfeldes beim Eintritt in das bewegliche Schaufelsystem, unabhängig vom gewählten Profilierungsgesetz, zu finden.

Die vorgeschlagene Methode ermöglicht:

a) Bei gegebenem Gesetz der *Verdrehung* des Stromes beim Verlassen des *richtunggebenden* Apparates oder der vorangehenden Stufe, das Gesetz der Variation des Stromes zu finden, oder

b) Bei gegebenem Gesetz der Variation mit dem Radius des Ausgangswinkels des Stromes, das entsprechende Geschwindigkeitsfeld zu finden.

Da die Methode schwierig ist (für $n > 5$) kann man sich mit der Technik der elektronischen Rechenmaschinen verhelfen.

Buletinul Institutului politehnic Bucureşti, Tom. XXVI, fasc. 5/964.

C. Wlezek D.K. 621.3.016 : 621.165 : 697.34

Methode für die Berechnung der durchschnittlichen jährlichen spezifischen elektrischen Energieproduktion der Turbine für städtische Heizung.

Es wird eine graphisch-analytische Berechnungsmethode der jährlichen spezifischen Durchschnittserzeugung von elektrischer Energie (y^{an}_{med}), welche die Charakteristiken des ganzen Fernheizungssystems, und zwar: Verbraucher — Fernheizungsnetz — Turbine berücksichtigt, vorgeschlagen.

y^{an}_{med} wird vom Verbraucher durch die Art und die Bedingungen des Verbrauchs, durch die Struktur des Verbrauchs und die Aufbereitungsweise des Hauswarmwassers, vom Fernbeheizungsnetz durch die Regelkurven der Wärmelieferung und von der Turbine durch die stündliche spezifische Erzeugung von elektrischer Energie, das Betriebsdiagramm der Turbine, die Art der Wassererwärmung im Kraftwerk bei Entnahme der Fernheizungsturbine und durch die Verteilung der Belastung auf die Kessel der Turbine beeinflusst.

Die Summierung aller dieser Einflüsse, kombiniert mit den Wärmemengen auf welche sich die entsprechenden Zeitlängen beziehen, hat zur Erzielung des Wertes von y^{an}_{med}, abhängig vom Fernheizungsfaktor, von der Struktur und der Aufbereitungsweise des Hauswarmwassers, geführt.

Buletinul Institutului politehnic Bucureşti, Tom. XXVI, fasc. 5/964.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC BUCUREȘTI
Tomul XXVI — 1964, Fascicola 5

MATEMATICĂ

C.Z.: 517

DESPRE UN SISTEM LOGISTIC SEMICONSTRUCTIV GLOBAL *)

MIRCEA TIRNOVEANU

Observația 1.1°. În această comunicare se definește un sistem logistic semiconstructiv global Σ_{lg} și se studiază cîteva proprietăți generale ale caracteristicilor globale ale sistemului Σ_{lg}.

2°. Notațiile folosite în această lucrare sînt cele din [9].

§ 1. *Sistemul logic* Σ_{lg}.

Observația 1.1. În acest paragraf se definește sistemul logistic semiconstructiv global Σ_{lg}, considerat ca un sistem de comunicare de treapta I atașat unei clase de obiecte $\{M\}$ și în care s-a introdus o structură logică R_1 de treapta I.

Definiția 1.1. Algoritm normal. Fie M o structură semiotică și fie A un alfabet al său. Se numește *algoritm normal peste A* un șir

$$\{\gamma_1, \gamma_2, \cdots, \gamma_n\}$$

de formule peste alfabetul A $[\rightarrow \cdot]$ astfel încît fiecare formulă

$$\gamma_1 \in \{\gamma_1, \gamma_2, \cdots, \gamma_n\}$$

este de forma

$$\alpha_i \rightarrow \beta_i$$

sau de forma:

$$\alpha_i \rightarrow \cdot \beta_i$$

unde $\alpha_i, \beta_i \in M$.

Definiția 1.2. Algoritm normal de recunoaștere a unei proprietăți. Fie P o proprietate și fie A un alfabet al unei structuri semiotice M. Se spune că algoritmul normal $\mathfrak{A}$ peste A este un *algoritm normal de recunoaștere a lui P* dacă:

*) Lucrare comunicată la sesiunea științifică a cadrelor didactice din Institutul politehnic București, 22—23 februarie 1964.

1° Rezultatul aplicării algoritmului $\mathcal{A}$ la toate formulele peste A care posedă proprietatea P este formula vidă Λ.

2°. Rezultatul aplicării algoritmului $\mathcal{A}$ la toate formulele peste A care nu posedă proprietatea P, dacă acest rezultat există, este o formulă nevidă.

Definiția 1.3. Procedeu de recunoaștere a unei proprietăți. Fie: M o mulțime dată; π un procedeu de transformare a mulțimii M; P o proprietate. Se spune că π este un *procedeu de recunoaștere a lui* P dacă:

1°. Rezultatul aplicării procedeului π la toate submulțimile lui M care posedă proprietatea P este submulțimea vidă ϕ.

2°. Rezultatul aplicării procedeului π la toate submulțimile lui M care nu posedă proprietatea P este o submulțime nevidă.

Definiția 1.4. Sistem logic. Se numește *sistem logic*, un sistem $[M; \sigma]$ unde M este o mulțime arbitrară și

$$\sigma = \bigcup_{i \in I} \sigma_i$$

$(\sigma_i)_{i \in I}$ fiind o familie de structuri astfel încît există o singură structură logică $\sigma_j \in (\sigma_i)_{i \in I}$.

Definiția 1.5. Sistem logic semiconstructiv. Se numește *sistem logic semiconstructiv* un sistem logic $[M; \sigma]$ pentru care se poate defini un procedeu π de recunoaștere a apartenenței la mulțimea M și un algoritm normal $\mathcal{A}$ de recunoaștere a apartenenței la mulțimea σ, sau se poate defini un algoritm normal $\mathcal{A}$ de recunoaștere a apartenenței la mulțimea M și un procedeu π de recunoaștere a apartenenței la mulțimea σ și unde:

$$\text{card } M \leqslant \aleph_0$$

iar card σ este arbitrar.

Definiția 1.6. Sistem logistic. Se numește *sistem logistic* un sistem logic $[M, \sigma]$ unde M este un alfabet A și σ este o structură logică etajată.

Definiția 1.7. Sistem de comunicare de treapta I. Se numește *sistem de comunicare de treapta I* sistemul:

$$\left[a; \{K_i^j\}_{i \in I_j' \subset I_j}\right]_{j=1,2,\ldots 9}$$

unde:

1° $\{K_i^1\}$ este clasa proprietăților intrinseci ale entității a;

2° $\{K_i^2\}_{i \in I_2}$ este clasa relațiilor intrinseci ale entității a;

3° $\{K_i^3\}_{i \in I_3}$ este clasa proprietăților comunicabile ale entității a;

4° $\{K_i^4\}_{i \in I_4}$ este clasa relațiilor comunicabile ale entității a;

5° $\{K_i^5\}_{i \in I_5}$ este clasa sensurilor proceselor de comunicare Σ în care intră entitatea a;

6° $\{K_i^6\}_{i \in I_6}$ este clasa valentelor reprezentărilor lui a;

$7°\ \{K_i^7\}_{i\in I_7}$ este clasa modalităților proceselor de comunicare în care intră entitatea a;

$8°\ \{K_i^8\}_{i\in I_8}$ este clasa valorilor programatice ale proceselor de comunicare în care intră entitatea a;

$9°\ \{K_i^9\}_{i\in I_9}$ este clasa caracteristicilor comunicațiilor neprecizate ale entității a.

Definiția 1.8. Sistem logic analitic de treapta I. Se numește sistem *logic analitic de treapta I* sistemul logic $[M;\sigma]$ unde M este un sistem de comunicare de treapta I.

Definiția 1.9. Sistemul logistic semiconstructiv global Σ_{lg}. Se numește *sistem logistic semiconstructiv global* sistemul

$$\Sigma_{lg}=[M;\sigma]$$

care satisface:

1° $[M;\sigma]$ este un sistem logic analitic de treapta I.

adică:

$$M=\left[a;\{K_i^j\}_{j\in I'_j\subset I_j}\right]_{j=1,2,\ldots 9}$$

unde a este un sistem abstract de forma

$$a=[(a_s)_{s\in S};\sigma^*]$$

și unde structura

$$\{K_i^j\}_{j\in I'_j\subset I_j}$$

este global compatibilă cu structura σ^*.

2°. $[M;\sigma]$ este un sistem logic semiconstructiv.

3°. Există cel puțin un sistem logistic semiconstructiv $[A;R]$ astfel încît sistemele $[M;\sigma]$, $[A;R]$ să fie logistic izomorfe.

Teorema 1.1. Fie E domeniul $\mathfrak{L}$ — entităților și fie:

$$E=\Omega\cup R\cup\mathfrak{Q}$$

unde: Ω este domeniul $\mathfrak{L}$ — obiectelor
R este domeniul $\mathfrak{L}$ — relațiilor
$\mathfrak{Q}$ este domeniul $\mathfrak{L}$ — proprietăților

$$\varepsilon((E'\subset E)\,\&\,(\Omega'\subset\Omega)\,\&\,(\mathfrak{R}'\subset\mathfrak{R})\,\&\,(\mathfrak{Q}'\subset\mathfrak{Q})$$

$$\downarrow$$

$$\varepsilon(((\Sigma_{lg}=[M;\sigma]\neq[\varnothing;\sigma]\,\&\,(M=E')\,\&\,(\sigma=\mathfrak{R}')\,V\,(\sigma=\mathfrak{Q}')\,V\,V\,(\sigma=\mathfrak{R}'\cup\mathfrak{Q}')))\,V$$

$$V\,(((\Sigma_{lg}=[M;\sigma]\neq[E'-(\Omega'\cap E');\sigma'])\,\&\,(M=\Omega')\,\&\,(\sigma=\mathfrak{R}')\,V\,V\,(\sigma=\mathfrak{Q}')\,V\,(\sigma=\mathfrak{R}'\,V\,\mathfrak{Q}'))).$$

Teorema 1.2. Fie:

$$E = \Omega \cup \mathfrak{R} \cup \mathfrak{A}$$

unde E este domeniul $\mathfrak{L}$ — entităților,
$\mathfrak{L}$ este domeniul $\mathfrak{L}$ — obiectelor,
$\mathfrak{R}$ este domeniul $\mathfrak{L}$ — relațiilor,
$\mathfrak{A}$ este domeniul $\mathfrak{L}$ — proprietăților.

$$\varepsilon((E' \subset E) \,\&\, (\Omega' \subset \Omega) \,\&\, (\mathfrak{R}' \subset \mathfrak{R}) \,\&\, (\mathfrak{A}' \subset \mathfrak{A}))$$
$$\downarrow$$
$$\varepsilon(E' \subset \Omega') \Rightarrow \dot{\varepsilon}\,((\left[(a_s)_{s\in S};\ \{R_i^j\}_{i\in I_j \subset I_j}\right]_{j=1,2,\ldots 9}) \,\&\, (a_i \in E') \,\&\, (\Sigma_{lg} = [M;\sigma]))$$
$$\downarrow$$
$$\varepsilon((M = [(a_s)_{s\in S};\ \{R_i^j\}_{i\in I_j' \subset I_j}]_{j=1,2,\ldots 9}) \,\&\,$$
$$\&\,(\sigma = \mathfrak{R}')\ V\ (\sigma = \mathfrak{A}')\ V\ (\sigma = \mathfrak{R}' \cup \mathfrak{A}'))\ V$$
$$V\ ([\Sigma_{lg} = [M;\sigma] = [\varnothing;\sigma']) \,\&\, (\sigma' = \mathfrak{A}')).$$

Teorema 1.3. Fie F domeniul $\mathfrak{L}$ entităților

$$((a_s)_{s\in S} = A \subset \mathfrak{A}) \Rightarrow \varepsilon\,(\Sigma_{lg}\,\varepsilon\,(\Sigma_{lg} = [M;\sigma])$$
$$\downarrow$$
$$\Sigma_{lg} = [((a_s)_{s\in S} \cup M);\sigma] \,\&\, (M^* \subset \mathfrak{A}).$$

§ 2. *Caracteristicile globale ale sistemelor* Σ_{lg}

Observația 2.1. În acest paragraf se pun în evidență cîteva proprietăți generale ale caracteristicilor globale ale sistemului Σ_{lg}.

Definiția 2.1. Valența globală. Fie $[(a_s)_{s\in S};\ \sigma^*]$ un sistem de $\mathfrak{L}$ — entități; $[(a_s)_{s\in S};\ \sigma^*]$ o reprezentare a sistemului $[(a_s)_{s\in S};\ \sigma^*]$ într-un domeniu $\mathfrak{L}$ — epistemologic; $Q = (0 \leqslant x \leqslant 1)$ mulțimea numerelor reale cuprinse între 0 și 1; τ gradul de concordanță globală a lui $[(a_s)_{s\in S};\ \sigma^*]^*$ cu $[(a_s)_{s\in S};\ \sigma^*]$. Se spune că $[(a_s)_{s\in S};\ \sigma^*]$ are *valența globală* $[(a_s)_{s\in S};\ \sigma^*]_v = x \in Q$ dacă $\tau = x$.

Definiția 2.2. Modalitate globală. Fie

$$\Sigma = [R_i,\ q_1,\ q_2,\ A,\ A^*,\ A'],$$

un proces comunicativ unde:

q_1, q_2, sînt doi subiecți dați

$A = [(a_s)_{s\in S};\ \sigma^*]$

$A^* = [(a_s)_{s\in S}\,\sigma^*]^*$ este reprezentarea globală a lui A într-un domeniu epistemologic

$A' = [(a_s)_{s\in S};\ \sigma^*]'$ este un sistem al lui A^* relativ la subiectul q_2.

R este o relație între q_1, q_2, A, A^*, A',

și fie $R_1(q_1, A_c)$ o relație între subiectul q_1 și comunicarea globală A_c a lui q_1 către q_2. Se spune că Σ are o *modalitate globală* σ_{R_1} dacă Σ posedă proprietatea: $[\Sigma, R_1(q_1, A_c)]$ se reflectă în q_1.

Definiția 2.3. Valoarea programatică globală. Fie procesul comunicativ

$$\Sigma = [R ; q_1, q_2, A, A^*, A']$$

și fie $\rho_1(q_2, A_m)$ o relație între subiectul q_2 și mesajul global A_m de la q_1 la q_2. Se spune că Σ are o *valoare programatică globală* $\mu\rho_1$ dacă Σ posedă proprietatea: $[\Sigma, \rho_1(q_2, A_m)]$ se reflectă în q_2.

Definiția 2.4. Valoare potențială globală. Fie

$$\Sigma = [R ; q_1, q_2, A, A^*, A']$$

un proces comunicativ și fie $\Diamond$ simbolul modalității „posibil".

Se spune că Σ are o *valoare potențială globală* π_g dacă

$$\varepsilon\,(\Sigma_{lg} = [M ; \sigma])$$
$$\downarrow$$
$$\Diamond\,(M = \Sigma)$$

Definiția 2.5. Valoarea potențială probabilistică globală. Se spune că procesul comunicativ

$$\Sigma = [R ; q_1, q_2, A, A^*, A^*]$$

are o *valoare probabilistică globală* π_{pg}
dacă:

$$\varepsilon\,(\Sigma_{lg} = [M ; \sigma])$$
$$\downarrow$$
$$P\,(\Diamond\,(M = \Sigma)) \neq 0$$

unde P este simbolul probabilității.

Definiția 2.6. Valoarea potențială globală nedeterminată.

Se spune că procesul comunicativ

$$\Sigma = [R ; q_1, q_2, A, A^*, A']$$

are o valoare potențială globală nedeterminată π_{gn} dacă:

$$\varepsilon\,(\Sigma = [M ; \sigma])$$
$$\downarrow$$
$$(\Diamond\,(P\,(\Diamond\,(M = \Sigma)) \neq 0)) \,\&\, (\Diamond\,(P\,(\Diamond\,(M = \Sigma)) \neq 1)$$

Teorema 2.1. Fie (Σ) o mulțime de procese comunicative

$$\varepsilon\,(\Sigma)' \subset (\Sigma))$$
$$\downarrow$$
$$\dot{\varepsilon}\,[(\Sigma)' ; \{R_i^j\}_{i \in I_j' \subset I_j}]_{j=1,2\ldots 9)} \,\&\, (\Sigma_{lg} = [M ; \sigma] \,\&$$
$$\&\, (M = M' \subset (\Sigma')$$
$$\downarrow$$
$$(\Diamond\,((\Sigma_{lg})_v \neq 0)) \,\&\, (P\,(\Diamond\,(\Sigma_{lg})_v^* = 1) = 1).$$

Teorema 2.2. Fie (Σ) o mulțime de procese comunicative

$$\varepsilon\,((\Sigma)' \subset (\Sigma)\ \&\ ((\Sigma)' \neq 0)$$
$$\downarrow$$
$$\varepsilon\,(\Sigma_{lg} = [M\,;\,\sigma])\ \&\ ((\sigma_{R_1}) \neq \varnothing)\ \&\ ((\mu\varrho_1) \neq \varnothing)\ \&\ (M = (\Sigma)')$$
$$\downarrow$$
$$(\Diamond(\Sigma_{lg} \cup (\sigma_{R_1}) \cup (\mu\varrho_1))_v \neq 0)\ \&\ ((P(\Diamond(\Sigma_{lg} \cup (\sigma_{R_1}) \cup (\mu\varrho_1)^*_v = 1) = 1)$$

Teorema 2.3. Fie (Σ) o mulțime de procese comunicative

$$\varepsilon\,((\Sigma)' \subset (\Sigma)\ \&\ ((\Sigma)' \neq 0)$$
$$\downarrow$$
$$\varepsilon\,(\Sigma_{lg} = [M\,;\,\sigma] \neq [\varnothing\,;\,\sigma^*]\ \&\ ((\pi_g) \neq \varnothing)\ \&\ ((\pi_{pg}) \neq \varnothing)\ \&$$
$$\&\ ((\pi_{gn}) \neq \varnothing)\ \&\ (M = M \subset (\Sigma)')$$
$$\downarrow$$
$$(\Diamond((\Sigma_{lg})_v = 0)\ \&\ (\Diamond(((\pi_g) \cup (\pi_{pg}) \cup (\pi_{gn}))_v = 1)\,.$$

Catedra de matematică
Institutul politehnic București

BIBLIOGRAFIE

1. *Asser, G.* — Einfürung in die mathematische Logik, Berlin, 1959.
2. *Cornap, R.* — Meaning and necessity, Chicago, 1956.
3. *Church, A.* — Introduction to Mathematical Logic, vol. I, Princeton, New Jersey, 1958.
4. *Markov, A. A.* — Teoria algoritmov, Trudî. Matem. In A.N. S.S.S.R. XI, II (1954).
5. *Morris, Ch. W.* — Signes, Language and Behavior, New-York, Prentice-Hall, 1946.
6. *Tîrnoveanu Mircea* — Despre o structură algebrică cu operatori definiți în *E*, Bulet. Inst. pol. București, Tom. XXV, Fascicol 1, 1963.
7. *Tîrnoveanu Mircea* — Despre un sistem de comunicare de treapta I, Com. Acad. R.P.R., 1963, XIII, 8.
8. *Tîrnoveanu Mircea* — Metode probabilistice în sisteme logistice neconstructive. Studii și cercetări matematice, 1963, XIV, 3.
9. *Tîrnoveanu Mircea* — Elemente de logică matematică, vol. I, Ed. didactică și pedagogică, București, 1964.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC BUCUREȘTI
Tomul XXVI — 1964, Fascicola 5

MECANICA

C.Z. : 621—752 : 621.82

ПЛОСКИЕ КОЛЕБАНИЯ ШАТУНА ПЕРЕМЕННОГО ПОПЕРЕЧНОГО СЕЧЕНИЯ С КРИВОЛИНЕЙНОЙ ОСЬЮ СИММЕТРИИ

П. А. ЛЕБЕДЕВ А. И. ЕФРОН
Ленинградский Текстильный Институт

Шатуны механизмов различных мащин и приборов зачастую имеют переменное поперечное сечение и криволинейную ось симметрии, которая может состоять из последовательно соединенных участков различных линий. В качестве примера таких механизмов отметим, например, механизм вращения роторов шаговых искателей. Режим движения таких механизмов отличается резко выраженными динамическими явлениями — значительные ускорения движения, действие ударных сил и др.

Имеющие место разрушения шатуна таких механизмов дают основание считать в качестве одной из причин этого разрушения — возникновение опасных напряжений в результате плоских упругих колебаний таких деталей. Поэтому в этой статье исследуются плоские колебания шатунов плоских механизмов, имеющих криволинейную ось, состоящую из конечного количества отдельных сопряженных участков различных линий, и переменное поперечное сечение. При этом мы учитываем упругость только лишь шатуна, считая остальные звенья достаточно жесткими. Будем считать, что шатун AB принадлежит какому-либо, например, четырехзвенному механизму, условная схема которого представлена на рис. 1, причем функции движения точек A и B, ограничивающих шатун известны.

Силы, действующие на шатун. В процессе плоского перемещения сопровождаемого упругими колебаниями, шатун подвергается действию следующих сил:

а) реакция шарнира A,

б) реакция шарнира B,

в) силы упругости материала,

г) силы веса,

д) силы инерции, обусловленные наличием ускорений колебательного движения,

е) силы инерции в переносном поступательном движении шатуна вместе с точкой A,

ж) момент сил инерции в относительном вращательном движении шатуна около точки A,

з) добавочная (Кориолисова) сила инерции при колебательном движении шатуна вследствие вращения ее относительно точки A, а также и вследствие упругой деформации изгиба.

Исследование колебаний шатуна будем осуществлять относительно подвижной системы координат $\xi\,\eta$ (рис. 1). Составим соответствующие дифференциальные уравнения, которые определили бы картину упругих колебаний звена относительно переменных его положений, зависящих от перемещений всего механизма в рассматриваемой стадии движения.

При дальнейших исследованиях принято предположение о том, что одна из главных осей инерции каждого поперечного сечения шатуна лежит в одной плоскости, перпендикулярной оси вращения кривошипа.

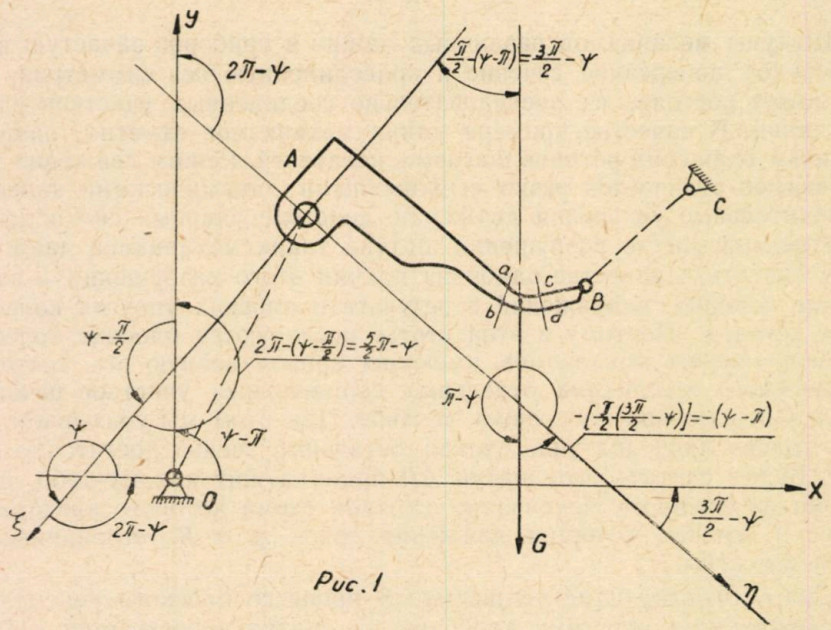


Рис. 1

Выделим элемент $a\,c\,d\,b$ тела шатуна длиною $\delta\sigma$ (рис. 2). В сечении $a\,b$ возникает момент изгиба M, растягивающая сила P и сдвигающая сила Q; в сечении $c\,d$ — момент изгиба $M+\delta M$, растягивающая сила $P+\delta P$ и сдвигающая сила $Q+\delta Q$. Сила веса элемента $a\,b\,c\,d$ шатуна длиною $\delta\sigma$ определяется по равенству

$$G=\varrho g F\,\delta\sigma\,, \qquad (1)$$

где

$\varrho = \frac{\gamma}{g}$ — плотность материала, из которого изготовлен шатун.

F — площадь поперечного сечения шатуна. Величина F переменна и принимает следующий ряд значений при изменении координаты ξ его нейтральной оси:

$$\left.\begin{aligned} &F = F_1(\xi, \eta) \quad \text{при} \quad 0 \leqslant \xi \leqslant \xi_1, \quad 0 \leqslant \eta \leqslant \eta_1, \\ &F = F_2(\xi, \eta) \quad \text{при} \quad \xi_1 \leqslant \xi \leqslant \xi_2, \quad \eta_1 \leqslant \eta \leqslant \eta_2, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &F = F_n(\xi, \eta) \quad \text{при} \quad \xi_{n-1} \leqslant \xi \leqslant \xi_n, \quad \eta_{-1} \leqslant \eta \leqslant \eta_n. \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

В результате деформации шатуна в точке q (рис. 2) элемента $acdb$ ось шатуна также деформируется, причём тангенс угла α наклона касательной к нейтральной оси равен производной $\frac{\partial \eta}{\partial \xi}$ т. е.

$$\alpha = \operatorname{arc\,tg} \frac{\partial \eta}{\partial \xi}. \tag{3}$$

Угловая скорость, приобретаемая элементом шатуна в процессе деформации, определяется как производная по параметру времени от угла поворота α, т. е.

$$\dot{\alpha} = \frac{\partial \alpha}{\partial t} = \frac{1}{1 + \left(\frac{\partial \eta}{\partial \xi}\right)^2} \frac{\partial^2 \eta}{\partial \xi \, \partial t}. \tag{4}$$

Строго говоря следовало бы вычислять значение α по полной производной $\frac{d\eta}{d\xi}$, причем

$$\dot{\alpha} = \frac{d\alpha}{dt} = \frac{1}{1 + \left(\frac{d\eta}{d\xi}\right)^2} \left[\frac{d^2\eta}{d\xi^2} \dot{\xi} + \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{d\eta}{d\xi}\right)\right].$$

С целью упрощения решения задачи ограничимся рассмотрением звеньев с достаточно пологой нейтральной осью, считая, что зависимость углового ускорения деформации от времени несущественна. Это дает возможность положить

$$\frac{d^2\eta}{d\xi^2} \approx 0 \quad \text{и} \quad \frac{d\eta}{d\xi} \approx \frac{\partial \eta}{\partial \xi}.$$

Такое предположение окажет влияние на величину момента сил инерции, определяемую лишь деформацией, которая предполагается

незначительной по сравнению с другими действующими на звено нагрузками.

Дифференцируя вторично равенство (3) по параметру времени t, найдем угловое ускорение элемента шатуна $acdb$ в процессе упругой деформации

$$\ddot{\alpha} = \frac{d^2\alpha}{dt^2} = \left\{\left[1+\left(\frac{\partial\eta}{\partial\xi}\right)^2\right]\frac{\partial^3\eta}{\partial\xi\,\partial t^2} - 2\left(\frac{\partial^2\eta}{\partial\xi\,\partial t}\right)^2\frac{\partial\eta}{\partial\xi}\right\}\left[1+\left(\frac{\partial\eta}{\partial\xi}\right)^2\right]^{-2}. \qquad (5)$$

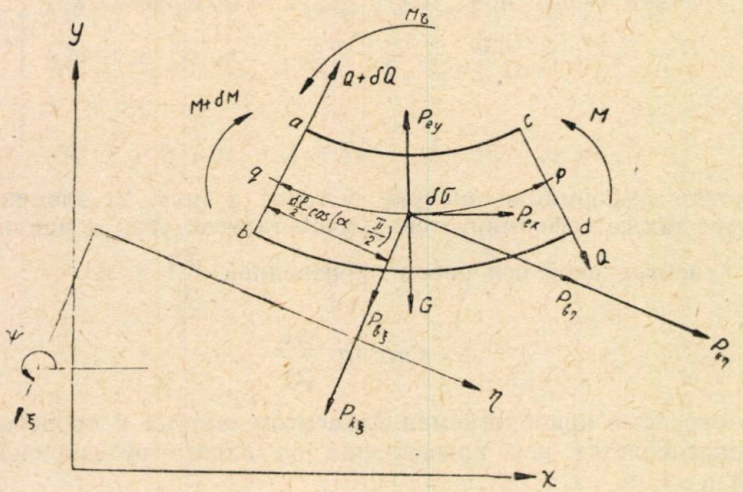


Рис. 2

Сила инерции элемента $acdb$ шатуна, обусловленная ускорением переносного поступательного движения шатуна вместе с точкой A, зависит от величины этого ускорения, проекции которого на неподвижные оси координат имеют значения:

$$\ddot{x}_A = \ddot{x}_A(t), \quad \ddot{y}_A = \ddot{y}_A(t). \qquad (6)$$

Если $\varphi_0 = \varphi_0(t)$ — угол поворота звена OA, то

$$\left.\begin{aligned} x_A &= a\cos\varphi_0;\ \dot{x}_A = -a\sin\varphi_0\,\frac{d\varphi_0}{dt};\\ \ddot{x}_A &= -a\left[\left(\frac{d\varphi_0}{dt}\right)^2\cos\varphi_0 + \frac{d^2\varphi_0}{dt^2}\sin\varphi_0\right];\\ y_A &= a\sin\varphi_0;\ \dot{y}_A = a\cos\varphi_0\,\frac{d\varphi_0}{dt};\\ \ddot{y}_A &= a\left[\frac{d^2\varphi_0}{dt^2}\cos\varphi_0 - \left(\frac{d\varphi_0}{dt}\right)^2\sin\varphi_0\right]; \end{aligned}\right\} \qquad (7)$$

где a — длина звена OA.

В таком случае проекции силы инерции в поступательном движении элемента $acdb$ шатуна имеют вид:

$$\left.\begin{aligned} &\text{на ось } x \text{ — } P_{ex} = -\varrho F \ddot{x}_A \delta\sigma , \\ &\text{на ось } y \text{ — } P_{ey} = -\varrho F \ddot{y}_A \delta\sigma . \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

Силы инерции элемента $acdb$ шатуна, обусловленные ускорением колебаний относительно осей подвижной системы координат ξ и η имеют следующие значения

$$P_{b\xi} = -\varrho F \delta\sigma \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} , \tag{9}$$

$$P_{b\eta} = -\varrho F \delta\sigma \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} . \tag{10}$$

Инерция в относительном вращательном движении элемента шатуна около точки A обусловливает возникновение момента сил инерции

$$M_r = -\delta I \frac{d^2(\psi + \alpha)}{dt^2} , \tag{11}$$

где:

δI — момент инерции элемента $abcd$ шатуна относительно продольной оси шарнира A,

ψ — угол поворота оси абсцисс ξ подвижной системы координат относительно оси абсцисс x неподвижной системы координат.

Для определения компонент кориолисова ускорения, направленных вдоль осей ξ и η, воспользуемся известным соотношением, по которому это ускорение определяется как удвоенное векторное произведение векторов угловой скорости переносного ω_e и линейной скорости v_r относительного движения

$$\bar{a}_k = 2\,\bar{\omega}_e \times \bar{v}_r . \tag{12}$$

Компоненты этих векторов, направленные по осям координатного триедра $\xi\eta\zeta$ обозначим

$$\left.\begin{aligned} &\omega_\xi = 0 ; \quad \omega_\eta = 0 ; \quad \omega_\zeta = \dot{\psi} + \dot{\alpha} ; \\ &v_\xi = \frac{\partial \xi}{\partial t} ; \quad v_\eta = \frac{\partial \eta}{\partial t} ; \quad v_\zeta = \frac{\partial \zeta}{\partial t} = 0 . \end{aligned}\right\}$$

Обозначая орты осей координатного триедра $\xi\eta\zeta$ соответственно $\bar{\imath}$, $\bar{\jmath}$, $\bar{k}$ и раскрывая векторное произведение по известному правилу, найдем

$$\bar{\alpha}_k = 2 \begin{vmatrix} \bar{\imath} & \bar{\jmath} & \bar{k} \\ \omega_\xi & \omega_\eta & \omega_\zeta \\ v_\xi & v_\eta & v_\zeta \end{vmatrix} =$$

$$2\,[\bar{\imath}(\omega_\eta v_\zeta - \omega_\zeta v_\eta) + \bar{\jmath}(\omega_\zeta v_\xi - \omega_\xi v_\zeta) + \bar{k}(\omega_\xi v_\eta - \omega_\eta v_\xi)].$$

Принимая во внимание приведенные выше значения компонентов векторов вдоль оси, найдем проекции вектора Кориолисова ускорения на ось абсцисс

$$a_{k\xi} = \omega_\zeta \frac{\partial \xi}{\partial t} - \omega_\zeta \frac{\partial \eta}{\partial t} = -2(\dot{\psi} + \dot{\alpha}) \frac{\partial \eta}{\partial t}$$

и на ось ординат

$$a_{k\eta} = \omega_\zeta \frac{d\xi}{dt} - \omega_\xi \frac{d\zeta}{dt} = 2(\dot{\psi} + \dot{\alpha}) \frac{\partial \xi}{\partial t}.$$

Соответствующие величины Кориолисовых сил инерции имеют значения

$$\left.\begin{aligned} P_{k\zeta} &= 2\varrho F(\dot{\psi} + \dot{\alpha}) \frac{\partial \eta}{\partial t} \delta\sigma, \\ P_{k\eta} &= -2\varrho F(\dot{\psi} + \dot{\alpha}) \frac{\partial \xi}{\partial t} \delta\sigma. \end{aligned}\right\} \qquad (13)$$

Составим три уравнения равновесия сил и моментов сил, действующих на шатун с учётом углов, составленных ими с осями координат (рис. 1). Сумма проекции перечисленных выше сил на ось абсцисс ξ подвижной системы координат

$$G\cos\left(\frac{3}{2}\pi - \psi\right) + P_{ex}\cos(2\pi \quad \psi) + P_{ey}\cos\left(\frac{5}{2}\pi - \psi\right) + P_{\phi\xi} + P_{k\xi} -$$

$$- Q\cos\Theta + (Q + \delta Q)\cos\Theta + P\cos\alpha - (P + \delta P)\cos\alpha = 0, \qquad (14)$$

на ось ординат η подвижной системы —

$$G\cos(\pi - \psi) + P_{ex}\cos\left(\frac{3}{2}\pi - \psi\right) + P_{ey}\cos(2\pi - \psi) + P_{b\eta} + P_{k\eta} -$$

$$- Q\sin\Theta + (Q + \delta Q)\sin\Theta + P\sin\alpha - (P + \delta P)\sin\alpha = 0, \qquad (15)$$

где:

Θ — угол, составленный нормалью к нейтральной линии в точке расположения выбранного нами элемента $a\,c\,d\,b$ и осью абсцисс ξ.

Для составления уравнения суммы моментов сил относительно точки q (рис. 2), принадлежащей нейтральной оси выбранного элемента, необходимо определить плечи всех действующих сил относительно этой точки. Будем обозначать длину плеч сил символом h с индексом, определяющим обозначение силы и считать, что дуга нейтральной оси выделенного элемента пренебрежимо мало отличается от отрезка касательной к ней в точке q.

Плечо силы веса G. Длина выделенного элемента шатуна, измеряемая вдоль нейтральной оси $-\delta\sigma$. Так как сила G всегда направлена в сторону отрицательной полуоси y, то плечо её относительно точки q параллельно оси x. На этом основании

$$h_G = \frac{\delta\sigma}{2}\cos(\psi+\alpha). \tag{16}$$

Принятые в этом и последующих равенствах углы отмечены на рис. 1.

Плечо силы P_{ey}. Так как эта сила действует по одной прямой с силой G, но противоположно направлена, то ее плечо $h_{P_{ey}} = h_G$.

Плечо силы P_{ex} направлено параллельно оси y и определяется длиной проекции $\frac{\delta\sigma}{2}$ на эту ось, т. е.

$$h_{P_{ex}} = \frac{\delta\sigma}{2}\cos\left(\psi+\alpha-\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\delta\sigma}{2}\sin(\psi+\alpha). \tag{17}$$

Плечо сил $P_{b\xi}$ и $P_{k\xi}$ равно длине проекции $\frac{\delta\sigma}{2}$ на ось η, т. е.

$$h_{P_{b\xi}} = h_{P_{k\xi}} = \frac{\delta\sigma}{2}\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\delta\sigma}{2}\sin\alpha. \tag{18}$$

Плечо сил $P_{b\eta}$ и $P_{k\xi}$ равно длине проекции отрезка $\frac{\delta\sigma}{2}$ так же, как и прежде, принимаемого ввиду малости за прямолинейный, на ось ξ. Таким образом

$$h_{P_{b\eta}} = h_{P_{k\eta}} = \frac{\delta\sigma}{2}\cos\alpha. \tag{19}$$

Принимаем следующие правила знаков.

1°. Кривизна нейтральной оси шатуна в произвольной точке считается положительной, если угол наклона касательной к нейтральной оси в этой точке увеличивается с увеличением длины дуги нейтральной линии. При этом увеличение длины дуги принимается относительно начала системы координат $\xi\eta$.

2°. Момент силы относительно точки q считается положительным, если он способствует увеличению положительной кривизны нейтральной линии или уменьшению абсолютного значения отрицательной кривизны. В противоположных случаях момент считается отрицательным.

Принимая во внимание действующие силы и пары сил (рис 2), а также принятое правило знаков, составим уравнение равновесия моментов сил

$$-M-\delta M+M-Gh_G+P_{ex}h_{P_{ex}}+P_{ey}h_{P_{ey}}-(P_{b\eta}+P_{k\eta})h_{P_{b\eta}}-$$
$$-(P_{b\xi}+P_{k\xi})h_{P_{b\xi}}-Q\delta\sigma+M_r=0. \qquad (20)$$

Подставляя в уравнения (15) (14) и (20). Значения входящих в них величин принимая при этом вбсолютные значения длин плеч, получим уравнения равновесия в плоскости $\xi\eta$ всех сил и моментов сил, действующих на шатун

$$-\varrho g F\delta\sigma\sin\psi-\varrho F\ddot{x}_A\delta\sigma\cos\psi-\varrho F\ddot{y}_A\delta\sigma\sin\psi-\varrho F\delta\sigma\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2}+$$
$$+2\varrho F\delta\sigma(\dot{\psi}+\dot{\alpha})\frac{\partial\eta}{\partial t}+\delta Q\cos\Theta-\delta P\cos\alpha=0. \qquad (21)$$

$$-\varrho g F\delta\sigma\cos\psi+\varrho F\ddot{x}_A\delta\sigma\sin\psi-\varrho F\ddot{y}_A\delta\sigma\cos\psi-\varrho F\delta\sigma\frac{\partial^2\eta}{\partial t^2}-$$
$$-2\varrho F(\dot{\psi}+\dot{\alpha})\delta\sigma\frac{\partial\xi}{\partial t}+\delta Q\sin\Theta-\delta P\sin\alpha=0. \qquad (22)$$

$$-\varrho g F\left|\cos(\psi+\alpha)\right|\frac{\delta\sigma\,\delta\sigma}{2}-\delta M-\varrho F\ddot{x}_A\left|\sin(\psi+\alpha)\right|\frac{\delta\sigma\,\delta\sigma}{2}-$$
$$-\varrho F\ddot{y}_A\left|\cos(\psi+\alpha)\right|\frac{\sigma\delta\,\delta\sigma}{2}+\varrho F\left[\frac{\partial^2\eta}{\partial t^2}+2(\dot{\psi}+\dot{\alpha})\frac{\partial\xi}{\partial t}\right]\Big|\cos\alpha\Big|+$$
$$+\varrho F\left[\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2}-2(\dot{\psi}+\dot{\alpha})\frac{\partial\eta}{\partial t}\right]\Big|\sin\alpha\left|\frac{\delta\sigma\,\delta\sigma}{2}-Q\delta\sigma-\delta I(\ddot{\psi}+\ddot{\alpha})=0. \qquad (23)\right.$$

Заменяя Θ его значением $\Theta=\alpha+\frac{\pi}{2}$, сокращая равенства (21) и (22) на $\varrho F\delta\sigma$ и пренебрегая в равенстве (23) членами, содержащими множитель второго порядка малости $\delta\sigma\,\delta\sigma$, приводим к более краткому виду эти равенства

$$g\sin\psi+\ddot{x}_A\cos\psi+\ddot{y}_A\sin\psi+\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2}-2(\dot{\psi}+\dot{\psi})\frac{\partial\eta}{\partial t}+$$

$$+\frac{1}{\varrho F}\frac{\partial Q}{\partial \sigma}\sin\alpha+\frac{1}{\varrho F}\frac{\partial P}{\partial \sigma}\cos\alpha=0. \tag{24}$$

$$g\cos\psi-\ddot{x}_A\sin\psi+\ddot{y}_A\cos\psi+\frac{\partial^2\eta}{\partial t^2}+2(\dot{\psi}+\dot{\alpha})\frac{\partial\xi}{\partial t}-$$

$$-\frac{1}{\varrho F}\frac{\partial Q}{\partial \sigma}\cos\alpha+\frac{1}{\varrho F}\frac{\partial P}{\partial \sigma}\sin\alpha=0. \tag{25}$$

$$\frac{\partial M}{\partial \sigma}+Q+\frac{\partial I}{\partial \sigma}(\ddot{\psi}+\ddot{\alpha})=0. \tag{26}$$

Определяем величину момента инерции элемента $abcd$ относительно оси ζ, перпендикулярной плоскости $\xi A\eta$ и проходящей через точку A

$$\delta I=\varrho F\,\delta\sigma\,(\xi^2+\eta^2). \tag{27}$$

После подстановки значения (27) равенство (26) приобретает вид:

$$\frac{\partial M}{\partial \sigma}+Q\varrho F(\xi^2+\eta^2)(\ddot{\psi}+\ddot{\alpha})=0. \tag{28}$$

К уравнениям (24), (25) и (28) добавим ещё два уравнения

$$\left(\frac{\partial\xi}{\partial\sigma}\right)^2+\left(\frac{\partial\eta}{\partial\sigma}\right)^2=1, \tag{29}$$

$$M=EI\left(\frac{\partial\xi}{\partial\sigma}\frac{\partial^2\eta}{\partial\sigma^2}-\frac{\partial^2\xi}{\partial\sigma^2}\frac{\partial\eta}{\partial\sigma}\right). \tag{30}$$

Принимая зависимость (29) мы предполагаем независимость в малом координат ξ и η от параметра t.

Уравнение (29) отображает собою представление длины приращения дуги $\delta\sigma$ нейтральной оси шатуна через соответствующие приращения координат. Уравнением (30) отображается известная зависимость между моментом изгиба шатуна его жесткостью и кривизной его нейтральной оси, выраженной в параметрической форме.

Система уравнений (24), (25), (28), (29) и (30) представляет собой систему пяти нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных параболического типа относительно пяти неизвестных функций $\xi(t,\sigma)$, $\eta(t,\sigma)$, $M(t,\sigma)$, $P(t,\sigma)$ и $Q(t,\sigma)$, причём независимыми переменными являются параметры времени t и длины дуги σ.

Полагаем, что взаимосвязанные между собою величины x_A, y_A и ψ являются известными функциями параметра времени t, определяемыми при решении обыкновенного дифференциального уравнения движения механизмм, в состав которого входит шатун.

Чтобы обеспечить определенность рассматриваемой системы уравнений, необходимо установить граничные условия в количествах, определяемых порядком производных неизвестных функций.

$$\xi(t,0)=f_1(t)\ ;\quad \xi(t,l)=f_2(t)\ ;$$
$$\eta(t,0)=f_3(t)\ ;\quad \eta(t,l)=f_4(t)\ ;$$
$$M(t,0)=f_5(t)\ ;\quad P(t,0)=f_6(t)\ ;\quad Q(t,0)=f_7(t) \tag{31}$$

где:

f_i $(i=1,2,\ldots 7)$ — некоторые заданные функций. Принимаем также во внимание следующие начальные условия.

$$\xi(0,\sigma)=\varphi_1(\sigma)\ ;\quad \frac{\partial\xi(0,\sigma)}{\partial t}=\varphi_2(\sigma)\ ;$$
$$\eta(0,\sigma)=\varphi_3(\sigma)\ ;\quad \frac{\partial\eta(0,\sigma)}{\partial t}=\varphi_4(\sigma)\ ; \tag{32}$$

где

φ_i $(i=1,2,\ldots 4)$ — некоторые наперед известные функции.

Решение рассматриваемой системы дифференциальных уравнений (24), (25), (28), (29) и (30) при начальных условиях (32) и граничных условиях (31) осуществляем в общем виде методом последовательных приближений. При этом принимаем в начальной стадии решения предположение о независимости сил P и Q от параметра σ. В таком случае уравнения (24) и (25) принимают следующий упрощенный вид

$$\left.\begin{aligned}&\Phi_1(t)+\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2}-2\,\Phi_2(t)\,\frac{\partial\eta}{\partial t}=0\ ;\\ &\frac{\partial\Phi_1(t)}{\partial\psi}+\frac{\partial^2\eta}{\partial t^2}+2\,\Phi_2(t)\,\frac{\partial\xi}{\partial t}=0\ ;\end{aligned}\right\} \tag{33}$$

где приняты обозначения

$$\Phi_1(t)=g\sin\psi+\ddot{x}_A\cos\psi+\ddot{y}_A\sin\psi\ ;$$
$$\Phi_2(t)=\dot{\psi}+\dot{\alpha}\ ;\quad \Phi_3(t)=\frac{\partial\Phi_1}{\partial\psi}. \tag{34}$$

Полагая $\frac{\partial\xi}{\partial t}=u$ и $\frac{\partial\eta}{\partial t}=v$, получим систему дифференциальных уравнений первого порядка

$$\left.\begin{aligned}&\Phi_1(t)+\frac{\partial u}{\partial t}-2\,v\,\Phi_2(t)=0\ ;\\ &\Phi_3(t)+\frac{\partial v}{\partial t}+2\,u\,\Phi_2(t)=0\ ;\end{aligned}\right\} \tag{35}$$

откуда

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t} &= 2\,v\,\Phi_2(t) - \Phi_1(t)\,;\\ \frac{\partial v}{\partial t} &= -2\,u\,\Phi_2(t) - \Phi_3(t)\,.\end{aligned}\right\} \tag{36}$$

Полагая $v = v(0,\sigma)$ и $u = u(0,\sigma)$ и интегрируя уравнения (36) по параметру t в пределах от 0 g 0 t, найдем

$$\left.\begin{aligned}u_1(t,\sigma) &= 2\int_0^t v(0,\sigma)\,\Phi_2(t)\,dt - \int_0^t \Phi_1(t)\,dt + \varphi_2(\sigma)\,;\\ v_1(t,\sigma) &= -2\int_0^t u(0,\sigma)\,\Phi_2(t)\,dt - \int_0^t \Phi_3(t)\,dt + \varphi_4(\sigma)\,;\end{aligned}\right\} \tag{37}$$

где $\varphi_2(\sigma)$ и $\varphi_4(\sigma)$ представляют собой значения соответственно функции $u(t,\sigma)$ и $v(t,\sigma)$ при $t = 0$, когда интегралы, входящие в (37), обращаются в нуль.

Интегрируя равенства (37) повторно по параметру t, делая замену $u(0,\sigma)$ и $v(0,\sigma)$ соответствующими значениями $\varphi_2(\sigma)$ и $\varphi_4(\sigma)$, найдем

$$\begin{aligned}\xi_1(t,\sigma) &= 2\,\varphi_4(\sigma)\int_0^t \Phi_2^{(1)}(t)\,dt - \int_0^t \Phi_1^{(1)}(t)\,dt + t\,\varphi_2(\sigma) + \varphi_1(\sigma)\\ \eta_1(t,\sigma) &= -2\,\varphi_2(\sigma)\int_0^t \Phi_2^{(1)}(t)\,dt - \int_0^t \Phi_3^{(1)}(t)\,dt + t\,\varphi_4(\sigma) + \varphi_3(\sigma)\,,\end{aligned} \tag{38}$$

где использованы начальные условия (32) для определения произвольных постоянных интегрирования и приняты обозначения

$$\int_0^t \Phi_2(t)\,dt = \Phi_2^{(1)}(t)\;;\qquad \int_0^t \Phi_1(t)\,dt = \Phi_1^{(1)}(t)\,. \tag{39}$$

Таким образом равенства (38) представляют собой первое приближенное значение ξ и η при постоянном значении σ.

Для получения второго приближения, дифференцируя равенства (38), вычислим значения

$$\frac{\partial \xi_1}{\partial t} = u_1(t,\sigma) \quad \text{и} \quad \frac{\partial \eta_1}{\partial \xi} = v_1(t,\sigma) \tag{40}$$

и подставим их в равенства (37) вместе $u(0,\sigma)$ и $v(0,\sigma)$:

$$\left.\begin{aligned}u_2(t,\sigma) &= 2\int_0^t v_1(t,\sigma)\,\Phi_2(t)\,dt - \int_0^t \Phi_1(t)\,dt + \varphi_2(\sigma)\,;\\ v_2(t,\sigma) &= -2\int_0^t u_1(t,\sigma)\,\Phi_2(t)\,dt - \int_0^t \Phi_3(t)\,dt + \varphi_4(\sigma)\,.\end{aligned}\right\} \tag{41}$$

Интегрируя последние равенства еще раз по параметру t, найдем:

$$\left.\begin{aligned}\xi_2(t,\sigma) &= 2\int_0^t \Phi_2^{(2)}(t,\sigma)\,dt - \int_0^t \Phi_1^{(1)}(t)\,dt + t\varphi_2(\sigma) + \varphi_1(\sigma);\\ \eta_2(t,\sigma) &= -2\int_0^t S_2^{(2)}(t,\sigma)\,dt - \int_0^t \Phi_3^{(1)}(t)\,dt + t\varphi_4(\sigma) + \varphi_3(\sigma);\end{aligned}\right\} \quad (42)$$

где приняты обозначения:

$$\left.\begin{aligned}\int_0^t v_1(t,\sigma)\,\Phi_2(t)\,dt &= \Phi_2^{(2)}(t,\sigma);\\ \int_0^t u_1(t,\sigma)\,\Phi_2(t)\,dt &= S_2^{(2)}(t,\sigma);\end{aligned}\right\} \quad (43)$$

причем знаки (2) при обозначениях функции отображают порядковый номер приближения.

Обобщая формулы (42) на приближение порядка k получим соответствующие приближенные значения функции:

$$\left.\begin{aligned}\xi_k(t,\sigma &= 2\int_0^t \Phi_2^{(k)}(t,\delta)\,dt - \int_0^t \Phi_1^{(1)}(t)\,dt + t\varphi_2(\sigma) + \varphi_1(\sigma);\\ \eta_k(t,\sigma) &= -2\int_0^t S_2^{(k)}(t,\sigma)\,dt - \int_0^t \Phi_3^{(1)}(t)\,dt + t\varphi_4(\sigma) + \varphi_3(\sigma);\end{aligned}\right\} \quad (44)$$

где принято обозначение

$$\left.\begin{aligned}\int_0^t v_{k-1}(t,\sigma)\,\Phi_2(t)\,dt &= \Phi_2^{(k)}(t,\sigma);\\ \int_0^t u_{k-1}(t,\sigma)\,\Phi_2(t)\,dt &= S_2^{(k)}(t,\sigma).\end{aligned}\right\} \quad (45)$$

Система (33) при начальных условиях

$$\xi(0,\sigma) = \varphi_1(\sigma), \quad \eta(0,\sigma) = \varphi_3(\sigma)$$

может быть приведена к системе четырех дифференциальных уравнений первого порядка в нормальной форме, а эта последняя при выполнении условия Липшица для правых частей имеет единственное решение, получаемое методом последовательных приближении [1].

Для того, чтобы полученное решение в виде (44) отвечало поставленной задаче, необходимо удовлетворить также заданным граничным условиям (31) и пока еще не учтенным дифференциальным уравнениям (28), (29) и (30)

Подставляя найденные значения (44) для ξ_λ и η_k в уравнение (30), найдем $M(t,\sigma)$ и подставив производную этой величины в уравнение

(28), вычислим $Q(t, \sigma)$. Определив теперь производную $\frac{\partial Q}{\partial \sigma}$ и учитывая, что $\cos \alpha = \frac{\partial \xi}{\partial \sigma}$ и $\sin \alpha = \frac{\partial \eta}{\partial \sigma}$ подставим их в равенство (24).

Для определения величины $\frac{\partial P}{\partial \sigma}$, входящей в равенства (24) и (25) воспользуемся отдельно каждым из участков шатуна, соответствующих участкам составной оси его симметрии $(0, \sigma_1)$, (σ_1, σ_2) . . . (σ_{n-1}, σ_n). Подставим в левые части уравнений (24) и (25) значение $\sigma = 0$ и найдем $\left(\frac{\partial P}{\partial \sigma}\right)_*$ из первого из этих уравнений и $\left(\frac{\partial P}{\partial \sigma}\right)_{**}$ из второго уравнения и определим их среднеарифметическое значение

$$\left.\frac{\partial P}{\partial \sigma}\right|_{\sigma=0} = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial P}{\partial \sigma}\right)_* + \left(\frac{\partial P}{\partial \sigma}\right)_{**}\right] \tag{45}$$

Значение $\frac{\partial P}{\partial \sigma}$ по равенству (45) вставим в уравнения (24) и (25), получим новую систему уравнений, пригодную лишь для первого участка $[0, \sigma]$

$$\left.\begin{aligned} V_1^{(1)}(t) + \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} - 2\, V_2(t)\frac{\partial \eta}{\partial \sigma} = 0 \\ W_1(t) + \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} - 2\, V_2(t)\frac{\partial \xi}{\partial t} = 0. \end{aligned}\right\} \tag{46}$$

Заметим, что для определения $\frac{\partial P}{\partial \sigma}$ необходимо вычислить $\frac{\partial \xi_k}{\partial t}$, $\frac{\partial^2 \xi_k}{\partial t^2}$, $\frac{\partial \eta_k}{\partial t}$, $\frac{\partial^2 \eta_k}{\partial t^2}$ и подставить их вместо соответствующих производных функций ξ и η в равенства (24) и (25).

Но чтобы учесть первое и третье граничные условия (31), т. е. $\xi(t, 0) = f_1(t)$, $\eta(t, 0) = f_3(t)$ продифференцируем их дважды по параметру t. Затем найдем средние арифметическе значения при $\sigma = 0$

$$\left.\begin{aligned} &\frac{1}{2}\left(\frac{\partial \xi_k}{\partial t} + \frac{\partial f_1(t)}{\partial t}\right);\quad \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\, \xi_k}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 f_1(t)}{\partial t^2}\right); \\ &\frac{1}{2}\left(\frac{\partial \eta_k}{\partial t} + \frac{\partial f_3(t)}{\partial t}\right);\quad \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 \eta_k}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 f_3(t)}{\partial t^2}\right); \end{aligned}\right\} \tag{47}$$

Вместо этого можно вычисленные ранее значеиия $\frac{\partial \xi_k}{\partial t}$, $\frac{\partial^2 \xi_k}{\partial t^2}$ $\frac{\partial \eta_k}{\partial t}$ и $\frac{\partial^2 \eta_k}{\partial t^2}$ находить в точке $\sigma = \sigma_1$, а затем брать средние ариф-

метические с соответствующими значениями, полученными при дифференцировании граничных условий (31), которые подставлять в уравнения (24) и (25).

Для уточнения значения $\frac{\partial M}{\partial \sigma}$ находим значение $\left(\frac{\partial M}{\partial \sigma}\right)_*$ из уравнения (30), а затем вычисляем приближенное среднее значение производной на интервале $[0, \sigma]$ по равенству

$$\left(\frac{\partial M}{\partial \sigma}\right)_{**} \approx \frac{M_1(t, \sigma) - M(t, 0)}{\sigma}, \tag{48}$$

где $M(t, 0) = f_5(t)$.

Аналогичные рассуждения можно провести и в отношении $\frac{\partial Q}{\partial \sigma}$. Значение $\left(\frac{\partial Q}{\partial \sigma}\right)_*$ этой производной можно найти из уравнения (28). Из этого же уравнения находим значение $Q(t, \sigma)$ и, используя граничные условия, определим

$$\left(\frac{\partial Q}{\partial \sigma}\right)_{**} = \frac{Q(t, \sigma) - Q(t, 0)}{\sigma}, \tag{49}$$

где $Q(t, 0) = f_7(t)$.

Затем определим средние арифметические величины производных

$$\frac{\partial M}{\partial \sigma} = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial M}{\partial \sigma}\right)_* + \left(\frac{\partial M}{\partial \sigma}\right)_{**}\right]; \tag{50}$$

$$\frac{\partial Q}{\partial \sigma} = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial Q}{\partial \sigma}\right)_* + \left(\frac{\partial Q}{\partial \sigma}\right)_{**}\right]. \tag{51}$$

Значение $\frac{\partial P}{\partial \sigma}$ вычислим как среднее арифметическое из трех величин $\left(\frac{\partial P}{\partial \sigma}\right)_1$, $\left(\frac{\partial P}{\partial \sigma}\right)_2$, $\left(\frac{\partial P}{\partial \sigma}\right)_3$, первая из которых вычисляется из уравнения (24), вторая из уравнения (25), а третья по равенству

$$\left(\frac{\partial P}{\partial \sigma}\right)_3 \approx \frac{P(t, \sigma) - P(t, 0)}{\sigma}. \tag{52}$$

Следовательно

$$\frac{\partial P}{\partial \sigma} = \frac{1}{3}\left[\left(\frac{\partial P}{\partial \sigma}\right)_1 + \left(\frac{\partial P}{\partial \sigma}\right)_2 + \left(\frac{\partial P}{\partial \sigma}\right)_3\right]. \tag{53}$$

После этого получим исправленную систему дифференциальных уравнений вида (33), в которые входят уже существенно преобразованные функции

$$\left.\begin{aligned} \Omega_1(t,\sigma)+\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2}-2\,\Omega_2(t,\sigma)\,\frac{\partial\eta}{\partial t}=0\,; \\ \Omega_3(t,\sigma)+\frac{\partial^2\eta}{\partial t^2}+U_2(t,\sigma)\,\frac{\partial\xi}{\partial t}=0\,. \end{aligned}\right\} \tag{54}$$

Эта система интегрируется методом последовательных приближений, как изложено выше, путем продолжения этого процесса до тех пор, пока значения функций в точке σ_1 не будут отличаться на допустимую величину. Такие операции надлежит производить для каждого из отдельных участков вплоть до последнего.

На последнем участке подобные приближения следует строить до тех пор пока значения функций ξ и η не совпадают с заданными.

Может оказаться, что такое совпадение не будет иметь место. В этом случае следует выбрать среднее арифметическое между граничными найденными и заданными значениями функций ξ и η на первой границе, уменьшить шаг приближений по σ вдвое и определить приближенные значения всех функций на рассматриваемых участках в обратном направлении вплоть до первого участка. Приближенные значения ξ и η в начале шатуна должны совпадать с заданными. Может оказаться, что это не выполняется. В последнем случае процесс следует продолжать, двигаясь вдоль шатуна слева направо и т. д.

В результате такого процесса приближений определяются неизвестные функции $\xi(t,\sigma)$ и $\eta(t,\sigma)$, $M(t,\sigma)$, $P(t,\sigma)$ и $Q(t,\sigma)$, определяющие форму колебаний шатуна и действительные нагрузки его, определяющие напряженное состояние в функции от времени и положения рассматриваемого сечения.

Из равенств (47), (48), (49), (50), (51), (52) и (53) видно как используются граничные условия, наложенные на искомые функции. Заметим также, что зависимость начальных функций

$$\varphi_1(\sigma)\ ,\ \varphi_2(\sigma)\ ,\ \varphi_3(\sigma)\ \text{и}\ \varphi_4(\sigma)$$

определяется равенством (29).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Степанов В. В.* — Курс дифференциальных уравнений. Физматгиз М. 1959.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC BUCUREȘTI
Tomul XXVI — 1964, Fascicola 5

C.Z.: 518 : 531.3

PROBLEMELE FUNDAMENTALE ALE CALCULULUI MECANIC AL SISTEMELOR ÎN DOMENIUL DEPLASĂRILOR CINEMATICE

MIHAIL ATANASIU

În această lucrare se pun în evidență problemele fundamentale ale calculului mecanic al sistemelor alcătuite din rigide sau asimilabile acestora, dificultățile legate de rezolvarea unora dintre aceste probleme cu ajutorul metodelor Mecanicii teoretice, precum și o serie de proprietăți importante care caracterizează starea cinetostatică a unui sistem de rigide supus la legături. Se prezintă totodată un scurt istoric și stadiul actual al cercetărilor în acest domeniu.

Această lucrare reprezintă o continuare a lucrării [2]

1. *Generalități.*

În tehnică întîlnim foarte rar un singur corp supus la legături; cel mai des se întîlnesc sisteme de corpuri asimilabile sistemelor de rigide supuse la legături. Asemenea sisteme întîlnim în Rezistența materialelor și în Statica construcțiilor sub denumirea de grinzi cu zăbrele, cadre, structuri alcătuite din bare sau sisteme de corpuri, plăci și bare. În teoria mecanismelor sistemele de corpuri se întîlnesc sub denumirea de lanțuri cinematice sau mecanisme. În Rezistența materialelor și în Statica construcțiilor mai întîlnim de asemeni așa numitele *mecanisme de cedare plastică* ce apar la solicitarea cadrelor peste limita de elasticitate. Toate aceste sisteme de corpuri supuse la legături sînt asimilabile pentru domeniul de care ne ocupăm — domeniul deplasărilor cinematice — sistemelor de solide rigide supuse la legături din Mecanica teoretică. În mare, problema care se pune pentru sistemele de corpuri citate mai sus, indiferent de domeniile în care ele apar, constă în determinarea deplasărilor sau a vitezelor, respectiv a variației de ordinul întîi a deplasărilor sau a vitezelor (accelerații) atît față de un sistem de referință fix (mărimi absolute) cît și față de anumite corpuri care alcătuiesc sistemul considerat (mărimi relative) fie că este vorba de mărimi liniare (deplasări, viteze, accelerații) fie că ele sînt mărimi unghiulare (deplasări, viteze, accelerații). Pusă sub această formă problema este foarte complexă; cînd am făcut această afirmație am

avut în vedere o rezolvare teoretică a acestei probleme sub aspectul ei general, rezolvare ale cărei rezultate să poată fi puse sub o asemenea formă încît ele să se preteze la aplicații practice imediate în toate domeniile citate mai sus.

În fond toate problemele citate comune domeniilor tehnice enumerate mai sus se reduc în ultimă instanță la o problemă de Mecanică teoretică : studiul echilibrului și mișcării (deplasărilor infinitezimale și a variațiilor de ordinul întîi ale acestor deplasări) pentru un sistem de rigide supus la legături. La o primă vedere s-ar părea deci că problemele si-ar putea găsi o rezolvare prin generalizarea rezultatelor cunoscute din Mecanica teoretică, printr-o aplicare „multiplicativă" a acestor rezultate la sistemele de rigide care aproximează sistemele de corpuri menționate mai sus și a căror complexitate este evident sporită față de aceea a sistemelor de rigide întîlnite curent în Mecanica teoretică. Aceasta a fost și mai este încă și astăzi ideea care se află la baza dezvoltării teoretice și a metodelor de calcul din disciplinele menționate, metode care își propun să dea o rezolvare cît se poate de generală și practică problemei privind studiul deplasărilor cinematice ale sistemelor de corpuri. Acesta este motivul pentru care în fiecare din disciplinele menționate mai sus se găsește o parte introductivă în care se arată cum pot fi studiate fenomenele întîlnite în cadrul disciplinei considerat cu ajutorul noțiunilor și teoremelor din Mecanica teoretică. Este însă de observat faptul că ceea ce împiedică o rezolvare corespunzătoare a problemelor citate nu este ipoteza solidului rigid — care convine tuturor cazurilor menționate — ci pe de o parte faptul că Mecanica teoretică operează cu sisteme de rigide relativ simple din punct de vedere structural iar pe de altă parte lipsurile semnalate în ceea ce privește teoria generală a legăturilor solidului din Mecanica teoretică se cumulează în cazul studiului echilibrului și mișcării sistemului de corpuri. Din acest motiv analiza cinetostatică a sistemelor de rigide sau asimilabile acestora întîlnite în disciplinele menționate mai sus întîmpină serioase dificultăți; aceasta se datorește faptului că, aplicînd teoremele cunoscute din Mecanica teoretică, rezultă o serie de relații funcționale care descriu legile privind deplasările absolute și relative ale corpurilor care alcătuiesc sistemul considerat, relații care sînt în general complicate din punct de vedere matematic, chiar și pentru cele mai simple sisteme de corpuri.

În Teoria mecanismelor și mașinilor există o preocupare în ceea ce privește elaborarea metodelor de analiza și sinteza mecanismelor precum și studiul problemelor privind construcția lor structurală datorită faptului că în fața acestei discipline se află sarcina rezolvării problemei fundamentale privind proiectarea mecanismelor plane și spațiale menite să satisfacă cerințele automatizării complexe a celor mai variate procese de producție.

În acest capitol am reunit toate problemele disciplinelor citate care au contigență cu metodele generale de calcul mecanic al sistemelor de rigide în domeniul deplasărilor cinematice. În continuare ne propunem să punem în evidență dificultățile întîmpinate în rezolvarea acestor probleme cu ajutorul metodelor Mecanicii teoretice, după care vom prezenta unele aspecte teoretice și metode noi de analiză și sinteză a sistemelor de rigide care să înlăture dificultățile semnalate.

2. *Scurt istoric al dezvoltării metodelor folosite la calculul deplasărilor cinematice ale sistemelor de corpuri.*

Consideraţiunile de pînă aici au conturat în mare domeniile la care se referă rezultatele lucrării:

a) poziţiile deplasate cu caracter cinematic care apar la determinarea eforturilor şi la trasarea liniilor de influenţă pentru structuri static determinate, atunci cînd în locul ecuaţiilor de echilibru static se foloseşte principiul lucrului mecanic virtual, caz în care deplasările compatibile cu legăturile sînt deplasările cinematice corespunzătoare gradelor de libertate obţinute prin suprimarea unor legături ale sistemului iniţial;

b) determinarea factorului de încărcare limită atunci cînd un cadru îşi pierde capacitatea portantă, caz în care în articulaţiile plastice continuitatea dispare iar porţiunile structurii separate prin aceste articulaţii sînt privite drept corpuri rigide;

c) la studiul cinematic al mecanismelor folosite în cele mai diferite sectoare din tehnică în vederea satisfacerii necesităţilor ridicate de procesele de producţie corespunzătoare;

d) la stabilirea încărcărilor prin forţe de inerţie necesare dimensionării elementelor care alcătuiesc un mecanism. În acest ultim caz mai apar în plus şi variaţii ale acestor poziţii deplasate sau variaţii de ordinul doi raportate la poziţia iniţială a sistemului, folosite la determinarea acceleraţiilor.

În toate aceste cazuri fie că se consideră configuraţiile de deplasări virtuale compatibile cu legăturile rămase după suprimarea legăturii de pe direcţia necunoscutei de încărcare considerate, fie că se consideră distribuţia de deplasări, viteze sau acceleraţii în cazul mişcării reale a unui mecanism, problema generală care se pune constă în stabilirea unor relaţii de natură geometrică sau cinematică între mişcările relative care apar în legăturile sistemului (cuplele cinematice ale unui mecanism, legăturile dintre barele unei structuri, articulaţiile plastice ale cadrelor) precum şi stabilirea deplasărilor sau vitezelor absolute liniare sau unghiulare din dreptul sarcinilor, sau a acceleraţiilor absolute şi relative, liniare sau unghiulare, ale elementelor şi cuplelor care alcătuiesc un mecanism.

Cu aceste precizări este lesne de observat că toate problemele menţionate se reduc în ultimă instanţă la problema analizei cinematice a unui mecanism. În rezolvarea acestei probleme, care este problema fundamentală a Teoriei mecanismelor, se caută să se găsească acele relaţii funcţionale menţionate mai sus care descriu legile de mişcare ale elementelor şi cuplelor mecanismului ca funcţiuni de elementele geometrice care caracterizează poziţia mecanismului la momentul considerat.

Deoarece metodele Mecanicii teoretice sînt aplicabile numai mecanismelor simple, ele constituind din acest motiv numai un punct de plecare şi deoarece disciplinele care se ocupă cu studiul echilibrului static pornind fie de la ecuaţiile de echilibru, fie de la principiul lucrului mecanic virtual aplicat pentru deplasări cinematice au preluat unele rezultate din Mecanica teoretică cît şi din Teoria mecanismelor, sîntem conduşi la o ana-

liză a evoluției acestor metode așa cum sînt ele prezentate în disciplina care are drept preocupare centrală analiza cinematică a sistemelor de corpuri, adică în Teoria mecanismelor. O prezentare a evoluției acestor metode, a rezultatelor obținute, precum și a studiului actual al metodelor de analiză cinematică a mecanismelor și a perspectivelor de viitor se găsește în lucrările [11], [12],]20].

Analiza metodelor de cercetare cinematică a mecanismelor pune în evidență pe de o parte contribuția esențială adusă de știința sovietică în acest domeniu, iar pe de altă parte existența unui număr de metode unitare de cercetare cinematică a mecanismelor care fac uz din ce în ce mai sistematic de aparatul matematic modern de investigație științifică.

Metodele de cercetare cinematică a mecanismelor au apărut — după cum era și firesc — în interiorul mecanicii teoretice, unde într-o formă foarte simplă și elementară, ele sînt cunoscute și astăzi sub denumirea de „aplicațiile tehnice ale mecanicii".

Fondatorul școlii ruse de Teoria mecanismelor este academicianul P. L. Cebîșev (1821—1894). El a obținut rezultate importante atît în analiza cinematică a mecanismelor cît și într-una din cele mai dificile probleme ale teoriei mecanismelor — problema sintezei (a proiectării mecanismelor).

Un domeniu important care are contigență cu rezultatele acestei lucrări este acela al structurii și clasificării mecanismelor. Acest domeniu se referă la alegerea unei anumite scheme folosită în mecanismele plane sau spațiale (structuri de bare sau cadre plane sau spațiale) schemă care înglobează toate mecanismele ce pot fi analizate prin metode de calcul comune. Pe baza rezultatelor obținute prin analiza structurală a unui mecanism se poate stabili dinainte mobilitatea mecanismului respectiv, fapt deosebit de important pentru alegerea necunoscutelor independente care caracterizează mecanismul respectiv cît și pentru alegerea formelor de bază în calculul structurilor întîlnite în Rezistența materialelor și în Statica construcțiilor.

Formula structurală pentru mecanismele plane a fost propusă pentru prima dată de către P. L. Cebîșev în anul 1869. În anul 1887, P. I. Somov dă formula structurală pentru mecanisme spațiale cu cuple de clasa V-a. În anul 1890, H. I. Hohmann stabilește clasificarea grupelor cinematice, în funcție de numărul de grade de libertate ale elementelor legate prin cuple cinematice și propune un sistem original de clasificare a mecanismelor. În anul 1923, A. P. Malîșev generalizează formulele lui Cebîșev și Somov pentru mecanismele ale căror elemente execută mișcarea cea mai generală în spațiu. În anul 1938, V. V. Dobrovolski a emis ideia de a împărți toate mecanismele în familii după numărul de legături generale impuse mișcării elementelor mecanismelor. Aceste probleme au căpătat mai tîrziu o dezvoltare amănunțită, în lucrările sale din perioada anilor 1938—1946, în care s-au obținut generalizări largi în teoria structurii mecanismelor. Dezvoltarea ulterioară a teoriei structurii mecanismelor se datorește lucrărilor lui I. I. Artobolevski, G. G. Baranov, T. Vasiliev și V. V. Dobrovolski.

Varietatea formelor posibile privind construcția mecanismelor a făcut pe cercetători să se ocupe de metodica formării structurale a mecanismelor și să facă încercări pentru stabilirea unei clasificări științifice a acestora. Principiile noi generalizate ale clasificării mecanismelor după structură au fost propuse și dezvoltate de L. V. Assur în lucrările sale dintre anii 1914—1918. În esență L. V. Assur a stabilit principiul de formare al mecanismelor prin suprapunerea succesivă de lanțuri cinematice având grad de mobilitate nul, lanțuri care sînt cunoscute astăzi în teoria mecanismelor sub denumirea de „grupe asurice".

Clasificarea mecanismelor creată de Assur a permis să se extindă problemele fundamentale din domeniul analizei cinematice, a forțelor care apar în mecanisme precum și unele probleme din sinteza mecanismelor.

Contribuții importante în analiza cinematică a mecanismelor au adus și F. Freudenstein, T. P. Goodman, K. Hain, ș.a. [11], [12], [20]. În țara noastră preocupările organizate în domeniul mecanicii sistemelor de corpuri sînt relativ recente. După instaurarea regimului democrat popular, o dată cu înființarea Academiei R.P.R. și cu organizarea învățămîntului superior cercetările în acest domeniu au căpătat un aspect organizat, sistematic și cu caracter de continuitate. Vom menționa în cele ce urmează cele mai importante lucrări în acest domeniu.

În lucrările [27], [29], [30], prof. D. Mangeron și C. Drăgan dezvoltă o nouă metodă de studiu a mecanismelor și în general a lanțurilor de corpuri rigide. Această metodă constă în introducerea unui tensor ortogonal afin de ordinul II într-un spațiu cu patru dimensiuni care definește poziția unui corp din sistem față de corpul precedent numit *tensor de poziție*, a unui tensor caracteristic lanțului considerat și a unui vector viteză. Metoda permite să se caracterizeze cu ajutorul elementelor matematice univoc determinate poziția unui corp dintr-un sistem în mișcarea sa relativă față de corpul precedent, sau configurația unui circuit arbitrar extras dintr-un sistem compus ; metoda conduce totodată la caracterizarea completă a mișcării elementelor și la expresia energiei cinetice în funcție de coordonatele lagrangiene, baza folosirii sistematice a mecanicii analitice clasice în problema fundamentală a tehnicii actuale, automatizarea. Această metodă se situiază pe linia cercetărilor moderne ale savanților sovietici I. F. Moroșkin și S. G. Kislîțîn.

În lucrările [28], [29] prof. D. Mangeron și C. Drăgan prezintă o nouă metodă de studiu a mecanismelor și anume *metoda accelerațiilor reduse*. Această metodă care rezolvă într-o formă generală problema studiului cinematic al mecanismelor are la bază generalizarea formulelor lui Somov pe baza noțiunii de accelerație redusă de orice ordin și pe un număr de teoreme relative la acestea. Metoda conduce la rezolvarea problemei de distribuție a accelerațiilor de orice ordin, în cazul studiului tuturor grupelor assurice aparținînd mecanismelor plane, cu posibilități de extindere la mecanismele cu cuple cinematice superioare.

În lucrarea [8] tov. Bugaievski, R. Bogdan și C. Pelecudi au elaborat un studiu aprofundat al clasificării mecanismelor spațiale avînd la bază complexitatea lanțurilor cinematice. Acest studiu prezintă o importanță deosebită pentru problemele de analiză și sinteză structurală a me-

canismelor. În lucrare sînt prezentate o serie de relaţii structurale care permit compararea lanţurilor în funcţie de numărul elementelor şi contururilor închise ; clasificarea este prezentată sub forma unui tabel împărţit în zone care corespund mecanismelor plane şi spaţiale cu proprietăţi comune. Rezultatele obţinute sînt în concordanţă cu lucrările efectuate pînă acum în această direcţie.

O lucrare deosebit de importantă pe linia studiilor teoretico-experimentale este metoda mecano-electronică de cercetare pe cale experimentală a mecanismelor elaborată în cadrul laboratorului de Teoria mecanismelor de la Institutul de Mecanică Aplicată al Academiei R.P.R. de către R. Bogdan, C. Pelecudi L. Calmaciuc şi Gr. Antonescu şi expusă în lucrările [6], [7]. Această metodă dă posibilitatea obţinerii rapide a vizualizării variaţiei parametrilor cinematici chiar în timpul funcţionării unui mecanism. Un prim sistem explorează traiectoriile în coordonate carteziene, iar al doilea în coordonate polare. Astfel mărimile mecanice sînt transformate în mărimi electrice iar apoi amplificate şi redate pe ecranul unui osciloscop. Erorile de trasare a traiectoriilor sînt minime, fapt care scoate în evidenţă suficienta precizie de lucru a sistemelor preconizate. Instalaţia mecano-electronică de cercetare experimentală a mecanismelor construită în cadrul laboratorului de Teoria mecanismelor de la Institutul de Mecanică Aplicată al Academiei R.P.R. a fost folosită şi de autorul acestei lucrări în scopul verificării experimentale a rezultatelor teoretice obţinute.

O serie de contribuţii importante în domeniul analizei cinematice a sistemelor de rigide au adus şi prof. R. Voinaroski, A. Braier, V. Manafu, D. Tutunaru, Tr. Demian şi alţii.

O contribuţie deosebit de importantă la studiul mecanic al sistemelor şi anume la calculul poziţiilor deplasate cu caracter cinematic sau elastic au adus-o lucrările prof. Al Gheorghiu [14], [15], [16], [17], [18], [19]. În aceste lucrări s-au cuprins într-o metodă unitară şi generală modalităţile de studiu ale poziţiilor deplasate pe bază de analogii, modalităţi care apar în general izolat, fiind justificate şi aplicate sub forme particulare. Metoda elaborată de prof. Al. Gheorghiu constă în înlocuirea operării pe sistemul real cu operarea pe un sistem convenţional denumit *sistem conjugat*. În lucrările menţionate s-a stabilit în amănunţime semnificaţia generală a sistemelor conjugate identificîndu-se toate caracteristicile şi proprietăţile acestora, fapt care a permis prezentarea unei metode generale de studiu şi determinare a poziţiilor deplasate cu caracter cinematic sau elastic ; totodată în aceste lucrări s-a precizat şi modul de aplicare practică a acestei metode la diferite categorii de probleme din calculul structurilor, pentru a se identifica domeniile de aplicare avantajoasă. Generalitatea, simplitatea şi eleganţa rezultatelor obţinute prin această metodă au făcut ca ea să devină astăzi una din metodele fundamentale în calculul poziţiilor deplasate ale structurilor.

Această metodă prezintă faţă de metodele curente avantajul unei mari simplităţi, al posibilităţii de tabelare a calculului sau de programare a calculelor la o maşină electronică de calcul analogică sau cifrică. Această metodă prezintă avantaje deosebit de importante la analiza cinematică

a mecanismelor plane și spațiale precum și la trasarea liniilor de influență la structuri static determinate precum și la studiul structurilor în domeniul plastic.

Prezentarea aceasta nu este nici pe de parte exhaustivă, nici măcar în cele două domenii care au contigență cu rezultatele lucrării: analiza structurală și cinematică a mecanismelor. Aș dori să menționez însă că, folosind căile de documentare curente, autorul lucrării a luat cunoștință de cele mai noi cercetări în acest domeniu din buletinele de specialitate ale principalelor institute din lume; o parte din aceste cercetări, și anume cele mai importante, sînt menționate în referirile bibliografice ale lucrării. Odată cu aceasta aș dori să subliniez încă odată ideia că la această prezentare am avut în vedere unele aspecte importante privind analiza structurală și cinematică a mecanismelor care duc la o serie de metode noi aplicabile în *toate domeniile* în care apar deplasări cinematice reale sau virtuale ale sistemelor complexe. Preocuparea de bază în acest domeniu aparține — prin însăși natura ei — domeniului de cercetare al Teoriei mecanismelor; celelalte discipline (Rezistența materialelor și Statica construcțiilor) preiau numai o parte din aceste rezultate în scopul determinării eforturilor într-un sistem static determinat. Din acest motiv a trebuit să axăm expunerea noastră pe realizările și rezultatele recente obținute în Teoria mecanismelor.

3. *Stadiul actual al cercetărilor privind metodele generale de calculul sistemelor în domeniul deplasărilor cinematice; probleme privind analiza și sinteza structurală și cinematică a sistemelor.*

În cele ce urmează ne vom referi tot la rezultatele obținute de cercetătorii din domeniul teoriei mecanismelor deoarece aceste rezultate sînt cele mai complete pînă la ora actuală, disciplinele care se ocupă cu studiul structurilor static determinate (Rezistența materialelor și Statica construcțiilor) folosind numai unele aspecte particulare ale acestor metode necesare rezolvării anumitor probleme care intervin aici.

Metodele actuale folosite la cercetarea deplasărilor, vitezelor și accelerațiilor la sistemele de rigide întîlnite în teoria mecanismelor se împart în trei mari categorii:

— metode grafice (sau metode în care predomină calculul grafic),
— metode grafo-analitice,
— metode analitice.

După cum se arată în lucrarea [31] „Calculul cinematic al mecanismelor și în special al mecanismelor plane articulate a format în ultimul secol o preocupare de căpetenie a cercetărilor din diferite țări în scopul găsirii unei metode generale și unitare și în același timp simplă pentru determinarea distribuției de viteze și accelerații pe elementele unui mecanism plan articulat". Trebuie spus de la început că o asemenea metodă generală unitară și totodată simplă nu există pînă în momentul de față; acest fapt este demonstrat chiar de existența acestor trei categorii de

metode ale căror domenii de valabilitate nu se acoperă în limite prea mari la cercetarea cinematică a unui mecanism dat.

În continuare vom analiza pe rînd trăsăturile fundamentale şi particularităţile fiecărei categorii de metode privind analiza cinematică a mecanismelor.

Metodele grafice de cercetare cinematică a mecanismelor plane sînt: metoda „clasică" sau metoda „directă", metoda „schimbării elementului conducător", metoda grafică a „acceleraţiilor reduse şi metoda „coeficienţilor de influenţă" (metoda Mohr-Modrey).

Metoda clasică sau directă foloseşte ecuaţiile vectoriale de compunere a vitezelor şi acceleraţiilor (ecuaţiile lui Euler) care se construiesc separat pentru viteze şi pentru acceleraţii (planele vitezelor şi ale acceleraţiilor) pornind de la mişcarea cunoscută a elementului sau elementelor conducătoare (iniţiale) pînă se ajunge la mişcarea elementului condus. Calculul grafic prin această metodă este destul de complicat în special în cazul lanţurilor cinematice complexe. Pentru anumite poziţii şi pentru anumite mecanisme particulare s-au realizat o serie de simplificări dar, după cum se arată în lucrarea [31], acad. I. I. Artobolevski a demonstrat că această metodă nu a putut fi înlocuită pînă astăzi la calculul cinematic al unui mecanism oarecare.

Metoda schimbării elementului conducător (iniţial) urmăreşte ca prin schimbarea elementului conducător să reducă clasa mecanismului, simplificînd prin aceasta construcţia planului vitezelor şi acceleraţiilor. Această metodă nu este însă aplicabilă în toate cazurile ci numai la acele mecanisme la care prin această operaţie clasa mecanismului se micşorează.

Metoda grafică a acceleraţiilor reduse constă în găsirea acceleraţiilor reduse ale articulaţiilor interioare ale unei grupe asurice, folosind proprietatea fundamentală a perpendicularităţii figurii acceleraţiilor reduse pe figura în mişcare. Această metodă permite în anumite cazuri unele rezolvări interesante ale problemelor de cinematică plană.

Metoda coeficienţilor de influenţă (metoda Mohr-Modrey) are la bază principiul deplasărilor virtuale şi principiul că suma cîtorva deplasări posibile ale punctelor unui lanţ cinematic este în acelaşi timp deplasarea lui posibilă şi reală, deoarece, pentru un punct oarecare al lanţului, viteza rezultantă a mişcării lui posibile şi reale este egală cu suma vectorială a vitezelor parţiale corespunzătoare mişcărilor componente. Din prezentarea critică a acestei metode [31] rezultă că ea este inferioară metodelor precedente din punctul de vedere al volumului de lucru.

Acestea sînt metodele grafice folosite curent în teoria mecanismelor. Ne permitem să remarcăm că aceste metode prezintă o serie de neajunsuri esenţiale care se răsfrîng atît asupra generalităţii cît şi a aplicabilităţii lor practice. Cele mai importante dintre ele sînt:

Lipsa de precizie datorită erorilor de desen. Aceste erori care sînt apreciabile se cumulează, astfel încît la erorile provenind din desenarea mecanismului se adaugă erorile de construcţie a planului vitezelor, iar la acestea din urmă se adaugă erorile provenind din construcţia grafică

a planului acceleraţiilor. Se poate ajunge astfel la erori inadmisibile în ceea ce priveşte în special valorile obţinute pentru acceleraţii.

Lipsa de precizie în citirea rezultatelor. Atît planul vitezelor cît şi planul acceleraţiilor prezintă de foarte multe ori regiuni cu o mare densitate de puncte şi linii alături de regiuni mai puţin încărcate. Din această cauză precizia citirii rezultatelor lasă foarte mult de dorit.

Lipsa de precizie datorită schimbării scării desenului. În construcţiile grafice efectuate pe planul vitezelor şi pe planul acceleraţiilor se poate ajunge uneori în situaţia că anumite drepte aproape paralele se întîlnesc în afara cadrului epurei. În acest caz este necesară o schimbare a scării. De foarte multe ori se întîmplă că o singură schimbare de scară nu ajunge. Este de la sine înţeles faptul că schimbările repetate ale scării desenului constituie noi surse de erori care se adaugă celorlalte.

Perspectiva limitată a metodei grafice. Metodele grafice de determinare a vitezelor şi acceleraţiilor nu se pretează la folosirea mijloacelor moderne de calcul (maşini electronice de calcul) devenind obositoare pentru proiectant şi fără perspectivă în ceea ce priveşte aplicarea tehnicii noi.

La acestea se mai adaugă şi o altă serie de dezavantaje cum ar fi lipsa de generalitate (metodele grafice sînt elaborate în special pentru mecanismele plane ; la mecanismele spaţiale ele pot fi folosite numai în anumite cazuri, combinate cu metodele geometriei descriptive), necesită în general un volum mare de lucru, nu permit folosirea rezultatelor de la o poziţie la alta a mecanismului.

Metode grafo-analitice folosite în Teoria mecanismelor sînt „metoda schimbării bazei" propusă de Th. B. Goodman [31] şi metoda „colinearităţii celor trei centre instantanee de rotaţie".

Principiul de bază al metodei grafo-analitice propuse de Th. B. Goodman constă în alegerea unui element iniţial şi a unui element fix articulat de primul, astfel încît noul mecanism să se transforme într-un mecanism de clasa doua din clasificarea lui I. I. Artobolevski. Diferenţa faţă de metoda schimbării elementului conducător constă în faptul că la această metodă elementul fix din mecanismul dat devine mobil. Folosind o serie de relaţii de recurenţă se deduc valorile vitezelor reale în funcţie de valorile arbitrare determinate cu ajutorul vitezelor şi acceleraţiilor corespunzătoare mecanismului transformat. Din prezentarea critică a acestei metode [31], rezultă că ea nu este aplicabilă decît unei anumite categorii de mecanisme destul de restrînse.

Metoda colinearităţii celor trei centre instantanee de rotaţie constă în determinarea prin calcul a vitezelor absolute şi relative ale diferitelor elemente ale mecanismului, folosind colinearitatea celor trei centre instantanee de rotaţie şi măsurînd în paralel pe mecanismul dat segmentele care intervin în expresiile acestor viteze. Această metodă care are o răspîndire largă în Statica construcţiilor [17], [32] este limitată deoarece, în general, o parte din centrele instantanee de rotaţie ies în afara cadrului

epurei, fapt care face imposibilă măsurarea segmentelor necesare calculului analitic. În plus această metodă servește numai la determinarea vitezelor.

Din această prezentare rezultă faptul că folosirea metodelor grafo-analitice pentru analiza cinematică a mecanismelor se limitează deasemeni la un cadru destul de restrîns.

Metodele analitice folosite la studiul cinematic al mecanismelor pot fi împărțite în două mari categorii: metode care au la bază rezultatele Mecanicii teoretice privind mișcarea plană sau spațială a unui corp și metode care au la bază aplicarea metodelor matematicii moderne (numere complexe, algebra liniară, numerele duale și corpurile hipercomplexe, calculul matricial și tensorial).

Analiza primei categorii de metode prezentate spre exemplu în lucrările [1], [38] ne pune în evidență faptul că ele sînt deosebit de greoaie, necesită un volum mare de calcule care nu poate fi în general tabelat sau mecanizat. Aceste metode nu au dat rezultate decît în cazul mecanismelor simple care pot fi rezolvate ușor și prin alte metode.

Căutarea unei metode analitice generale și totodată practice a condus pe cercetătorii din acest domeniu la folosirea unui aparat matematic de investigație din ce în ce mai complex. Citäm în acest sens lucrările [9], [30], [33], [34]. Rezultatele obținute în aceste lucrări au pus în evidență o serie de proprietăți noi, interesante de analiză structurală și cinematică a mecanismelor; totodată remarcăm însă că ele prezintă pînă în momentul de față numai o valoare pur teoretică, deoarece datorită complexității calculului devin inaplicabile în practică.

Ca linie generală a acestor metode observăm faptul că — indiferent de natura lor — ele prezintă întotdeauna următoarele trei etape:

— determinarea poziției mecanismului
— determinarea vitezelor absolute ale cuplelor și elementelor
— determinarea accelerațiilor absolute ale cuplelor și elementelor.

O altă trăsătură importantă, comună tuturor metodelor analitice, indiferent de aparatul matematic folosit, este aceea că trecerea de la prima la cea de a doua etapă precum și de la cea de a doua la cea de a treia etapă se face folosind operatorul de derivare în raport cu timpul, aplicat elementului matematic (contur geometric poligonal, matrice, tensor, număr complex) care caracterizează poziția mecanismului determinată la prima etapă. Acesta reprezintă unul din cele mai vulnerabile puncte ale acestor metode, datorită pe de o parte complexității operațiilor survenite pe această cale, iar pe de altă parte limitării posibilităților de aplicare prin folosirea mijloacelor moderne de calcul, deoarece derivatoarele electronice sînt în general complicate în raport cu mașinile de calcul electronice curente, introducînd totodată și erori apreciabile.

Rămîne deci că aceste metode să se deosebească între ele numai prin aparatul matematic folosit; cele mai simple folosesc conture închise plane sau spațiale de segmente cărora li se aplică operatorul de derivare [38], mergînd pînă la folosirea elementelor unui spațiu liniar cărora li se aplică de asemenea operatorul de derivare pe conture simplu închise plane sau

spațiale situate pe mecanism [33], la care se adaugă ecuațiile de închidere a rezultatelor pe aceste conture. Acest mod de a privi lucrurile nu constituie după părerea noastră un salt calitativ în raport cu metodele Mecanicii teoretice aplicate sistemelor simple de rigide. Complicațiile rezultate nu sînt nici pe departe justificate, fapt care este evidențiat de bariera de netrecut a unui volum extrem de mare de calcule. Părerea noastră în această direcție este că nu aplicarea multiplicativă a unei anumite scheme de calcul sau folosirea nejustificată a unui aparat matematic complex poate conduce la rezultat, ci punerea în evidență a unor noi proprietăți care caracterizează natura intimă a proceselor cinematice studiate.

Metodele analitice prezintă marele avantaj al posibilității mecanizării calculelor, prin programarea lor la o mașină de calcul analogică sau cifrică. Ele permit deasemenea folosirea mijloacelor mecanizate curente de calcul (riglă de calcul, mașini de calculat) precum și aplicarea metodelor de calcul aproximativ (metoda aproximațiilor succesive). De asemeni metodele analitice de calcul ajută în mod considerabil sinteza cinematică a mecanismelor, fapt imposibil de realizat prin aplicarea metodelor grafice; privind prin prizma acestor considerații apare ca firesc faptul ca cercetătorii din acest domeniu să-și fi îndreptat eforturile spre găsirea unei metode analitice pentru cercetarea cinematică a mecanismelor, care să fie totodată generală și practică; unul din obiectivele principale ale lucrărilor publicate de noi constă în prezentarea unei asemenea metode care, după aprecierile noastre, satisface aceste deziderate.

4. *Problemele fundamentale ale teoriei legăturilor sistemelor de corpuri în domeniul deplasărilor cinematice și dificultățile legate de rezolvarea lor.*

În cele ce urmează vom face o trecere succintă în revistă a principalelor probleme ridicate de cercetarea sistemelor de corpuri supuse la legături, a modului în care sînt rezolvate aceste probleme cu ajutorul metodelor curente care au la bază rezultatele Mecanicii teoretice precum și a dificultăților întîmpinate în aplicarea acestor rezultate în Rezistența materialelor, Statica construcțiilor și Teoria mecanismelor.

4.1. *Stabilirea gradului de nedeterminare statică al unei structuri.* Este cunoscut faptul că eforturile care apar în diferitele secțiuni ale unei structuri se determină cu ajutorul ecuațiilor de echilibru static din Mecanica teoretică în funcție de forțele active și de forțele care apar în legăturile structurii considerate [32].

Structura considerată este static determinată sau static nedeterminată după cum din rezolvarea ecuațiilor de echilibru rezultă soluții unice pentru o încărcare dată sau, respectiv pentru aceeași încărcare, rezultă mai multe soluții pentru reacțiuni și eforturi. În acest ultim caz înseamnă că numărul ecuațiilor de echilibru static, liniar independente, care leagă între ele forțele de legătură ce acționează structura considerată este mai mic decît numărul acestor forțe de legătură.

Diferența dintre numărul de necunoscute (reacțiuni sau eforturi) care sînt necesare unei determinări unice a stării de eforturi și numărul ecuațiilor de echilibru static liniar independente care pot fi scrise pentru o structură, constituie *gradul de nedeterminare statică al structurii considerate.*

Stabilirea gradului de nedeterminare statică al unei structuri prezintă un deosebit interes pentru rezolvarea problemei determinării eforturilor în secțiunile barelor care alcătuiesc structura considerată : într-adevăr, după cît este cunoscut, la rezolvarea acestei probleme prin metoda eforturilor, prima operație constă în transformarea unui sistem de n ori static nedeterminat într-un sistem static determinat (forma de bază a sistemului inițial) prin suprimarea a n legături în locul cărora se introduc forțele sau cuplurile de legătură corespunzătoare. În acest mod se obține un sistem liniar de n ecuații cu n necunoscute în care coeficienții necunoscutelor și termenii liberi se calculează cu formulele lui Maxwell-Mohr pe forma de bază static determinată.

Metodele recomandate în literatura de specialitate [13], [17], [32] privind stabilirea gradului de nedeterminare statică al unei structuri constau în „inventarierea" necunoscutelor scalare introduse de legăturile structurii considerate, după ce, evident — se indică în prealabil numărul acestor necunoscute pentru tipurile uzuale de legături întîlnite în calculul structurilor. Pentru efectuarea acestei „inventarieri" în literatura de specialitate se indică mai multe procedee practice și anume [32] :

— procedeul contururilor închise
— procedeul barelor
— procedeul sistemelor de bare (al izolării corpurilor deschise).

După cum s-a arătat în cazul unui singur corp și după cum se va preciza în cele ce urmează, o asemenea „inventariere" a necunoscutelor scalare introduse de legături nu poate constitui un procedeu general care să conducă întotdeauna la rezultate corecte. Explicația acestui fapt care a apărut și în cazul analizei cinetostatice a unui singur corp supus la legături, este foarte simplă : numărul necunoscutelor scalare pe care le introduc legăturile unei structuri nu poate caracteriza singur gradul de nedeterminare statică al structurii considerate, deoarece schimbarea configurației liniilor de acțiune ale forțelor de legătură modifică numărul necunoscutelor independente. Cert este faptul că în foarte multe cazuri întîlnite în practică procedeul „inventarierii" necunoscutelor scalare introduse de legături coincide cu procedeul de rezolvare care ține seama și de configurația liniilor de acțiune ale forțelor de legătură, fapt care justifică circulația largă a procedeelor menționate mai sus. Nu numai atît ; după cum se arată la p. 208 din lucrarea [32] „gradul de nedeterminare statică se poate obține deseori din analiza directă a structurii statice, fără să fie nevoie să se recurgă la formulele stabilite, care uneori conduc la calcule lungi și inutile".

Faptul că procedeul „inventarierii" necunoscutelor scalare introduse de legături poate conduce în anumite cazuri la rezultate eronate este semnalat în aceeași lucrare prin observația : „procedeele pentru stabilirea gradului de

nedeterminare statică nu trebuie aplicate fără discernămînt. Trebuie să se observe de la început ca sistemul static să nu constitue o formă critică, sau să nu aibe părți care să constitue mecanisme; în aceste cazuri aplicarea formelor stabilite ar conduce la rezultate false".

Din prezentarea acestei situații se conturează o primă problemă la care trebuie să dea răspuns teoria generală a legăturilor sistemelor de corpuri; ea poate fi formulată astfel: *care este criteriul general în baza căruia se poate stabili gradul de nedeterminare statică al unei structuri oarecare plane sau spațiale?*

4.2. *Stabilirea gradului de mobilitate al unui mecanism.*

Alături de sistemele de rigide sau asimilabile acestora, care prezintă un număr de legături mai mare decît cele corespunzător situației de determinare statică un rol important îl joacă și sistemele de corpuri la care numărul acestor legături este mai mic decît cel necesar situației de determinare statică; aceste sisteme sînt în general mobile și se numesc, după cum se știe, mecanisme. O mărime importantă în studiul cinematic și cinetostatic al acestor sisteme îl constituie *gradul de mobilitate* care reprezintă numărul parametrilor independenți cu ajutorul cărora se poate caracteriza poziția mecanismului considerat, la un moment dat. În Mecanica teoretică, unde sistemele întîlnite sînt alcătuite dintr-un număr mic de corpuri, stabilirea gradului de mobilitate nu constituie o problemă; de cele mai multe ori găsirea numărului parametrilor independenți care caracterizează un asemenea sistem la un moment dat se face în mod intuitiv, direct pe sistemul considerat, prin observarea mișcărilor compatibile cu legăturile pentru poziția dată. În Mecanica teoretică se operează cu mărimile independente care caracterizează poziția unui sistem de corpuri la un moment dat sub forma coordonatelor lagragiene, fără a se indica vreo metodă pentru stabilirea acestor coordonate în cazul unui sistem de corpuri oarecare; în calculele care se efectuează se presupune că ele au fost stabilite anterior printr-un procedeu care nu intră în sfera de preocupări a acestei discipline, dar care totodată nu este indicat nicăeri. Se știe însă că stabilirea acestor coordonate, reprezintă o operație care nu este întotdeauna posibilă cu ajutorul mijloacelor intuitive, geometrice, elementare.

Deoarece Mecanica teoretică nu oferă un procedeu general și practic pentru stabilirea gradului de mobilitate al unui sistem de corpuri, deși în ecuațiile Mecanicii această noțiune se folosește în mod implicit, cercetătorii din disciplinele interesate au fost conduși spre rezolvarea acestei probleme care reprezintă deosebită importanță în analiza cinematică a mecanismelor.

Diversitatea și complexitatea mecanismelor întîlnite în tehnică a condus la un număr foarte mare de parametri care a făcut foarte dificilă rezolvarea acestei probleme într-o formă generală și totodată practică. Soluțiile date suferă fie prin lipsa lor de generalitate fie datorită unei complexități foarte mari care le fac de-a dreptul inaplicabile în practică.

Din prezentarea acestei situații rezultă o nouă problemă la care trebuie să dea răspuns teoria legăturilor sistemelor de corpuri. Ea poate fi formulată astfel: *cum se poate stabili gradul de mobilitate al unui sistem oarecare de corpuri?*

4.3. *Determinarea legăturilor pasive ale unui sistem de corpuri.*

La fel ca și în cazul unui singur corp, prezența legăturilor pasive într-un sistem de corpuri atrage după sine mărirea gradului de nedeterminare statică al sistemului respectiv, mobilitatea sa rămînînd constantă. Prezența legăturilor pasive într-un sistem de corpuri atrage deasemeni o serie de consecințe de natură structurală și tehnologică.

După cum se arată în Teoria mecanismelor formulele folosite actualmente pentru analiza structurală și cinematică a mecanismelor nu pot fi aplicate decît după ce în prealabil s-au înlăturat din mecanismul considerat legăturile pasive; în caz contrar aceste formule conduc la rezultate eronate. Odată cu aceasta trebuie făcută observația că nicăieri nu se indică vreo metodă, cît de particulară, pentru determinarea legăturilor pasive care apar în componența unui lanț cinematic. Actualmente ele se reperează fie cu ajutorul metodelor geometrice, intuitive, fie pe baza faptului că în aplicațiile curente intervin mereu aceleași situații devenite „clasice".

Să analizăm spre exemplu mecanismul reprezentat în fig. 1

Acest mecanism a rezultat dintr-un mecanism paralelogram OCDG căruia i s-au adăugat barele *BE* și *AF* astfel încît figurile *OAFG*, *ABEF* și *BCDE* să fie paralelograme. După cum se poate observa ușor pe cale geometrică acest mecanism are un singur grad de mobilitate. Cu toate acestea aplicînd formulele cunoscute din Teoria mecanismelor privind stabilirea gradului de mobilitate a unui mecanism, obținem un rezultat fals datorită legăturilor pasive *BE* și *AE*. Într-adevăr, folosind formula lui Cebîșev pentru stabilirea gradului de mobilitate a unui mecanism plan:

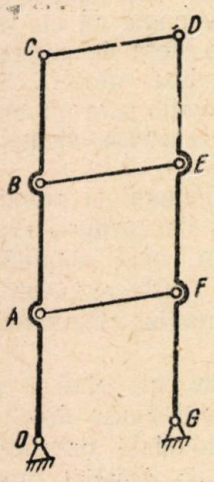


Fig. 1

$$W = 3n - 2P_5 \qquad (1)$$

în care W este gradul de mobilitate al mecanismului n este numărul elementelor mobile ale mecanismului iar P_5 este numărul cuplelor de clasa a cincea obținem:

$$W = 3 \times 5 - 2 \times 8 = -1$$

De aici rezultă că mecanismul este imobilizat. Înlăturînd una din legăturile pasive *BE* sau *AE* și aplicînd din nou formula (1) obținem:

$$W = 3 \times 4 - 2 \times 6 = 0$$

rezultat de asemeni eronat.

În fine înlăturînd ambele legături pasive (ori care două din barele *AF*, *BE* sau *CD*) obținem valoarea corectă a mobilității mecanismului considerat și anume:

$$W = 3 \times 3 - 2 \times 4 = 1$$

De aici rezultă că pentru a obține o valoare corectă a gradului de mobilitate al unui mecanism trebuie ca, la mobilitatea calculată cu ajutorul formulelor clasice, să adăugăm numărul de legături pasive ale mecanismului considerat sau, altfel zis, să calculăm mobilitatea unui mecanism cu ajutorul formulelor clasice numai după înlăturarea din mecanism a legăturilor pasive. Atît în primul cît și cel de al doilea caz trebuie puse în evidență legăturile pasive ale unui mecanism; pentru aceasta, după cum am mai arătat, nu există însă nici o metodă în afară de observația simplă de natură geometrică, efectuată pe mecanismul dat, observație care chiar în cazul mecanismelor avînd o complexitate redusă nu conduce întotdeauna la rezultate corecte.

Am afirmat mai sus că prezența legăturilor pasive într-un mecanism provoacă o serie de dificultăți în ceea ce privește execuția mecanismului respectiv din punct de vedere al tehnologiei de prelucrare. Într-adevăr, numărul legăturilor pasive ale unui mecanism indică totodată și numărul dimensiunilor care trebuiesc executate exact. Trebuie observat însă faptul că este necesar să se deosebească legăturile pasive ale unui mecanism, legături care în majoritatea cazurilor provoacă dificultăți de natură tehnologică, de legăturile pasive care apar într-o cuplă cinematică și care în majoritatea cazurilor sînt admisibile; ca exemplu putem cita legăturile pasive care apar la șurubul cu mai multe începuturi, la îmbinările prin caneluri sau la angrenarea prin roți dințate. Acest fapt se explică prin aceea că toate suprafețele de lucru ale unei cuple cinematice sînt prelucrate în general cu un singur dispozitiv, cu una și aceeași sculă și, din acest motiv pot fi prelucrate ușor cu mare precizie. Toleranțele dimensiunilor diferitelor elemente care alcătuesc un mecanism diferă în mod esențial de la situația în care mecanismul nu are legături pasive (mecanism static determinat) la situația în care mecanismul considerat posedă una sau mai multe legături pasive (mecanism static nedeterminat). Dacă mecanismul este static determinat dimensiunile elementelor sale aproape că nu influențează transmiterea forțelor și din acest motiv toleranțele lor pot fi luate în limite foarte mari. Pe baza acestor observații putem spune că funcționarea sigură a unui mecanism cu toleranțe mari ale elementelor sale este asigurată dacă mecanismul considerat nu are legături pasive. Excepție de la aceasta o fac mecanismele destinate transmiterii de forțe mari ca de ex. arborii cotiți sau unele mecanisme unde înlăturarea legăturilor pasive este legată de dificultăți constructive foarte mari. Totodată la acestea se mai adaugă și faptul că la mecanismele cu legături pasive, datorită impreciziei de execuție a anumitor elemente, frecările sînt foarte mari iar randamentul este foarte mic. Iată deci că prezența legăturilor pasive într-un mecanism ridică pe lîngă problemele generale de mecanică

legate de studiul cinematic și cinetostatic al mecanismului respectiv, o serie de probleme importante privind tehnologia prelucrării elementelor care intră în componența mecanismului respectiv.

Din considerațiile prezentate mai sus rezultă o nouă problemă la care trebuie să dea răspuns teoria generală a legăturilor unui sistem de corpuri ; această problemă poate fi formulată în modul următor : *cum pot fi puse în evidență legăturile pasive ale unui sistem de corpuri ?*

4.4. *Punerea în evidență a sistemelor critice.*

In general vom înțelege prin sistem critic acel sistem la care numărul gradelor de mobilitate în ceea ce privește deplasările sale finite nu coincide cu numărul gradelor sale de mobilitate în ceea ce privește deplasările sale infinitezimale în vecinătatea unei anumite poziții. Altfel zis sistemele critice — sau formele critice cum sînt numite aceste sisteme în Statica construcțiilor — sînt acele sisteme care posedă numărul necesar de legături pentru a fi static determinate și geometric strict nedeformabile dar la care, datorită unei dispuneri particulare a legăturilor sistemului nu mai este asigurată stricta indeformabilitate geometrică pentru una sau mai multe poziții ale sale.

Ca exemplu foarte simplu de sistem critic poate servi sistemul reprezentat în figura 2. Acest sistem este alcătuit din două bare *AB* și *BC* supuse la legături prin trei articulații cilindrice în punctele *A*, *B* și *C* ; Axele 1, 2 și 3 ale acestor articulații sînt paralele și coplanare. După cum se poate observa ușor, deși acest sistem posedă toate legăturile necesare pentru a-i asigura stricta indeformabilitate geometrică, totuși, datorită

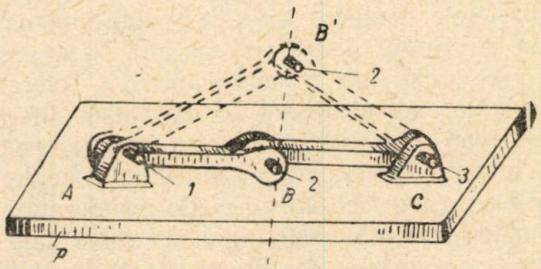


Fig. 2

dispoziției particulare a axelor de rotație ale cuplelor din *A*, *B* și *C*, punctul *B* poate executa mici deplasări pe dreapta Δ normală în punctul *B* pe planul *P* care conține axele 1, 2 și 3. O poziție infinit vecină este *A B' C* reprezentată punctat în fig. 2 ; în această poziție axele cuplelor de rotație sînt 1, 2' și 3 adică ocupă o altă poziție decît cea anterioară și anume paralele în spațiu.

Calculînd mobilitatea acestui sistem cu ajutorul formulei (1) obținem :

$$W = 3 \times 2 - 2 \times 3 = 0$$

fapt care ne arată că formulele curente folosite la determinarea mobilității sistemelor de corpuri nu sesizează stările critice ale acestor sisteme. Mai precis, în cazul considerat aceste formule nu fac nici o distincție între cazul prezentat în fig. 2 și cel reprezentat în fig. 3.

Exemplul prezentat este foarte simplu și cu utilizări practice reduse; rolul său este numai acela de a pune în evidență faptul că la stabilirea formulelor care dau mobilitatea sistemelor de corpuri nu s-a luat în con-

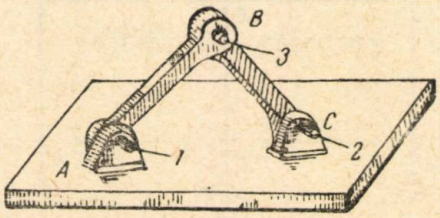


Fig. 3

siderare o proprietate fundamentală a legăturilor existente între corpurile sistemelor și anume configurația axelor acestor legături în jurul cărora corpurile care alcătuiesc sistemul pot efectua mici deplasări sau mișcări relative instantanee. Punerea în evidență a sistemelor critice care apar în Rezistența materialelor, Statica construcțiilor și Teoria mecanismelor se face actualmente pe baza unor observații simple de natură geometrică care au o aplicabilitate limitată la o serie de cazuri simple întîlnite curent în aceste discipline și care sînt lipsite de generalitatea corespunzătoare precum și de un punct de vedere unitar.

Sistemele critice au aplicații importante în Rezistența materialelor și în Statica construcțiilor. Într-adevăr se știe că la alcătuirea sistemului de ecuații pentru un sistem de n ori static nedeterminat se suprimă n legături pînă cînd sistemul devine static determinat, iar în locul celor n legături suprimate se introduc forțele sau cuplurile de legătură corespunzătoare. În acest mod sistemul de n ori static nedeterminat se transformă într-un sistem static determinat, acționat de n necunoscute și de încărcarea inițială; acest sistem poartă denumirea de *forma de bază* a sistemului inițial. Suprimarea celor n legături ale unei structuri static nedeterminate pentru a se ajunge la o formă de bază se poate face în mai multe moduri; oricare ar fi însă aceste moduri ele trebuie să respecte toate o condiție fundamentală: aceea ca forma de bază să nu constitue o formă critică. După cum se menționează în lucrarea [32], în afară de această condiție nu există nici o altă restricție teoretică pentru suprimarea celor n legături simple în alegerea formei de bază. Este lesne de înțeles de ce această condiție este fundamentală în alegerea formei de bază a sistemelor static nedeterminate; condiția de suprimare a celor n legături simple pentru transformarea sistemului inițial într-un sistem static determinat constitue numai o condiție necesară dar nu și suficientă; suficiența acestei condiții trebuie asigurată prin aceea că restul de legături simple rămase să

nu se afle într-o asemenea configurație particulară, care să conducă la forme de bază critice, adică la un sistem fără indeformabilitate strictă din punct de vedere geometric, fapt care ar reveni la aceea că forma de bază constitue ea însăși un sistem static nedeterminat. Este important de observat faptul că și aici apare aceeași problemă a configurației axelor legăturilor. Cu toate că aceasta este unica restricție impusă alegerii sistemului de bază, nici în Statica construcțiilor nu găsim o metodă generală

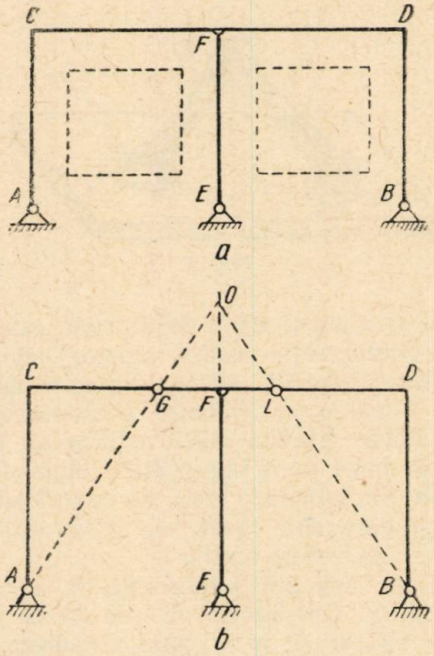


Fig. 4

și unitară pentru punerea în evidență a sistemelor critice: mai mult chiar, calculînd gradul de nedeterminare statică al unui sistem critic cu ajutorul formulelor folosite curent în această disciplină obținem uneori rezultate false.

Pentru explicarea celor prezentate mai sus să considerăm cadrul din fig. 4 [32]. Acest cadru este de două ori static nedeterminat. Dacă se introduc două articulații în punctele E și D obținem o formă de bază corectă; dacă însă se introduc două articulații în punctele G și L astfel încît dreptele AG, FE și BL sînt concurente (sau spre exemplu paralele, dacă articulațiile se introduc în punctele C și D) obținem o formă critică ce nu poate fi admisă ca formă de bază. Ori cum am introduce aceste articulații, adică fie că obținem forme critice, fie că obținem forme necritice, formulele folosite în Statica construcțiilor pentru stabilirea gradului de nedeterminare statică nu sesizează stările critice ale unui sistem. Într-

adevăr folosind procedeul contururilor închise obținem pentru gradul de nedeterminare statică expresia

$$n = 3k - \sum s$$

în care n reprezintă gradul de nedeterminare statică al sistemului k reprezintă numărul contururilor închise iar $\sum s$ reprezintă numărul de condiții statice introduse de legături. În cazul sistemului din figura 4 avem două contururi închise deci $k=2$ iar fiecare legătură introduce cîte o singură condiție statică deci $\sum s = 4$ deoarece avem patru articulații A, B, E, F. Înlocuind în formula (2) rezultă:

$$n = 3 \times 2 - 4 = 2$$

Deci sistemul este de două ori static nedeterminat.

În cazul formei de bază obținute prin introducerea a două articulații indiferent că sistemul astfel obținut este o formă critică sau nu obținem:

$$n = 3 \times 2 - 6 = 0$$

Adică formula (2) nu sesizează faptul că forma de bază este sau nu o formă critică.

Metodele folosite actualmente pentru punerea în evidență a formelor critice pot servi doar în cazuri simple; lipsa lor de generalitate și de unitate se manifestă prin aceea că ele devin inaplicabile în cazul structurilor plane complexe și mai ales în cazul structurilor spațiale.

Din considerațiunile prezentate mai sus rezultă o nouă problemă la care trebuie să dea răspuns teoria legăturilor în cazul sistemelor de corpuri. Ea poate fi formulată astfel: *care este criteriul general în baza căruia pot fi puse în evidență formele critice ale sistemelor de corpuri plane sau spațiale?*

4.5. *Determinarea unei anumite forțe de legătură dintr-o ecuație de echilibru care conține o singură necunoscută.*

Această problemă pe care a mai semnalat-o și în cazul unui singur corp [2] apare cu o importanță mărită în cazul sistemelor de corpuri. Într-adevăr, în problemele practice apare de multe ori necesitatea de a calcula o anumită reacțiune fără a scrie întreg sistemul ecuațiilor de echilibru obținute prin izolarea corpurilor care constitue sistemul respectiv. În general această problemă se rezolvă în modul următor: se separă din sistemul considerat un subsistem ales în mod convenabil, astfel încît reacțiunea căutată să apară ca forță exterioară; odată cu această reacțiune mai apar însă și alte reacțiuni a căror prezență în ecuația care se scrie trebuie eliminată. Pentru aceasta se folosește un procedeu analog celui întîlnit în cazul unui singur corp, aplicînd fie metoda echilibrului părților cunoscută din Statica sistemelor de rigide, fie principiul vitezelor virtuale. În cazul aplicării primei metode trebuie găsită o asemenea axă față de care se scrie ecuația de echilibru, din care să reiasă necunos-

cuta căutată astfel încît celelalte necunoscute care au apărut datorită separării subsistemului considerat din sistemul inițial să nu intervină. În cazul aplicării celei de a doua metode trebuie determinată acea axă a mișcării elicoidale virtuale care îndeplinește condiția menționată mai sus.

Găsirea acestor axe nu constitue probleme dificile în cazul sistemelor de corpuri simple, cînd ele pot fi determinate prin observarea directă a configurației legăturilor substistemului de corpuri considerate. După cum se observă din practică, creșterea complexității sistemelor de corpuri sub raportul numărului de legături existente între corpurile sistemului, a repartiției acestor legături între corpuri precum și a configurației axelor legăturilor, ridică și în acest caz dificultăți importante în aplicarea procedeelor directe, intuitive. Acest fapt conduce la aceea că neexistînd un procedeu general pentru determinarea acestor axe, aplicarea metodei determinării succesive a forțelor de legătură — metodă deosebit de importantă pentru tehnicieni datorită expeditivității sale — devine imposibilă. Trebuie observat că această metodă are aplicații deosebite la studiul sistemelor de corpuri întîlnite în tehnică (sisteme de bare, grinzi cu zăbrele, structuri plane sau spațiale).

Din cele expuse mai sus rezultă o nouă întrebare la care trebuie să dea răspuns teoria legăturilor sistemelor de corpuri; ea poate fi formulată astfel: *care este procedeul general în baza căruia, pentru un sistem static determinat, să se poată determina o anumită forță de legătură dintr-o ecuație care conține această forță de legătură drept singură necunoscută?*

4.6. *Determinarea unei anumite mișcări relative dintr-o ecuație de condiție care conține o singură necunoscută.*

Această problemă este analoagă celei expuse la punctul precedent, cu deosebirea că ea se referă la sistemele deformabile alcătuite din corpuri rigide (domeniul deplasărilor cinematice).

Este cunoscut faptul că atît în Teoria mecanismelor cît și în Statica construcțiilor apare de foarte multe ori necesitatea calculării unei anumite mărimi cinematice relative sau absolute (deplasare, viteză sau accelerație) ca funcțiune de mărimile geometrice și cinematice date, fără ca prin aceasta să introducem în calcule alte necunoscute decît cea care este cerută. Procedeele cunoscute actualmente în analiza cinematică a mecanismelor nu permit rezolvarea problemelor de cinematică pe această cale, cu o singură excepție destul de restrînsă ca domeniu de aplicabilitate pe care o vom menționa în cele ce urmează. Este vorba despre metoda coeficienților de influență (metoda Mohr-Modrey) folosită la analiza cinematică a mecanismelor plane, metodă cu ajutorul căruia se pot rezolva anumite probleme de analiză cinematică a mecanismelor plane pe calea indicată mai sus. După cum se arată însă în lucrare metoda coeficienților de influență nu poate fi aplicată la mecanismele care nu au elemente simple legate la bază; aceasta constitue o restricție care micșorează considerabil domeniul de aplicabilitate al acestei metode. Dacă ne referim la

mecanismele spațiale, constatăm că în acest domeniu nu există nici măcar o indicație cît de vagă pentru aplicarea unei asemenea metode, fapt explicabil prin aceea că metodele folosite actualmente în analiza cinematică a mecanismelor spațiale necesită un volum extrem de mare de lucru chiar pentru cele mai simple dintre ele.

Trebuie să observăm faptul că găsirea unor metode de genul celor care formează preocuparea prezentului punct din lucrarea noastră constitue una dintre preocupările importante ale cercetătorilor din acest domeniu, fapt explicabil prin aceea că aceste metode oferă cercetătorului o independență apreciabilă în calcule, cu consecințe imediate în cea ce privește economia de timp. Prin prizma acestor considerații se explică succesul metodei secțiunilor sau a principiului deplasărilor virtuale folosite în studiul static și cinematic al sistemelor de corpuri.

Din cele expuse mai sus rezultă o nouă întrebare la care trebuie să dea răspuns teoria legăturilor sistemelor de corpuri; ea poate fi formulată astfel: *care este procedeul general în baza căruia, la un sistem de corpuri cinematic — determinat, să se poată determina o anumită mișcare a unui corp arbitrar ales din sistem, dintr-o ecuație care să conțină caracteristica cinematică a acestei mișcări drept singură necunoscută?*

4.7. *Configurațiile axelor centrale ale sistemelor de forțe care mențin în echilibru un rigid sau un sistem de rigide.*

Această problemă este ceva mai generală, depășind cadrul teoriei legăturilor solidului și sistemelor, deoarece sistemele de corpuri ale căror axe centrale formează obiectul acestui punct pot fi sisteme de forțe cunoscute (forțe date) sau sisteme de forțe necunoscute (forțe de legătură). Intr-o formă simplă această problemă este cunoscută din algebra vectorilor alunecători; este cunoscut faptul că vectorii care alcătuiesc un sistem aflat în echilibru, trebuie să îndeplinească cu necesitate anumite condiții privind configurația suporturilor acestor vectori; neîndeplinirea acestor condiții atrage după sine imposibilitatea echivalenței sistemului de vectori considerat cu sistemul nul. Spre exemplu doi vectori nu-și pot face echilibru decît dacă suporturile lor coincid iar trei vectori nu-și pot face echilibru decît dacă suporturile lor se află într-una din configurațiile concurente și coplanare sau paralele și coplanare. Aceste concluzii sînt valabile oricare ar fi valorile modulelor acestor vectori.

Atît în probleme de analiza și sinteza cinetostatică a legăturilor solidului și sistemelor cît și într-o serie de alte probleme de statică, cinematică sau de dinamica solidului și sistemelor unde apare studiul echilibrului unui sistem de vectori alunecători, se pun de foarte multe ori probleme mai generale decît cele citate anterior. In aceste probleme apare necesar să se considere n sisteme de vectori alunecători și să se caute condițiile necesare pe care axele lor centrale trebuie să le îndeplinească pentru ca mulțimea celor n sisteme considerate să fie echivalentă cu sistemul nul, fără ca asupra modulelor vectorilor care alcătuiesc sistemele considerate să se facă vreo restricție. Importanța acestei probleme constă în aceea

că atît la analiza cît și la sinteza legăturilor solidului și sistemelor se realizează o mare economie de timp dacă se poate prevedea încă de la început că un anumit sistem de forțe nu poate menține în echilibru sistemul de solide considerat din cauza neîndeplinirii condiției de configurație, fără a mai aștepta să rezolvăm în prealabil întreg sistemul ecuațiilor de echilibru și a constata la sfîrșit că acest sistem este imposibil, din cauza nerespectării condiției citate.

Din cele de mai sus rezultă o nouă întrebare al cărui răspuns interesează în particular și teoria legăturilor sistemelor de corpuri. Ea poate fi formulată astfel ; *care trebuie să fie configurațiile axelor centrale ale unui număr oarecare de sisteme de vectori, astfel încît mulțimea acestor sisteme să fie echivalentă cu sistemul nul ?*

4.8. *Sinteza sistemelor de corpuri supuse la legături.*

In cele de mai sus am prezentat o serie de probleme privind analiza cinetostatică a sistemelor de corpuri supuse la legături importante pentru activitatea practică de proiectare a diferitelor sisteme de corpuri, considerate în primă aproximație ca sisteme de rigide întîlnite sub diferite forme în Rezistența materialelor (sisteme de bare, cadre plane sau spațiale), în Statica construcțiilor (structuri plane sau spațiale) sau în Teoria mecanismelor (mecanisme plane sau spațiale) pune în evidență necesitatea elaborării unor metode comune generale și practice de analiză cinetostatică a sistemelor de rigide ; în afară de aceasta mai sînt însă o serie de probleme care aparțin sintezei sistemelor de corpuri supuse la legături, adică a proiectării unor asemenea sisteme care să satisfacă unor condiții impuse inițial. După natura acestor condiții putem avea probleme privind proiectarea unui sistem care să satisfacă la condiții privind natura și numărul legăturilor sau la natura și numărul interconexiunii elementelor (sinteză structurală), la condiții privind mobilitatea sau natura mișcărilor absolute sau relative ale elementelor (sinteză cinematică) sau, în sfîrșit, la condiții privind gradul de nedeterminare statică sau natura interacțiunilor transmise între elemente (sinteză cinetostatică). Aceste probleme sînt în general mult mai dificile decît problemele corespunzătoare privind analiza unui sistem de corpuri supuse la legături a cărui structură este dată sau cunoscută. Dat fiind importanța practică deosebită a acestor probleme pentru activitatea de elaborare a unor noi sisteme de corpuri care să satisfacă cerințele din ce în ce mai exigente ale diferitelor domenii ale tehnicii (structuri, mecanisme noi automate) spre rezolvarea lor se îndreaptă astăzi cercetările în domeniul teoriei sistemelor de corpuri supuse le legături. Este evident că domeniul sintezei sistemelor de corpuri supuse la legături nu poate fi separat de cel al analizei acestor sisteme, deoarece de foarte multe ori inversarea ordinei de lucru a unui procedeu de analiză conduce la un anumit procedeu de sinteză iar alte ori metodele expeditive de analiză servesc la distingerea eventuală a uneia din cele cîteva variante rezultate dintr-un anumit procedeu de sinteză : în favoarea acestei idei mai pledează și faptul evident că ambele procedee operează cu aceleași noțiuni fun-

damentale din statica, cinematica și dinamica sistemelor de corpuri supuse la legături, fără a face vreo deosebire între domeniile disciplinelor citate mai sus. Dintre aceste discipline singura care are preocupări de sinteza sistemelor de corpuri este Teoria mecanismelor.

4.9. *Clasificarea structurală a sistemelor de corpuri supuse la legături.*

Complexitatea și varietatea mare a sistemelor de corpuri supuse la legături întîlnite în toate disciplinele care operează cu asemenea sisteme, atrage după sine o serie de complicații în ceea ce privește volumul mare de calcule necesare atît analizei cît și sintezei sistemelor de corpuri. Pentru a reduce la minimum acest volum de calcule s-a pus și în acest domeniu problema — de altfel bine cunoscută în alte domenii ale științei — de a clasifica sistemele de corpuri supuse la legături pe considerații de structură, în vederea studierii cazurilor complicate printr-o descompunere convenabilă în cazuri mai simple, care au fost bine studiate în prealabil. O asemenea descompunere în cazuri simple permite — fapt deosebit de important pentru tehnicieni — folosirea de tabele care conțin valori dinainte calculate pentru cazuri simple din suprapunerea cărora rezultă cazul complex considerat. O ușurare deosebită în aplicarea acestui mod de a privi lucrurile o constitue faptul că majoritatea fenomenelor de natură mecanică ce au loc în interiorul sistemelor de corpuri sînt descrise de sisteme de ecuații liniare, fapt care face posibilă aplicarea principiului suprapunerii efectelor.

În lucrarea [8] sînt expuse criteriile fundamentale privind clasificarea mecanismelor spațiale; în cele ce urmează noi vom relua aceste criterii și le vom expune într-o formă generală pentru un sistem de corpuri oarecare. Considerăm deci că criteriile de bază privind clasificarea structurală a sistemelor de corpuri sînt:

— numărul mișcărilor absolute sau relative posibile ale corpurilor care alcătuesc sistemul;

— gradul de determinare cinematică și statică al sistemului considerat;

— modul de interconectare al corpurilor care alcătuiesc sistemul, adică modul de repartiție al legăturilor între corpurile sistemului. Acest criteriu se referă la structura topologică a sistemului considerat;

— configurația axelor mișcărilor elicoidale instantanee ale legăturilor sistemului, care exercită o influență deosebită asupra gradului de determinare cinematică și statică al sistemului considerat. Acest criteriu se referă la structura proiectivă a unui sistem de corpuri;

— numărul corpurilor care alcătuiesc sistemul considerat, care cu cît este mai mare cu atît amplifică mai mult operațiile de calcul.

Este evident că elaborarea unei clasificări generale care să țină seama de toate criteriile prezentate mai sus constitue o operație deosebit de dificilă. Totuși ușurarea substanțială care revine în urma unei asemenea clasificări în ceea ce privește reducerea volumului de calcul, a constituit și constitue încă și astăzi un imbold puternic pentru cercetările în această direcție. Cele mai importante rezultate în acest domeniu pînă la

ora actuală au fost obținute în domeniul Teoriei mecanismelor plane de către savantul sovietic L. V. Assur care a elaborat o asemenea clasificare, pe baza căreia, folosind metodele de calcul cunoscute în momentul de față, se poate elabora un studiu complet cinematic și static al mecanismelor plane. Elementele simple ale acestor clasificări au fost denumite de Assur *grupe cinematice*. Meritul deosebit al lui Assur constă în aceea că odată cu precizarea acestor elemente simple ale clasificării, el a dat și metoda practică de descompunere a unui mecanism complex în grupe cinematice precum și sistematica de calcul cinematic și static a fiecărei grupe. Această clasificare a fost amendată ulterior cu o serie de elemente importante în sensul precizării, simplificării și extinderii ei, de către o serie de alți oameni de știință sovietici printre care citäm pe acad. I. I. Artobolevski, V. V. Dobrovolski și G. G. Baranov.

Studiul unei asemenea clasificări generale a sistemelor de corpuri supuse la legături pe baza criteriilor citate mai sus nu formează obiectul prezentei lucrări.

Acestea sînt după părerea noastră, principalele probleme ridicate de analiza și sinteza cinematică și cinetostatică a sistemelor de rigide.

Catedra de mecanică teoretică
Institutul politehnic București

BIBLIOGRAFIE

1. *Artobolevski I. I.:* Teoria mecanismelor și a mașinilor, Editura Tehnică, București, 1955.
2. *Atanasiu M.:* Studiul mobilității și al gradului de nedeterminare statică al unui solid rigid supus la legături cu ajutorul teoriei mulțimilor de șuruburi geometrice, Buletinul I.P.B., Tom XXIV, fasc. 3, 1963.
3. *Bezveselnîi E. S.:* Kinematika ploskih zubciatov mehanizmov, Harkov, 1962.
4. *Bloh Z. Ş.:* Sintez ploskih mehanizmov țepei s nizşimi parami, Prikladnaia Matematika i Mehanika, Tom III vîp 3, 1939.
5. *Bloh Z. Ş.:* Novîi metod postroenia strukturnîh shem mehanizmov i ih klasifikația, Gosenergoizat, vîp. XVIII, Moscova 1961.
6. *Bogdan R., Pelecudi C., Calmaciuc C., Antonescu Gr.:* Studiul vitezelor în mecanismele plane pe baze mecano-electronice, Studii și Cercetări de Mecanică Aplicată, nr. 4, 1962.
7. *Bogdan R., Pelecudi C., Calmaciuc C., Antonescu Gr.:* Asupra traductorului polar pentru cercetarea mecanismelor, Studii și Cercetări de Mecanică Aplicată, nr. 3, București, 1959.
8. *Bugaievski E., Bogdan R., Pelecudi C.:* Contribuții la clasificarea mecanismelor spațiale, Studii și Cercetări de Mecanică Aplicată, nr. 2, București, 1957.

9. *Denavit I., Hartenberg R. S.:* A kinematic notation for lower pair mechanisms based on matrices, IAM, Tom XXII, nr. 2, 1955.
10. *Dobrovolski V. V.:* Teoria mehanizmov, Maşghiz, Moscova, 1951.
11. *Freudenstein F.:* Trends in the kinematics of mechanisms, Applied Mechanics Reviews, Tom XII, nr. 9, 1959.
12. *Freudenstein F., Hain K.:* Der Stand der Getriebe-Synthese im Schrifttum des englisches Sprachgebietes, Konstruktion, Heft 11, 1958.
13. *Gheorghiu Al.:* Folosirea deplasărilor elastice în calculul cadrelor, Buletinul Societăţii Politehnice nr. 7—9 şi 10—12, Bucureşti, 1946.
14. *Gheorghiu Al.:* Semnificaţia sistemelor conjugate şi utilizarea acestora în calculul structurilor, Comunicările Academiei R.P.R., Tom VI, nr. 6, 1956.
15. *Gheorghiu Al.:* Sur les systèmes conjuguées et leurs utilisation dans la construction des lignes d'influence, Annalles des Ponts et Chaussées nr. 32, 1958.
16. *Gheorghiu Al.:* Sisteme conjugate în calculul structurilor, Editura Tehnică, Bucureşti, 1959.
17. *Gheorghiu Al.:* Statica Construcţiilor, vol. I, Editura Tehnică, Bucureşti, 1960.
18. *Gheorghiu Al.:* Sistemele conjugate, mijloc de exprimare a condiţiilor de compatibilitate în calcul structurilor, Studii şi Cercetări de Mecanică Aplicată nr. 6, Bucureşti, 1960.
19. *Gheorghiu Al., Pacoste C., Bergman M., Iordăchescu M.:* Asupra calculului cadrelor în domeniul elasto-plastic prin metoda aproximaţiilor succesive, Buletinul Institutului de Construcţii nr. 8, Bucureşti, 1961.
20. *Goodman T. P., Hain K.:* Der Stand der Getriebeanalyse im Schrifttum des englischen Sprachgebietes, Konstruktion, Tom X, nr. 11, 1958.
21. *Kislîţin S. G.:* Tenzornîi metod teorii prostransvennîh mehanizmov, Trudî seminara po teorii mehanizmov i maşin, Tom XI, vîp. 54, 1954.
22. *Kojevnikov S. N.:* Teoria mehanizmov i maşin, Maşghiz, Kiev, 1954.
23. *Kraus R. A.:* Tehnische Mechanik, vol. I, Verlag Tehnik, Berlin, 1953.
24. *Lebedev P. A.:* Opredelenie polojenii prostransvennîh mehamizmov, obrazovannîh iz dvuhopodkovîh grupp, Trudî seminara po TMM, vîp. 84, Moscova, 1961.
25. *Manafu V.:* Metoda legării mecanismelor, sesiunea ştiinţifică a Institutului agronomic, Bucureşti, 1955.
26. *Mangeron D. I., Braier A.:* Reprezentarea cîmpurilor de acceleraţii de un ordin oarecare prin numere complexe, G.M.F., nr. 10 Bucureşti, 1955.

27. *Mangeron D. I.*: Contribuții la metodele grafo-analitice ale cinematicii sistemelor materiale, Dokladî Akademii Nauk, Tom 102, nr. 5, 1955.
28. *Mangeron D. I.*: Accelerațiile reduse de orice ordin și cîteva din proprietățile lor extreme, Dokladî Akademii Nauk, Tom 112, nr. 1, 1957.
29. *Mangeron D., Drăgan C., Svijevski Vl.*: O nouă metodă de studiu interesînd teoria mecanismelor și a mașinilor, Studii și Cercetări de Mecanică Aplicată, Nr. 1, București, 1957.
30. *Mangeron D., Drăgan C.*: Studiul cinematic al mecanismelor spațiale cu patru organe prin metoda matricială-tensorială, Studii și Cercetări de Mecanică Aplicată, nr. 3, București, 1962.
31. *Manolescu N., Erceanu I., Antonescu P.*: Domeniul de aplicabilitate al metodelor de cercetare cinematică a mecanismelor plane articulate, Studii și Cercetări de Mecanică Aplicată, nr. 6, București, 1962.
32. *Mazilu P.*: Statica Construcțiilor, vol. I, Editura Tehnică, București, 1958.
33. *Moroșchin I. F.*: Osnovî analiticeskoi teorii mehanizmov, Trudî seminara TMM, Tom XIV, vîp, 54, 1948.
34. *Moroșchin I. F.*: Voprosî geometrii slojnîh kinematiceskih țepei, DAN, Tom 119, 1958.
35. *Reșetov L. N.*: Konstruirovanie ratsionalnîh mehanizmov, Trudî seminara po T.M.M., Tom XVIII, vîp, 70, 1958.
36. *Umanskii A. A.*: Prostransvennîe sistemî, Gostehizdat, Moscova, 1948.
37. *Zilberman I. S.*: Issledovanie mehanizmov metodom privedennîh uskorenii, Trudî Rostovskovo na Donu instituta injenerov jeleznodorojnovo transporta, vîp, XXIX, 1961.
38. *Zinoviev V. A.*: Prostransvennîe mehanizmov s nizșimi parami, Gostehizdat, Moscova, 1952.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC BUCUREȘTI
Tomul XXVI — 1964, Fascicola 5

CHIMIE

C.Z.: 669.763

RECUPERAREA BISMUTULUI DIN CONCENTRATE ROMINEȘTI

V. T. MĂRCULEȚIU, I. STRUGARU

Pe linia valorificării cît mai complete a materiilor prime, cît și a deșeurilor provenite din diverse fabricații s-a încercat stabilirea unei metode pentru recuperarea cît mai completă a bismutului din unele concentrate provenite din partea de nord a țării.

Concentratul analizat se prezintă sub formă pulverulentă, de culoare cenușie-neagră cu unele sclipiri argintii (datorită cristalelor de bismutină).

Analiza cantitativă a concentratului s-a efectuat după metode cunoscute, dozîndu-se gravimetric: siliciul ca bioxid de siliciu, sulful ca sulfat, fierul ca trioxid de fier, bismutul ca trioxid de bismut, iar plumbul și cuprul s-au dozat electrogravimetric.

Rezultatele determinărilor sînt menționate în tabela nr. 1.

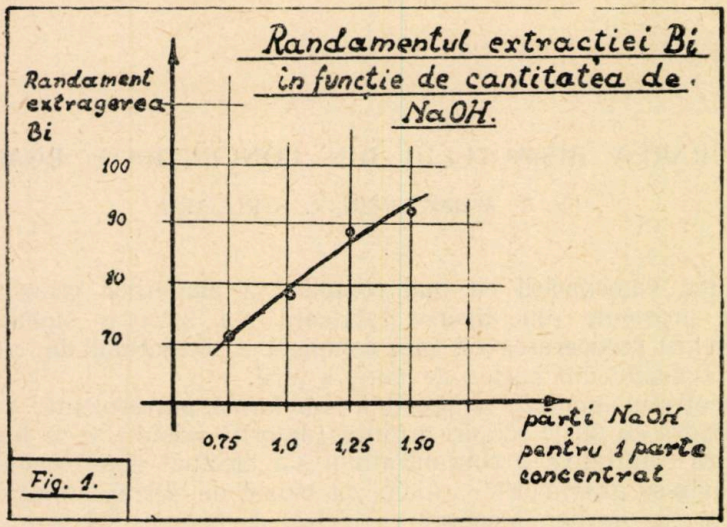
Tabela nr. 1

Nr. crt.	Componente	%	Determinări efectuate						Media	Obs.
			1	2	3	4	5	6		
1	Bioxid de siliciu	%	6,7	6,9	6,8	6,5	6,8	6,9	6,74	
2	Plumb	%	22,1	21,9	22,4	22,0	21,8	22,6	22,20	
3	Sulf	%	19,7	20,6	20,2	20,9	20,5	20,7	20,50	
4	Cupru	%	5,3	5,6	5,5	5,8	5,4	5,5	5,51	
5	Fier	%	7,3	7,8	7,5	7,6	7,5	7,8	7,56	
6	Bismut	%	31,0	31,1	30,9	31,3	31,4	31,2	31,20	
7	Alte impurități	%	7,9	6,1	6,7	6,0	6,6	7,3	6,74	

Indicațiile din literatură pentru separarea plumbului din sulfuri, folosind metoda topirii alcaline s-au aplicat și la extragerea bismutului din sulfuri sau oxizi.

Reacţiile care stau la baza procesului de extragere a bismutului prin metoda topirii alcaline sînt:

$$3Bi_2S_3 + 18NaOH = 6Bi(OH)_3 + 9Na_2S$$
$$6Bi(OH)_3 + 6NaOH = 6NaBiO_2 + 12H_2O$$
$$6NaBiO_2 + Bi_2S_3 = 8Bi + 3Na_2SO_4$$



Din reacţiile de mai sus se observă că pentru o parte în greutate bismut sînt necesare 0,575 părţi hidroxid de sodiu.

Avînd în vedere conţinutul de bismut al concentratului (cca. 31%) cît şi pentru extragerea bismutului cu un randament cît mai ridicat, s-au folosit 1,25—1,50 părţi în greutate hidroxid de sodiu pentru o parte concentrat (fig. 1).

Topirea alcalină pentru extragerea bismutului s-a efectuat la temperatura de 650—700°C. Pentru a coborî temperatura de topire s-au folosit amestecuri de hidroxid de sodiu şi hidroxid de potasiu în proporţii diferite, variind de la 1 : 1 la 4 : 1. După mai multe încercări s-a găsit că proporţia de hidroxid de sodiu faţă de hidroxid de potasiu egală cu 4 : 1 a determinat coborîrea temperaturii de topire cu cca. 150°C (fig. 2).

Pentru faptul că vîscozitatea topiturii era ridicată, ceea ce producea o slabă separare a metalului de restul masei, s-a adăugat amestecului de hidroxizi alcalini o cantitate de clorură de sodiu.

Proporţia optimă de clorură de sodiu ce trebuia adăugată a fost stabilită pe baza încercărilor, care au cuprins o gamă de proporţii de la 0,25—1,00 părţi clorură de sodiu la o parte amestec de hidroxizi.

Proporţia de 0,75 părţi clorură de sodiu la o parte amestec de hidroxizi s-a găsit a fi optimă.

Pentru o bună separare a bismutului, masa topită a fost menţinută la temperatura de 530°C timp de 40—45 minute.

In acest timp metalul topit se separă la partea de jos a creuzetului iar ganga formată din restul componentelor și a substanțelor folosite pentru topirea alcalină se ridică la suprafața creuzetului.

Prin separarea părții de la suprafața creuzetului, metalul topit a putut fi transversat în alt recipient.

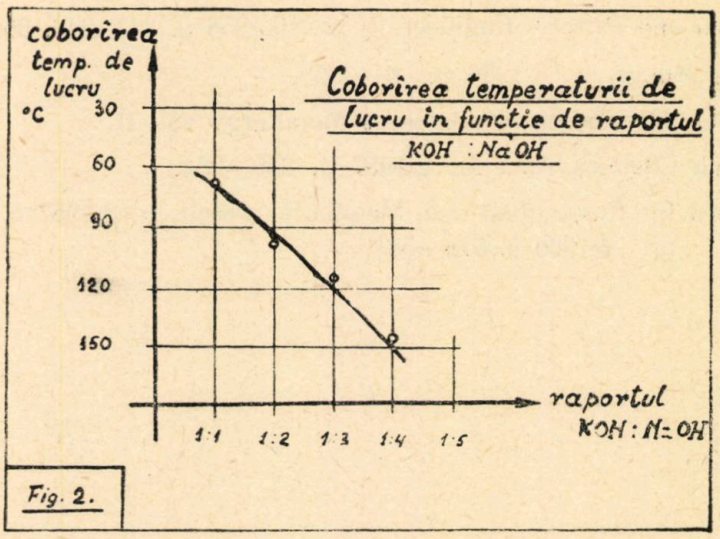


Fig. 2.

Pentru a face posibilă separarea metalului topit în cazul experimentării cu cantități mai mari de concentrat (10—50 ori față de experiențele anterioare) s-a încercat pentru separare și următoarea metodă :

S-a lăsat să se răcească creuzetul pînă la temperatura de cca.50—60°C, apoi s-a separat sgura prin antrenare mecanică cu ajutorul unui jet de apă. Această metodă se aplică cu succes cînd vîscozitatea topiturii a fost mult micșorată prin adaus de clorură de sodiu fapt care a permis evitarea includerii picăturilor de bismut în sgură.

După separare s-a obținut un aliaj de bismut și plumb extrăgîndu-se din 100 părți concentrat cca. 36,5 părți aliaj.

Analiza aliajului a arătat că plumbul era în proporție de cca. 26%.

Pentru îndepărtarea plumbului, aliajul s-a supus unei noi topiri în prezența unui amestec de hidroxid de sodiu și azotat de potasiu (1 p NaOH : 1 p KNO_3).

Proporția folosită din acest amestec (KNO_3 și NaOH) față de conținutul de plumb a fost de 0,7 părți la 1 parte aliaj.

După această purificare s-a obținut bismut, cu o puritate de 98%.

Randamentul extragerii bismutului din concentratul luat spre analiză, raportat la conținutul de bismut al acestuia este de 93,3%.

Laboratorul de chimie anorganică și analitică
Institutul politehnic București

BIBLIOGRAFIE

1. Tvetnî Metalî nr. 6/1961 p. 13—22 ; nr. 7/1961 p. 19—27.
2. The Engineering and Mining Journal nr. 11/1959 p. 94—96.
3. Chemical and Process Engineering nr. 10/1958 p. 347, 349, 352.
4. Journal Metals nr. 3/1956 p. 341—350.
5. Liddel D. Handboock of nonferous Metallurgy vol. II.
6. Analitica Chemica Acta nr. 2/1957 p. 259—263.
7. Zeitschrift für Erzbergbau und Metalhüttenwesen nr. 2/1957 p. 53—60 ; nr. 12/1960 p. 578—581.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC BUCUREŞTI
Tomul XXVI — 1964, Fascicola 5

C.Z. 615.3

CHOLINE, BIS — (β-CHLOROETHYL) — CARBAMATE, A CHOLINE DERIVATIVE RELATED TO ALKYLATING AGENTS

D. FĂRCAŞIU

Received: 1964, Sept. 30.

In order to obtain neutral, water soluble cytostatic compounds, attempts were made to obtain choline derivatives, containing various alkylating groups.

It is known, that choline itself has some inhibiting activity on the growth of sarcoma *M*-1 [1]. It was therefore expected to obtain physiologically active compounds, by coupling choline with cytostatic groups.

The groups considered were:

a) Bis-(β-chloroethyl)-carbamate;

b) Methane-sulphonate (as in Myleran[2a] or β-chloroethyl methanesulphonate[2b]);

c) Diazoacetate (as in azaserine [3]).

a) *Choline, bis (β-chloroethyl)-carbamate (IV).* This yet unknown compound was synthetized, starting from β-iodoethyl chloroformate (I) and bis (β-chloroethyl)-amine (II), following the path:

$$\underset{\text{I.}}{ClCOOCH_2CH_2J} + 2\,\underset{\text{II.}}{HN(CH_2CH_2Cl)_2} \longrightarrow \underset{\text{III.}}{(ClCH_2CH_2)_2N\text{-}COOCH_2CH_2J} + \underline{HCl}\cdot HN(CH_2CH_2Cl)_2$$

$$III + N(CH_3)_3 \longrightarrow \underset{\text{IV.}}{(ClCH_2CH_2)_2N\text{-}COO\text{-}CH_2CH_2N^{\oplus}(CH_3)_3\cdot J^{\ominus}}$$

The intermediate III (an oil which decomposes on distillation was therefore not isolated from the reaction mixture, its crude etheral solution being treated with trimethylamine.

b) *Choline methanesulfonate (VII)* was obtained from methanesulfonyl chloride (V) and choline chloride (VI) :

$$\underset{\text{V.}}{CH_3SO_2Cl} + \underset{\text{VI.}}{HOCH_2CH_2N^{\oplus}(CH_3)_3 \cdot Cl^{\ominus}} \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \underset{\text{VII.}}{CH_3SO_3CH_2CH_2N^{\oplus}(CH_3)_3 \cdot Cl^{\ominus}} + HCl.$$

While this work was in progress, a similar synthesis of this compound was published [4].

As our method differs slightly from the one [4] above mentioned and the results are also different, they will be described in the experimental part (the yield is excellent).

c) It was also attempted to obtain the *choline diazoacetate (XI)*. For this purpose, the β-chloroethyl glicinate (VIII) was prepared (as hydrochloride), by direct esterification (synthesis of this compound is mentioned in the literature [5]) :

$$H_2N\text{-}CH_2\text{-}COOH + HOCH_2CH_2Cl + HCl \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \underset{\text{VIII.}}{HCl \cdot H_2N\text{-}CH_2\text{-}COOCH_2CH_2Cl} + H_2O$$

In order to better characterize this compound, the yet unknown N-triphenylmethyl-derivative, IX, was synthetized.

$$\underset{\text{IX.}}{(C_6H_5)_3C\text{-}NH\text{-}CH_2\text{-}COO\text{-}CH_2CH_2Cl}.$$

Treatment of VIII with nitrous acid gives the diazoacetate X, as an yellow oil, which could not be purified because of its instability.

For the same reason, the diazoacetate X had to be treated with trimethylamine in the cold ; however, under these circumstances the reaction from which the expected choline derivative XI should have resulted, did not take place.

$$\underset{\text{VIII.}}{HCl \cdot H_2N\text{-}CH_2\text{-}COO\text{-}CH_2CH_2Cl} \xrightarrow{NaNO_2} \underset{\text{X.}}{N_2CH\text{-}COO\text{-}CH_2CH_2Cl}$$

$$\underset{\text{X.}}{N_2CH\text{-}COO\text{-}CH_2CH_2Cl} + N(CH_3)_3 \text{ —//→}$$

$$\text{—//→ } \underset{\text{XI.}}{N_2CH\text{-}COO\text{-}CH_2CH_2N^{\oplus}(CH_3)_3 \cdot Cl^{\ominus}}$$

Tested for physiologic activity against Jensen sarcoma in rats, IV and VII showed not antitumoral properties [6]. Methanesulphonylcholine (VII)

showed cholinergic activity, in agreement with literature data [4, 7]. However the found value of LD50 (7.5 mg/kg, intravenously) differs from the one given by the above cited authors [4] (1.9 mg/kg).

EXPERIMENTAL

Choline, bis (β-chloroethyl) carbamate (IV).

An ethereal solution (300 ml) of bis (β-chloroethyl-)amine (prepd. from 37 g. hydrochloride [8]) is added gradually (1.5 hr) into a stirred and cooled solution of 19.6 g β-iodoethyl chloroformate (obtained from $COCl_2$ and β-iodoethanol [9]) in benzene (50 ml). The mixture is stirred for 2 hours at room temperature, then the deposited bis-(β-chloroethyl-)amine hydrochloride is filtered off. The solution is washed with a cold (50 ml) solution of HCl 1N, then with 10% natrium bicarbonate (15 ml) and finally with water.

The dried over magnesium sulphate solution is treated with an excess of trimethylamine in ether. After two weeks of standing in a refrigerator, the solid IV (5.6 g, 17% relatively to $ClCOOCH_2CH_2J$) is filtered off. It was purified by dissolving in ethanol and reprecipitating with anhydrous ether, as white needles m.p. 151-2° (Found : C, 30.44 ; H, 5.50 ; Cl+J, 48.85 ; N, 6.96. $C_{10}H_{21}Cl_2JN_2O_2$ requires : C, 30.09 ; H, 5.30 ; Cl+J, 49.57 ; N, 7.02).

Methanesulphonylcholine (VII)

A mixture of dried choline chloride (3 g), methanesulphonylchloride (4.5 g, 100% excess), and benzene (10 ml), was heated under reflux (oil bath) for 8 hours ; after 0,5 hr, the choline chloride disappeared, then VII slowly precipitated. The supernatant liquid layer is discarded and the residue is washed three times with 15 ml. hot benzene ; it weighed 4.4 g (94%) and was purified by dissolving in anhydrous ethanol and reprecipitating with ether, as a white hygroscopic powder, m.p. 145-6°. Found : C, 33.15 ; H, 7.43. Calc. for $C_6H_{16}ClNO_3S$: C, 33.10 ; H, 7.41).

β-Chloroethyl glycinate. HCl (VIII)

A stream of dry hydrogen chloride is bubbled through a mixture of 10 g. glycine and 100 ml ethylene chlorohydrine at 100° (oil bath). After the glycine has been dissolved (1.5 hr), bubbling of hydrogen chloride and heating are continued for an additional 1.5 hr.

The excess of chlorohydrine (75 ml) is distilled in vacuum on a water bath until crystals appear. After cooling, the β-chloroethyl glycinate hydrochloride (VIII) (21 g, 90.8%) is filtered off and washed with ether. Recrystallization from HCl containing isopropylalcohol gives white crystals, m.p. 155-6°. (Found : C, 27.94 ; H, 5.31 ; Cl 40.94. Calc. for $C_4H_9Cl_2NO_2$; C, 27.60 ; H, 5.21 ; Cl, 40.74).

The N-triphenylmethyl-derivative (IX) of VIII, is obtained in the usual manner [10]. Yield 97%, m.p. 116.5° (from isopropylalcohol). (Found: C, 72.66; H, 5.81; Cl, 8.56; N, 3.72. $C_{23}H_{22}ClNO_2$ requires: C, 72.72; H, 5.84; Cl, 9.13; N, 3.68).

β-Chloroethyldiazoacetate (X). The procedure described [11] for preparing ethyl diazoacetate was employed. The yellow oil obtained decomposed slowly on standing.

By treating it at temperature under 5° with ethereal trimethylamine, no solid product was obtained.

Acknowledgement: The support of Prof. E. Ciorănescu is gratefully acknowledged.

Laboratory of Organic Chemistry
Polytechnical Institute Bucharest

REFERENCES

1. *A. Malachovskis:* Tr. Inst. Onkol. Lit. SSR, *2*, 43 (1961). Chem. Abstr. *59*, 15786 g (1963).
2. *A. Haddow, and G. M. Timmis:* a) Lancet, *264*, 1, (1953) b) Nature, *177*, 995 (1956).
3. *S. A. Fusari, T. H. Haskell, R. P. Frohardt and O. R. Bartz: J. Amer.* Chem. Soc., *76*, 2881 (1954).
4. *E. T. Eckhardt, and F. W. Schueller:* J. Pharmacol. Exptl. Therap., *141*, 343 (1963).
5. *A. F Richter, and Jiri Duchon:* Casopis lékarskou ceskych, *100*, 425 (1961).
6. The biologic activities were tested in the Oncological Institute, Bucharest. We wish to thank for this assistance.
7. a) *A. Heusner and H. Wick:* Z. physiol. Chem., *320*, 246 (1960)
   b) *S. Ginsburg:* J. Med. Pharm. Chem., *5*, 1364 (1962)
   c) *R. Kitz and I. B. Wilson:* J. Biol. Chem., *237*, 3245 (1962)
8. *A. F. Childs, L. J. Goldsworthy, G. F. Harding, F. E. King, A. W. Nineham, W. L. Norris, S. G. P. Plant, B. Selton, and A. L. L. Tompsett:* J. Chem. Soc., *1948*, 2174.
9. *S. Kuroda:* J. Pharm. Soc. Japan, *539*, 44 (1927); Chem. Abstr., *22*, 4469 (1928).
10. *L. Zervas, and D. M. Theodoropoulos,* J. Amer. Chem. Soc., *78*, 1359 (1956).
11. *E. S. Wormack, and A. B. Nelson:* Org. Synth., Coll. Vol. *3*, 392.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC BUCUREȘTI
Tomul XXVI — 1964, Fascicola 5

MECANICA FLUIDELOR

C.Z.: 621.224

MIȘCĂRI POTENȚIALE AXIAL-SIMETRICE ÎN JURUL CARENELOR DESCHISE, APLICATE LA STUDIUL TEORETIC AL TURBO-MAȘINILOR *)

DAN TAȘCĂ

Introducere

În mișcarea potențială axial-simetrică, metoda surselor (pozitive, negative sau dipoli) asociate cu un curent exterior de translație uniformă a condus la determinarea unor carene, pe care le clasificăm în două clase:

— carene închise, cum este solidul lui Rankine [1], sfera [2], carenele Rankine-Fuhrmann [3], cu dezvoltările lui Kármán-Klemperer [4] etc., la care suma algebrică a debitelor surselor din interiorul carenelor trebuie să fie nulă, ceea ce condiționează închiderea carenei în mișcare permanentă;

— carene deschise, cum este semicorpul, obținut prin asocierea unei surse unice punctiforme sau liniforme, cu un curent exterior de translație uniformă, problemă aprofundată de Prandtl [5] cu ocazia perfecționării tubului Pitot, singura carenă deschisă cunoscută pînă acum.

Întrucît cercetarea carenelor deschise oferă perspectiva aplicării rezultatelor la studiul teoretic al turbo-mașinilor, am considerat utile dezvoltările redate mai jos.

Metoda pe care o propunem constă în alegerea unui sistem de surse (punctiforme și liniforme) cu debite totale pozitive sau negative ($\neq 0$) la care se pot adăuga și multipoli, sistem plasat într-un curent exterior. Alegerea surselor și a curentului exterior trebuie să conducă la o formă de carenă deschisă asemănătoare organelor principale ale turbo-mașinilor. Curentul exterior poate fi de orice formă, nu numai translația uniformă și se pot considera și mișcări cu circulație, dar tubul de vîrtej trebuie să fie axial, pentru a se menține proprietatea mișcărilor axial-simetrice de a se reproduce identic în toate planele meridiane.

---

*) Lucrare comunicată în sesiunea științifică a cadrelor didactice din Institutul politehnic București, 7—8 aprilie 1962.

Potențialul vitezelor corespunzător mișcării în jurul unei carene deschise are forma generală :

$$\varphi(z,r) = \varphi_0(z,r) \mp \sum_1^l \frac{\dot{V}_i}{4\pi(R-z_i)} \mp \frac{1}{4\pi} \sum_1^m \int_{\zeta_i}^{\zeta_f} \frac{\dot{V}_{sj}(\zeta)}{R} d\zeta + \sum_1^n \frac{M_k z}{4\pi(R-z_k)^3} \tag{1}$$

în care $\varphi_0(z, r)$ este potențialul vitezelor corespunzător curentului exterior, $\dot{V}_i$ — debitul volumic al unei surse punctiforme plasate pe axa Oz la abscisa z_i (semnul minus corespunde unui izvor, iar semnul plus, unui puț), $\dot{V}_{sj}$ — debitul specific în raport cu lungimea al unei surse liniforme plasate pe axa Oz între abscisele ζ_i și ζ_f (cu aceeași interpretare a semnelor minus și plus), M_k — momentul unui multipol, plasat pe axa Oz la abscisa z_k ; semnul plus indică orientarea corectă a multipolului, astfel ca pentru $\frac{\partial \varphi}{\partial z} > 0$, să se obțină pe axa Oz un punct de stagnare ($v_z = 0$).

Poziția unui punct oarecare (curent) din planul meridian (fig. 1) este precizată fie prin coordonatele carteziene z și r (coordonate cilindrice în spațiu), fie prin cele polare R și θ (coordonate sferice).

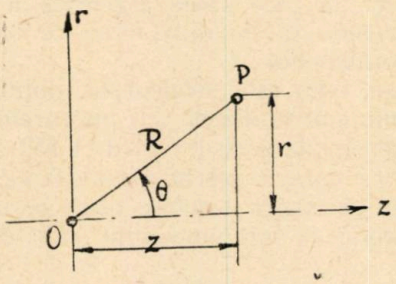


Fig. 1. Sistemul de referință

Dacă debitul total (suma algebrică a debitelor tuturor surselor) se anulează

$$\dot{V}_t = \mp \sum_1^l \dot{V}_i \mp \sum_1^m \int_{\zeta_i}^{\zeta_s} \frac{\dot{V}_{sj}(\zeta)}{R} d\zeta = 0 \tag{2}$$

o anumită linie de curent din planul meridian este o curbă închisă. Ea poate fi considerată frontieră iar suprafața de revoluție corespunzătoare este carena (închisă).

Dacă $\dot{V}_t \neq 0$, frontiera este o curbă unică deschisă, iar carena corespunzătoare este şi ea o suprafaţă deschisă. Pentru ca forma carenei să nu se schimbe cu timpul (mişcarea să fie permanentă), este necesar ca debitul total al surselor să fie compensat de un debit datorit curentului exterior; este condiţia de continuitate în mişcare permanentă. În cele ce

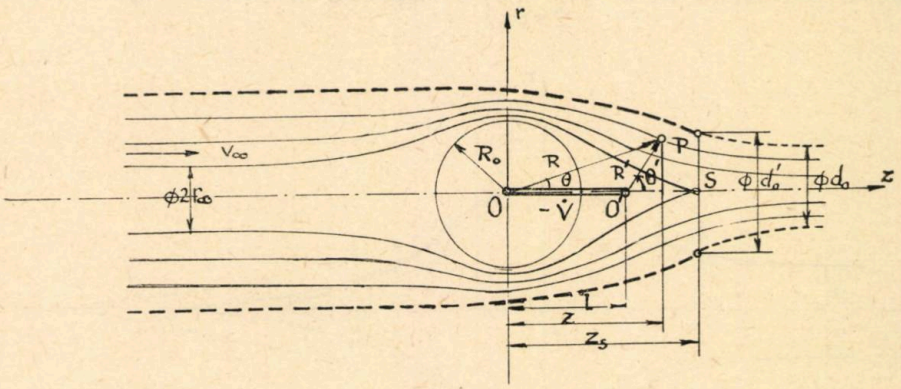


Fig. 2. Sferă, sursă liniformă şi curent de translaţie uniformă

urmează, dăm câteva exemple de mişcări în jurul unor carene deschise, care au aplicaţii la studiul unor turbo-maşini.

Exemplul nr. 1. Sferă modificată prin prezenţa unei surse liniforme. Fie mişcarea cunoscută de translaţie în jurul unei sfere de rază R_0 cu centrul în origine, viteza curentului exterior v_∞ fiind orientată spre dreapta (fig. 2). Această mişcare se modifică dacă adăugăm o sursă liniformă de debit $-\dot{V}$ repartizată uniform pe lungimea $OO' = l$. Potenţialul vitezelor este

$$\varphi = v_\infty \left(1 + \frac{1}{2}\frac{R_0^3}{R^3}\right) R \cos\theta + \frac{\dot{V}}{4\pi l} \ln \frac{R + R' + l}{R + R' - l}$$

iar funcţia de curent este

$$\psi = \frac{1}{2} v_\infty r^2 \left(1 - \frac{R_0^3}{R^3}\right) + \frac{\dot{V}}{4\pi l} (R - R' + l)$$

în care punctul curent P are coordonatele carteziene z şi r, sau coordonatele bipolare R, θ şi R', θ'.

Ecuația $\psi = 0$ a frontierei se scrie

$$R^2 \sin^2\theta \left(\frac{R_0^3}{R^3} - 1\right) = \frac{\dot{V}}{2\pi l v_\infty} (R - R' + l).$$

Pentru reprezentarea ei grafică, se aleg de la început valori convenabile pentru constantele R_0, $k' = \dfrac{\dot{V}}{2\pi v_\infty}$ și l, apoi se calculează unghiul θ pentru

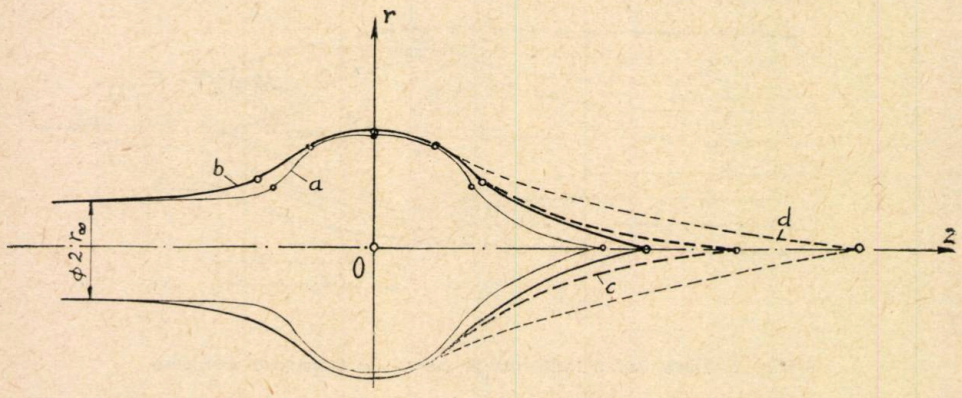


Fig. 3 a, b, c, d Forme de carenă (ex. nr. 1) obținute prin calcule numerice preliminare

diferite valori date razelor bipolare R și R', între care există relațiile evidente $R \sin\theta = R' \sin\theta'$ și $R'^2 = R^2 + l^2 - 2lR\cos\theta$.

Pentru precizarea ordinelor de mărime a constantelor, am efectuat calcule numerice preliminare [2]) cu valorile

$$R_0 = 0{,}5 \; ; \quad k' = \frac{\dot{V}}{2\pi v_\infty} = 0{,}01 \text{ și } l = 1 \ldots 1{,}2 \ldots 1{,}5 \ldots 2$$

Astfel s-au obținut curbele din fig. 3 a, b, c, d, care arată că forma acestei carene deschise o redă pe aceea a unui ac de injector pentru turbine hidraulice Pelton sau Turgot, ori pentru hidro-monitoare.

Abscisa z_s a punctului de stagnare S de pe axa Oz se determină scriind $v_{z0} = 0$, în care v_{z0} este viteza v_z pentru $r = 0$.

Pentru determinarea expresiei sale, considerăm funcția de curent scrisă sub forma $\psi = \psi_1 + \psi_2$.

Componenta axială a vitezei este

$$v_z = \frac{\partial \varphi}{\partial z} = \frac{1}{r}\frac{\partial \psi}{\partial r} = \frac{1}{r}\left(\frac{\partial \psi_1}{\partial r} + \frac{\partial \psi_2}{\partial r}\right)$$

[2]) La calculele preliminare am avut un prețios ajutor în colaborarea tov. ing. Teodor Demetrescu.

în care

$$\psi_1 = \frac{v_\infty r^2}{2}\left(1 - \frac{R_0^3}{R^3}\right)$$

iar

$$\psi_2 = \frac{\dot{V}}{4\pi l}(R - R' + l).$$

Prin derivare se obține

$$\frac{\partial \psi_1}{\partial r} = v_\infty r - R_0^3 \frac{v_\infty}{2} \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\sin^2\theta}{R}\right)$$

în care

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\sin^2\theta}{R}\right) = \frac{\partial}{\partial R}\left(\frac{\sin^2\theta}{R}\right)\frac{\partial R}{\partial r} = \frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{\sin^2\theta}{R}\right)\frac{\partial \theta}{\partial r}.$$

Rezultă astfel

$$\frac{\partial \psi_1}{\partial r} = v_\infty\left[r + R_0^3 \frac{r}{2R^3}(1 - 3\cos^2\theta)\right]$$

iar

$$\frac{\partial \psi_2}{\partial r} = \frac{\dot{V} r}{4\pi l}\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R'}\right).$$

De aici deducem

$$v_z = v_\infty\left[1 + \frac{R_0^3}{2R^3}(1 - 3\cos^2\theta)\right] + \frac{\dot{V}}{4\pi l}\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R'}\right).$$

Componenta v_{z0} situată pe axa Oz se obține făcînd $r = 0$ în expresia vitezei v_z, adică $R = z$, $R' = z - l$, $\cos\theta = \pm 1$ și rezultă

$$v_{z0} = v_\infty\left(1 - \frac{R_0^3}{z^3}\right) + \frac{\dot{V}}{2\pi l}\left(\frac{1}{z} - \frac{1}{z - l}\right).$$

Scriind $v_{z0} = 0$, se obține z_s din ecuația

$$z_s^4 - l z_s^3 - \frac{\dot{V}}{2\pi v_\infty} z_s^2 - R_0^3 z_s + R_0^3 l = 0$$

care se soluționează fie căutînd rădăcinile rezolvantei cubice cu formulele lui Tartaglia-Cardano și deducînd apoi rădăcinile ecuației de gradul al patrulea, fie mai simplu, prin metoda grafică sau prin încercări numerice, în cazuri concrete.

Raza r_∞ a tijei se calculează foarte ușor scriind condiția de continuitate

$$v_\infty \pi r_\infty^2 = \dot{V},$$

de unde

$$r_\infty = \sqrt{\frac{\dot{V}}{\pi v_\infty}}.$$

Metoda propusă se pretează studiului teoretic al întregului injector, inclusiv ajutajul; în adevăr, considerînd două linii de curent C și C' simetrice (fig. 2) de ecuație $\psi = K$, valoarea constantei K se determină scriind $z = z_s$ și $r = \frac{d_0}{2}$ în expresia funcției de curent ψ. (În practică se adoptă $d_0' = 1{,}25\ d_0$ în care d_0 este diametrul jetului de apă).

Cunoașterea funcțiilor φ și ψ prezintă o importanță practică deosebită pentru a calcula debitul injectorului $\dot{V}_{inj} = 2\pi K$ (extrem de simplu) și forțele de presiune pe ac și pe ajutaj. În acest scop, se exprimă viteza rezultantă $v = \sqrt{v_z^2 + v_r^2} = \sqrt{v_R^2 + v_\theta^2}$ în funcție de coordonatele carteziene z, r sau polare R, θ, apoi se particularizează pentru $\psi = 0$, obținîndu-se $v_{ac} = f(z, r) = F(R, \theta)$ și cu ajutorul ei se determină distribuția presiunii pe ac, cu formula lui Lagrange-Bernoulli

$$p_{ac} = p_\infty + \frac{\varrho}{2} v_\infty^2 \left(1 - \frac{v_{ac}^2}{v_\infty^2}\right).$$

În fine, se obține prin integrare forța de presiune

$$\bar{F}_{p_{ac}} = \int_A \bar{n}\, p_{ac}\, dA.$$

Aceste calcule se pot simplifica mult, observînd că forța rezultantă are direcția axială.

În mod analog, se impun vitezei condițiile care rezultă din ecuația $\psi = K$, rezultă viteza v_{aj}, apoi p_{aj} și forța de presiune

$$\bar{F}_{p_{aj}} = \int_A \bar{n}\, p_{aj}\, dA$$

care și ea are direcția axială.

După ce fluidul părăsește ajutajul, jetul este limitat de o frontieră fluidă (suprafață liberă), cu alte condiții la limită. Studiul acestui jet, cum și al pozițiilor relative ale acului față de ajutaj (necesare reglajului de debit) formează obiectul unei lucrări ulterioare.

Exemplul nr. 2. Forma carenei deschise din exemplul nr. 1, sugerează adaptarea ei ca butuc de turbo-pompă mixtă (diagonală). În acest caz,

sursa liniformă are debitul $+\dot{V}$ și este plasată pe semi-axa Oz negativă (fig. 4). Astfel, potențialul vitezelor va avea expresia:

$$\varphi = v_\infty \left(1 + \frac{1}{2}\frac{R_0^3}{R^3}\right) z + \frac{\dot{V}}{4\pi l} \ln \frac{R + R' - l}{R + R' + l}$$

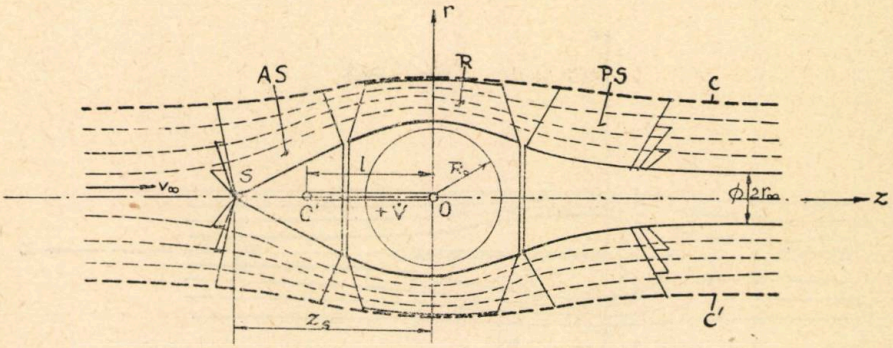


Fig. 4. Aplicarea formei de carenă deschisă din exemplul nr. 2 ca butuc de pompă diagonală

iar funcția de curent devine

$$\psi = \frac{v_\infty}{2} r^2 \left(1 - \frac{R_0^3}{R^3}\right) + \frac{\dot{V}}{4\pi l} (R - R' - l).$$

Calculele sînt analoge celor din exemplul precedent (se schimbă semnul lui $\dot{V}$ și l).

Pentru aplicațiile practice, este de observat că rezultă pentru $\psi = K$ și ecuația carcasei statorice, reprezentate în fig. 4 prin curbele C și C'.

Exemplul nr. 3. Curent de translație uniformă cu o sursă punctiformă și una liniformă. Acest caz este cunoscut [6] sub forma unei carene închise; în cele ce urmează ne vom referi la condițiile obținerii unei carene deschise și la aplicarea ei în studiul teoretic al turbo-mașinilor axiale.

Fie o sursă punctiformă de debit $\dot{V}_1$ plasată în origine, o sursă liniformă de debit $-\dot{V}_2$ cu repartiție uniformă pe lungimea $l = 00'$ și un curent de translație uniformă cu viteza v_∞ de la stînga spre dreapta (fig. 5). Pentru a obține o carenă deschisă, impunem condiția $\dot{V}_1 > |\dot{V}_2|$.

Potențialul vitezelor este

$$\varphi = v_\infty z - \frac{\dot{V}_1}{4\pi R} + \frac{\dot{V}_2}{4\pi l} \ln \frac{R + R' + l}{R + R' - l}$$

iar funcția de curent corespunzătoare are expresia

$$\psi = \frac{v_\infty}{2} r^2 - \frac{\dot{V}_1}{4\pi} \cos\theta - \frac{\dot{V}_2}{4\pi l} (R' - R).$$

Ecuația frontierei se obține scriind $\psi = 0$.
Alegînd de la început valori convenabile pentru constantele

$$K_1 = \frac{\dot{V}_1}{2\pi v_\infty} \quad \text{și} \quad K_2 = \frac{\dot{V}_2}{2\pi l v_\infty}, \quad \text{cu } r = R\sin\theta.$$

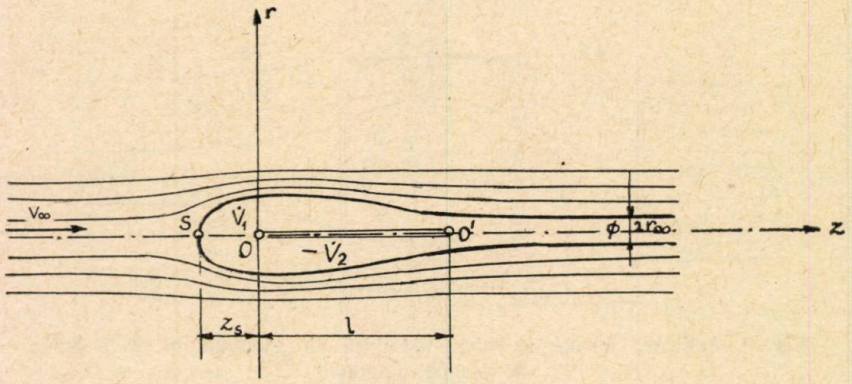


Fig. 5. Sursă punctiformă, sursă liniformă și curent de translație uniformă (ex. nr. 3)

ecuația frontierei se scrie în coordonate bipolare sub forma

$$R^2 \sin^2\theta = K_1 \cos\theta + K_2 (R' - R).$$

Pentru a scrie aceeași ecuație numai în coordonate polare, observăm că

$$R' = \sqrt{R^2 + l^2 - 2lR\cos\theta}$$

și rezultă ecuația

$$[R^2(1 - \cos^2\theta) - K_1\cos\theta + K_2 R]^2 = R^2 + l^2 - 2lR\cos\theta$$

a cărei curbă reprezentativă se trasează apoi prin puncte.

Raza r_∞ a tijei se calculează din condiția de continuitate

$$\dot{V}_1 - |\dot{V}_2| = \pi r_\infty^2 v_\infty \quad \text{și are expresia} \quad r_\infty = \sqrt{2(K_1 - lK_2)}.$$

Poziția punctului de stagnare (bordul de atac) se obține scriind $v_{z0} = 0$, care se deduce din componenta axială a vitezei

$$v_z = v_\infty + \frac{\dot{V}_1}{4\pi}\frac{\cos\theta}{R^2} - \frac{\dot{V}_2}{4\pi l}\left(\frac{1}{R'} - \frac{1}{R}\right)$$

făcînd $r = 0$, $R = z$, $\cos\theta = 1$, $R' = z - l$. Avem astfel

$$v_{z0} = v_\infty + \frac{\dot{V}_1}{4\pi z^2} - \frac{\dot{V}_2}{4\pi l}\left(\frac{1}{z-l} - \frac{1}{z}\right).$$

Din condiţiile $v_{z0} = 0$ pentru $z = z_s$, rezultă ecuaţia

$$z_s^3 - l z_s^2 + (K_1 - l K_2) z_s - K_1 l = 0$$

care se rezolvă mai uşor prin încercări numerice în cazuri concrete.

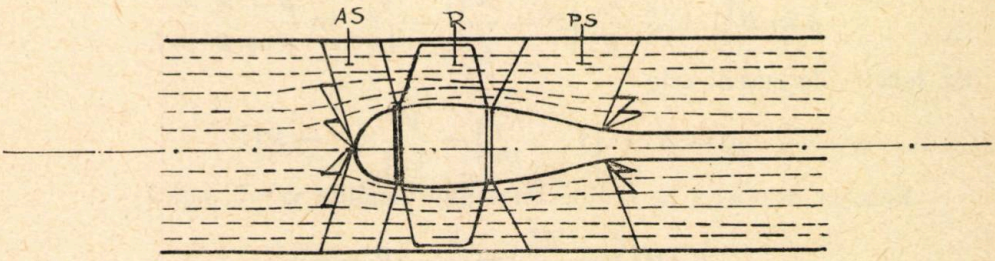


Fig. 6. Carenă deschisă din exemplul nr. 3 ca butuc de turbo-maşină axială

Carena obţinută este foarte asemănătoare cu forma butucurilor succesive ale unei turbo-maşini axiale de lucru (fig. 6) de exemplu: pompă, ventilator, turbo-suflantă, turbo-compresor.

Alegînd două linii de curent simetrice C şi C' de ecuaţie $= K$, se determină ecuaţia carcasei statorice, impunîndu-se condiţiile tehnice de proiectare:

$$r = r_s\,, \quad \cos\theta = \cos\theta_s = \frac{z_s}{R_s}\,,$$

$$R' = R'_s = \sqrt{(z_s - l)^2 + r_s^2}\,, \quad R = R_s = \sqrt{z_s^2 + r_s^2}\,, \quad r_s = \frac{d_0}{2}\,.$$

Debitul maşinii are expresia $\dot{V} = \frac{\pi d_0^2}{4} v_0$, iar viteza v_0 se alege. Valoarea abscisei z_s corespunde punctului de stagnare.

Se determină astfel valoarea constantei K cu relaţia

$$K = \frac{v_\infty}{2} r_s^2 - \frac{\dot{V}_1}{4\pi} \frac{z_s}{R_s} - \frac{\dot{V}_2}{4\pi l} (R'_s - R_s)\,.$$

Debitul maşinii se poate calcula mai precis cu formula

$$\dot{V} = 2\pi K = \pi v_\infty r_s^2 - \frac{\dot{V}_1}{2R_s} z_s - \frac{\dot{V}_2}{2l} (R'_s - R_s)\,.$$

În fine, procedînd ca în exemplul nr. 1, se poate calcula presiunea pe butuc p_b, de unde se deduce forţa de presiune $\bar{F}_{pb} = \int_A \bar{n} p_b \, dA$ necesară pentru determinarea împingerii axiale a rotorului şi în mod analog se poate determina forţa de presiune pe carcasa statorică, necesară pentru calculele de dimensionare constructivă.

Exemplul nr. 4. Mişcarea în jurul unei emisfere de rază R_0 cu centrul în origine, modificată prin suprapunerea unei surse liniforme de debit $\dot{V}_l$, repartizat uniform pe lungimea $l = 00'$ (fig. 7).

Potenţialul vitezelor are expresia

$$\varphi = B\left[1 + \frac{2}{3}\frac{R_0^5}{R^5}\left(z^2 - \frac{r^2}{2}\right)\right] - \frac{\dot{V}_l}{4\pi l}\ln\frac{R + R' + l}{R + R' - l}$$

iar funcţia de curent este

$$\psi = B z r^2\left(1 - \frac{R_0^5}{R^5}\right) + \frac{\dot{V}_l}{4\pi l}(R' - R).$$

Ecuaţia frontierei se obţine impunînd condiţia $\psi = 0$, adică

$$B z r^2\left(1 - \frac{R_0^5}{R^5}\right) = \frac{\dot{V}_l}{4\pi l}(R - R').$$

Utilizînd relaţiile evidente $r = R \sin\theta = R' \sin\theta'$, $z = R\cos\theta$, $R'^2 = R^2 + l^2 - 2Rl\cos\theta$, se obţine ecuaţia frontierei scrisă numai în coordonate polare:

$$R^3\cos\theta(1 - \cos^2\theta)\left(1 - \frac{R_0^5}{R^5}\right) = \frac{\dot{V}_l}{4\pi l B}\left(\sqrt{R^2 + l^2 - 2lR\cos\theta} - R\right).$$

Se observă că primul membru se anulează:

— pentru $\theta = 0$, deci $\cos\theta = 1$; din anularea membrului al doilea se obţine $R = \frac{l}{2}$;

— pentru $\theta = \frac{\pi}{2}$, $\cos\theta = 0$; din anularea membrului al doilea, rezultă că pentru $l \neq 0$, $R \to \infty$, deci frontiera admite ca asimptotă axa Or.

— pentru $R = R_0$; din anularea membrului al doilea ar rezulta

$$\cos\theta_0 = \frac{l}{2R_0} \quad \text{sau} \quad z_0 = \frac{l}{2}$$

care reprezintă abscisa punctelor de intersecţie a frontierei cu semicercul (emisfera). Din motive de ordin constructiv, pentru a obţine o carenă utilizabilă în practică, preferăm să se evite intersectarea cu semi-cercul, deci impunem condiţia $l > 2R_0$.

Pentru trasarea prin puncte a frontierei, se atribuie valori convenabile constantelor R_0, $\frac{\dot{V}_l}{4\pi l B}$ şi l; în acest scop am efectuat calcule numerice preliminare[3]) cu valorile următoare

$$R_0 = 1, \quad K = \frac{\dot{V}_l}{4\pi l B} = 1/5 \ldots 1/2 \ldots 1 \ldots 2 \quad \text{şi} \quad l = 6.$$

[3]) La calculele preliminare am avut un preţios ajutor în colaborarea tov. ing. Adriana Năstase-Ghia.

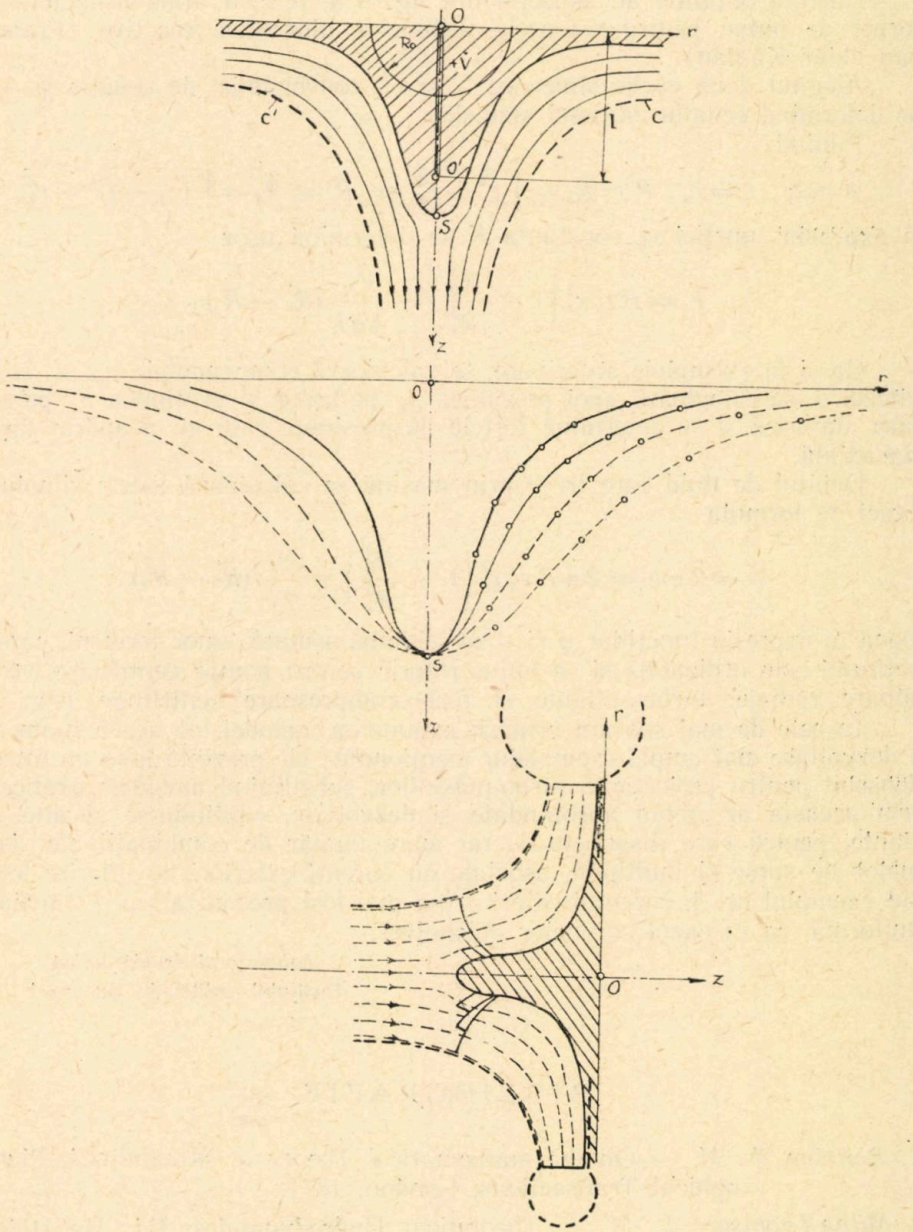


Fig. 7. Emisferă și sursă liniformă (ex. nr. 4)

Fig. 8. Forme de carenă (ex. nr. 4) obținute prin calcule numerice preliminare

Fig. 9. Carenă deschisă din exemplul nr. 4 (variantă) ca butuc de pompă centrifugă

Curbele obținute au aspectul din fig. 8 a, b, c, d, fiind utilizabile ca forme de butuc pentru rotoarele turbinelor hidraulice reactive (Francis, sau chiar Kaplan).

Alegînd două curbe simetrice C și C' convenabile, de ecuație $\psi = K$, se determină ecuația carcasei statorice.

Punînd

$$z = z_s,\ r = r_s,\ R = R_s = \sqrt{z_s^2 + r_s^2} \text{ și } R' = R'_s = \sqrt{(z_s - l)^2 + r_s^2}$$

în expresia funcției ψ, constanta K se determină ușor

$$K = B z_s r_s^2 \left(1 - \frac{R_0^5}{R_s^5}\right) - \frac{\dot{V}_l}{4\pi l}(R'_s - R_s).$$

Ca și la exemplele anterioare, se calculează componentele v_R și v_θ ale vitezei v, se calculează apoi presiunea p_b pe butuc și presiunea p_c pe carcasa statorică și se determină forțele de presiune, care au neapărat direcția axială.

Debitul de fluid care trece prin mașină se calculează foarte simplu și exact cu formula

$$\dot{V} = 2\pi K = 2\pi B z_s r_s^2 \left(1 - \frac{R_0^5}{R_s^5}\right) + \frac{\dot{V}_l}{2l}(R'_s - R_s).$$

Dacă în expresia funcțiilor φ și ψ se schimbă semnele unor termeni, carena obținută este utilizabilă și ca butuc rotoric pentru pompe centrifuge, ventilatoare radiale, turbo-suflante și turbo-compresoare centrifuge (fig. 9).

În cele de mai sus am urmărit expunerea metodei, de aceea n-am dat o dezvoltare mai amplă exemplelor menționate; ele prezintă însă un interes deosebit pentru proiectarea turbo-mașinilor, substituind metodele grafice și prin aceasta ar trebui aprofundate și dezvoltate, căutîndu-se și alte variante, pentru care dispunem de un mare număr de combinații ale sistemelor de surse și multipoli, asociate cu curenți exteriori de diferite feluri (în exemplul nr. 4, curentul exterior n-a mai fost preconizat ca o translație uniformă, ca în cazul carenelor obișnuite).

Laboratorul de hidraulică
Institutul politehnic București

BIBLIOGRAFIE

1. *Rankine W. M.* — On the mathematical Theory of Streamlines, Phylosophical Transactions, London, 1871.
2. *Milne-Thomson, L. M.* — Theoretical Hydrodynamics, Ed. MacMillan, London, 1949, p. 411.
3. *Fuhrmann, G.* — Theoretische und experimentelle Untersuchungen an Ballonmodellen, Dissertation Göttingen, Jahrbuch der Motorluftschiffahrt, Studiengesellschaft nr. 12, Berlin, 1911, p. 65.

4. *Kármàan, Th.* — Berechnung der Druckverteilung an Luftschiffkörpern. Abhandlungen aus dem Aerodynamischen Institut an der Technischen Hochschule Aachen, Heft 6, Berlin, 1927, p. 3—17 şi N.A.C.A. Technical Memorandum nr. 574.

Klemperer, W. — Windkanalversuchen an einem Zeppelin-Luftschiff Modell. Abhandlungen aus dem Aerodynamischen Institut an der Technischen Hochschule Aachen, Heft 12, Berlin, 1932.

5. *Prandtl, L.* — Ergebnisse der Aerodynamischen Versuchsanstallt zu Göttingen, II Lieferung, 1923.

6. *Milne-Thomson, L. M.* — ibidem p. 408—409.
Carafoli, E. şi *Oroveanu, T.* — Mecanica Fluidelor, vol. I (1952), Ed. Academiei R.P.R., p. 173—176.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC BUCUREŞTI
Tomul XXVI — 1964, Fascicola 5

TERMOTEHNICA

FORSCHUNGSMITTEILUNGEN DES LEHRSTUHLES „TERMOTEHNICA ŞI MAŞINI TERMICE"

ANMERKUNG DER REDAKTION DES „BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC BUCUREŞTI"

Unter obigem unterstrichenen Titel beginnen wir eine Reihe von Arbeiten des genannten Lehrstuhls zu veröffentlichen, die dahin streben, in Anlehnung an die kinetische Gastheorie, eine Thermodynamik der irreversiblen Prozesse in den thermischen Maschinen zu schaffen, aus der die klassische Gleichgewichtsthermodynamik (also die Theorie der reversiblen Prozesse) als Spezialfall hergeleitet werden kann, und die gleichzeitig der Technik brauchbare Berechnungsformel zur Verfügung stellen soll.

Die Redaktion

C.Z.: 621.1.016

I

DER ERSTE GRUNDSATZ DER THERMODYNAMIK FÜR TECHNISCHE PROZESSE WELCHE MIT ENDLICHER GESCHWINDIGKEIT UND OHNE STRÖMUNG VERLAUFEN

L. STOICESCU, S. PETRESCU

1. Einleitung

Die Prozesse in den thermischen Maschinen werden, unter Verwendung von Verfahren, die auf klassischen theoretischen Grundlagen beruhen (s. die Thermodynamik der umkehrbaren Prozesse), von der technischen Thermodynamik untersucht. Dabei wird unter anderen vorausgesetzt, dass die untersuchten Prozesse mit unendlich kleiner Geschwindigkeit vor sich gehen, und also umkehrbar sind.

In Wirklichkeit verlaufen die Prozesse in den thermischen Maschinen ausnahmslos mit einer gewissen endlichen Geschwindigkeit, welche haupt-

sächlich von der Tourenzahl abhängt. Der Entwicklung der Technik entsprechend, ist die Tourenzahl im Ansteigen begriffen. Dieser Umstand zieht eine fortwährende Erhöhung der Geschwindigkeit der beweglichen mit dem Arbeitsmedium (Gas, Damf) im Kontakt stehenden Maschinenteile (Kolben, Turbinenschaufel) nach sich. Damit fällt auch die Geschwindigkeit des thermischen Prozesses immer grösser aus, da sie von der Kolbengeschwindigkeit bestimmt wird. (Dies ist der Fall mit der Ausdehnung und Verdichtung in den Kolbenmaschinen). Da aber der Umkehrbarkeit eine unendlich kleine Kolbengeschwindigkeit zu grunde gelegt wird, liegt es nahe, dass, je grössere Geschwindigkeiten für die beweglichen Maschinenteile angenommen werden, die mathematischen Beziehungen, die in der klassischen Thermodynamik den ersten Grundsatz ausdrücken und jene, die sich darauf stützen, unbrauchbar werden können.

In der Folge, wollen wir untersuchen inwieweit die endliche Geschwindigkeit des Verlaufes qualitativ und quantitativ die thermischen strömungslosen Prozesse beeinflussen. Wir wollen also neue Gleichungen und Berechnungsformeln der grundsätzlichen thermodynamischen Prozesse finden, die, im Gegensatz zu den klassischen, der endlichen Entwicklungsgeschwindigkeit Rechnung tragen.

Die genannten Prozesse sind die Isochore, die Isobare, die Isotherme, die Adiabate, die Polytrope.

Da in der Zustandsänderung, bei gleichbleibendem Volumen (Isochore), keine beweglichen Maschinenteile vorkommen, wird ihr Verlauf auf Grund von Betrachtungen untersucht, welche der Wärmeübertragungslehre oder der chemischen Thermodynamik angehören (z. B. die Verbrennung bei gleichbleibendem Volumen). Die Gleichung der Isochore ergibt sich aus dem allgemeinen Zustandsgesetz der Gase, unter der Bedingung $v = \text{const.}$

Befindet sich das Gas, im Anfangs-und Endzustand, im Gleichgewicht, so ist die Gleichung des Prozesses, unabhängig von seiner Entwicklungsgechwindigkeit,

$$\frac{T_1}{T_2} = \frac{p_1}{p_2} .$$

Die Wärmezu — oder — abfuhr ergibt sich aus

$$Q_{12} = U_2 - U_1$$

In den übrigen Prozessen, soweit sie ohne Strömung verlaufen, tritt, unter Vermittlung eines beweglichen mit dem Gas im Kontakt bleibendem Maschinenteil, äussere Arbeit auf. Dabei hängt die Entwicklungsgeschwindigkeit des Prozesses entweder von der von aussen auferlegten Geschwindigkeit des Maschinenteiles ab (Kolben, Turbinenschaufel) oder wird sie von der Interaktion Gas beweglicher Kolben allein bestimmt, venn sich die Zustandsänderung des Gases frei entwickelt.

In beiden Fällen spielt die mechanische Interaktion Gas beweglicher Kolben, bei der Bestimmung der Entwicklungsgeschwindigkeit des Prozesses, eine wichtige Rolle.

Die äussere Arbeit, die eben das Mass dieser Interaktion ist, wird wahrscheinlich von der Geschwindigkeit des beweglichen Maschinenteiles abhängen. Man kann sich intuitiv folgenden Versuch vorstellen:

In einem Zylinder, der durch einen beweglichen Kolben verschlossen ist, findet eine adiabate Ausdehnung statt. Wenn sich der Kolben mit einer Geschwindigkeit bewegt, die der grössten Molekelgeschwindigkeit wenigstens gleich ist, wird keine einzige Molekel den Kolben einholen und so bleibt der auf ihn Druck erzeugende Anprall aus. Unter diesen Bedingungen ist die Interaktion Gas — beweglicher Maschinenteil ganz aufgehoben und die äussere Arbeit hört ganz auf; das ausdehnende Gas führt seine innere Energie nicht mehr dem Kolben zu, infolgedessen verläuft die Ausdehnung zugleich adiabat und isotherm (ideale Gase).

Es ist nun begreiflich, dass zwischen diesem Grenzfall und den in Wirklichkeit vorkommenden Fällen, in welchen die Kolbengeschwindigkeit nicht so gross wie die Molekelgeschwindigkeit ist, aber einem Wert zustrebt, der immer höher angesetzt wird, die äussere Arbeit einen Wert aufweist, der sich in der Nähe desjenigen befindet, welcher sich aus den klassischen Beziehungen der Thermodynamik ergibt.

Diese Erwägungen gelten selbstverständlich für alle Zustandsänderungen, die mit Arbeitzu — oder — abfuhr stattfinden: Isothermen, Isobaren Adiabaten und Polytropen. Sie führen zu dem Schluss, dass die Ausdrücke der klassischen Thermodynamik, aus denen die äussere Arbeit und die Wärme sich berechnen lassen, der Kolbengeschwindigkeit entsprechend umgeändert werden müssen.

Damit ist aber bewiesen, dass auch die Form der Gleichungen der Adiabaten und Polytropen Veränderungen erfahren müssen, weil sie aus der Gleichung

$$dQ = dU + ApdV$$

hergeleitet werden, wo pdV die äussere Arbeit ist, die (wie oben gesehen) von der Interaktion Gas-beweglicher Maschinenteil abhängt.

Die Gleichungen der Isothermen und der Isobaren, die durch Konstantbleiben einer Zustandsgrösse gekennzeichnet sind, bilden eine Ausnahne; sie werden, ganz abgesehen von den Bedingungen, die ihrer Entwicklung zugrundeliegen, aus dem allgemeinen Zustandsgesetz abgeleitet. Somit hängt die Form dieser Gleichungen nicht von der Geschwindikeit des Prosezzes ab, d.h. nicht von der Kolbengeschwindigkeit (also im Gegensatz zu der äusseren Arbeit und dem Wärmebedarf).

Es leuchtet nun ein, dass man in erster Linie die Art und Weise untersuchen muss, wie die Interaktion Gas-beweglicher Maschinenteil stattfindet, um daraus eine entsprechende Umformung des Ausdruckes des ersten Grundsatzes der Thermodynamik folgern zu können.

Dazu wollen vir die kinetische Gastheorie in Anspruch nehmen und später die theoretischen Ergebnisse mit dem wirklichen Geschehen vergleichen.

2. Erster Grundsatz für die Verdichtung

In einem durch einen Kolben dicht verschlossenen Zylinder befindet sich ein Gas dessen Molekül einatomig ist. Wir setzen Gasverdichtung mit einer endlichen Kolbengschwindigkeit (w), sowie reibungslose Kolbenbewegung voraus.

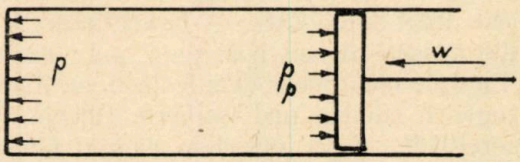


Abb. 1

Das Gas übt einen Druck p auf die Zylinderwände aus, welcher dem Druck in der Gasmasse gleich ist; wie man weiss, ist der auf dem beweglichen Kolben ausgeübte Druck

$$p_p = p.$$

Die Gleichung des ersten Grundsatzes für alle vorkommenden Prozesse (umkehrbare, oder nichtumkehrbare) ist:

$$dQ = dU + A\,dL \tag{1}$$

worin

$$dL = p_p\,dV. \tag{2}$$

In der Thermodynamik der umkehrbaren Prozesse nimmt man an, dass sich der Kolben mit einer unendlich kleinen Geschwindigkeit bewegt und aus diesem Grunde der auf ihn ausgeübte Druck p_p in jedem Augenblick gleich demjenigen ist, der auf den Zylinderwänden und in der Gasmasse herrscht (p); das heisst, wenn Umkehrbarkeit vorhanden,

$$p_p = p = \frac{GRT}{V}$$

In Wirklichkeit besitzt der Kolben eine endliche Geschwindigkeit (w) und so wird bei der Verdichtung erfahrungsgemäss $p_p > p$, also auch $T_p > T$. Die Gleichheit der Temperatur in der ganzen Gasmasse ist aber eine notwendige Bedingung des thermodynamischen Gleichgewichtes. Von der Ungleichheit des Druckes (von der endlichen Geschwindigkeit des Kolbens herrührend) und der Temperatur ausgehend, kann man auf drei Ursachen schliessen, die zur Störung des thermodynamischen Gleichgewichtes des Gases führen; diese wollen wir weiter unten analysieren:

a) Die Molekeln prallen den Kolben mit einer relativen Geschwindigkeit an, die grösser als ihre eigene absolute Geschwindigkeit (c) ist, und erzeugen einen Druck $p_p' > p$.

b) Die Interaktion Gas-beweglicher Kolben umfasst sämtliche Molekeln, nicht nur ein Drittel.

c) Die Zeit der Wiedererlangung des thermodynamischen Gleichgewichtes hat einen endlichen Wert (Relaxationszeit).

Diesen drei Ursachen entsprechen drei Korrekturen, die in den Ausdruck des ersten Grundsatzes eingeführt werden müssen.

a) *Erste Korrektur mit Rücksicht auf* $p'_p > p$.

Das im Zylinder befindliche System ist im thermodynamischen Gleichgewicht. Gleichverteilungsgesetz der kinetischen Energie wird angenommen. Unter diesen Bedingungen, von der Gesamtzahl N nur $\frac{N}{3}$

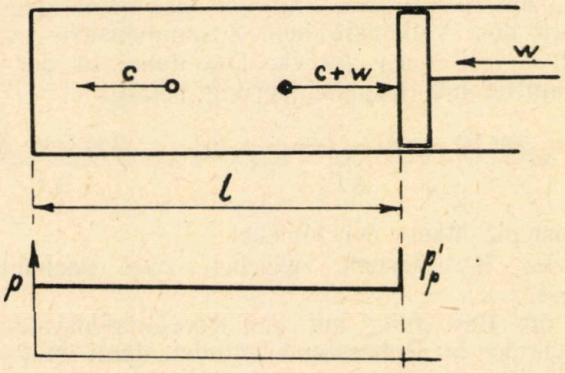


Abb. 2

Molekeln laufen parallel mit der Zylinderachse. Ihre mittlere Geschwindigkeit ist (c).

Mit Bezug auf ein Koordinatensystem, das sich zusammen mit dem Kolben mit der Geschwindigkeit w bewegt, nähern sich die $\frac{N}{3}$ Molekeln mit der Geschwindigkeit $(c + w)$ dem Kolben an, und erzeugen auf seiner Anprallfläche den Druck p'_p. Jene Molekeln, die gegen die feste Zylinderwand laufen, treffen auf diese mit der Geschwindigkeit $c < (c+w)$ und erzugen einen Druck $p < p'_p$ (Abb. 2).

Man kann also schreiben:

$$p'_p = \delta' p \quad , \quad wo\ \delta' > 1 . \tag{3}$$

Um δ' zu bestimmen, geht man von der Definition des Druckes aus:

$$p'_p = \frac{F}{S}, \tag{4}$$

worin

S — Kolbenfläche

F — die Kraft, die von den Molekeln, beim Auftreffen und beim Rückprall mit vollelastischem Stoss, auf die Kolbenfläche ausgeübt wird; sie ist der Impulsänderung in der Zeiteinheit gleich.

Die Kraft F wird in der Voraussetzung berechnet, dass keine Interaktion zwischen den sich in der Richtung des Kolbens bewegenden Molekeln vorhanden ist, diese also unabhängig voneinander zwischen die Stirnfläche des Kolbens und die entgegengesetzte Zylinderwand mit der augenblicklichen Geschwindigkeit schwingen.

Die beim Stoss auftretende Impulsänderung hängt nicht vom Koordinatensystem ab.

Mit Bezug auf ein Koordinatensystem, das sich mit dem Kolben bewegt, nähert sich die Molekel mit der Geschwindigkeit $(c + w)$ dem Kolben an. Nach dem vollelastischen Zusammenstoss prallt sie mit der Geschwindigkeit $-(c + w)$ zurück. Die dabei in der Zeiteinheit von einer Molekel auftretende Impulsänderung beträgt

$$F_1 = \frac{m\,[(c+w)-(-c-w)]}{\Delta t} = \frac{2m(c+w)}{\Delta t} \tag{5}$$

Darin: — m ist die Masse der Molekel

— Δt das Zeitintervall zwischen zwei nacheinander folgende Stösse.

Will man die Bewegung auf ein Koordinatensystem beziehen, das sich mit dem Zylinder im Ruheestand befindet, dann ist $(+c)$ die absolute Geschwindigkeit der Molekel vor dem Stoss, während diejenige nach dem Stoss (c') aus

$$c' = 2\frac{Mw - mc}{M+m} + c = 2\frac{w - \frac{m}{M}c}{1+\frac{m}{M}} + c \tag{6}$$

zu berechnen ist. M ist die Masse des Kolbens, die im Vergleich mit der Molekelmasse so gross ist dass $\frac{m}{M} \to 0$, und also

$$c' = 2\,w + c$$

Die Geschwindigkeit c' nach dem Stoss ist aber negativ, also $-c' = -(c + 2w)$. Somit

$$F_1 = \frac{m\,[c-(-c-2w)]}{\Delta t} = \frac{2m(c+w)}{\Delta t}, \tag{7}$$

was ubrigens zu erwarten war.

In der von einem Stoss bis zum nächsten verstrichenen Zeit, bei einer Zylinderlänge (l), legt eine Molekel den Weg ($2l$) mit der Geschwindigkeit $(c + w)$ zurück, *d.h.*: $\Delta t = 2l(sc + w)$. In diesem Zeitintervall kommen alle $\frac{N}{3}$ Molekeln einmal zum Stoss, und erteilen also der Stirnfläche des Kolbens die gesamte Impulsänderung;

$$F_{N/3} = \frac{2m(c+w)}{\frac{2l}{c+w}} \cdot \frac{N}{3} = \frac{2N}{3} \cdot \frac{mc^2}{2} \cdot \frac{\left(1+\frac{w}{c}\right)^2}{l}, \tag{8}$$

sodass der Druck auf der Flächeneinheit (mit $lS = V$)

$$p'_p = \frac{F_{N/3}}{S} = \frac{2N}{3} \cdot \frac{mc^2}{2} \cdot \frac{\left(1+\frac{w}{c}\right)^2}{lS} = \frac{2N}{3} \cdot \frac{mc^2}{2} \cdot \frac{\left(1+\frac{w}{c}\right)^2}{V} \tag{9}$$

wird. Da die kinetische Theorie der Gase beweist, dass auf ein Quadratmeter einer ruhenden Wandfläche der Druck

$$p = \frac{2N}{3} \cdot \frac{mc^2}{2V}$$

wirkt, so ist der Druck auf derselben Wandfläche, wenn sie sich im Sinne der Verdichtung mit der Geschwindigkeit w bewegt,

$$p'_p = p\left(1+\frac{w}{c}\right)^2. \tag{10}$$

Im Vergleich mit (3), ersieht man, dass beim Verdichten, da

$$\delta' = \left(1+\frac{w}{c}\right)^2 > 1 \tag{11}$$

so wird der Druck auf der Stirnfläche des beweglichen Kolbens grösser als der auf die Zylinderwandfläche wirkende. Bis jetzt wurde angenommen, dass das Molekül mit der Amplitude l schwingt. In Wirklichkeit ist es unwahrscheinlich, dass ein Molekül die der Kolbenstirnfläche entgegengesetze Zylnderwand erreichen könnte, ohne unterwegs auf andre Moleküle zu stossen. Infolgedessen, sowohl die Zeit zwischen zwei aufeinander folgenden Zussammenstössen desselben Molekül mit dem Kolben kleiner, als auch die Zahl der Moleküle die dazu kommen grösser werden.

Wir wollen beweisen, dass auch unter diesen Bedingungen der Druck p'_p seinen von (10) wiedergebenen Ausdruck beibehält.

Man teilt den Zylinderraum Sl in n gleiche Teile. Ein so entstandener, an dem Kolben grenzender kleiner Zylinder enthält $N_f = \frac{N}{3n}$ Moleküle. Man setzt voraus, dass in diesem Zylinder ein auf dem Weg $\frac{l}{n}$ parallel zur Achse oszillierendes Molekül auf kein anderes stosst, und also frei

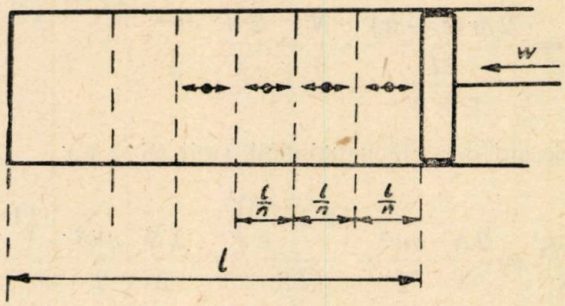


Abb. 3

zwischen die Trennebenen mit der Geschwindigkeit (c) hin und her läuft. Das Zeitintervall zwischen zwei nacheinander folgenden Stössen auf der Kolbenstirnfläche ist $\Delta t = 2\,l/n\,(c + w)$.

Nach (8), (9) und (10), ist der Druck auf dem Kolben:

$$p_p' = \frac{2\,m\,(w+c)}{S \cdot \dfrac{2l}{n\,(c+w)}} \cdot \frac{N}{3n} = p\left(1 + \frac{w}{c}\right)^2 \tag{12}$$

Wir gelangen also zu demselben Ergebnis wie in (10).

Die Schlussfolgerung davon ist, dass, mit Rücksicht auf die erste Korrektur, im Falle der Verdichtung, der Ausdruck des erstern Grundsatzes

$$dQ = dU + Ap\left(1 + \frac{w}{c}\right)^2 dV \tag{13}$$

sein muss, wo

$$dL = p\left(1 + \frac{w}{c}\right)^2 dV \approx p\left(1 + \frac{2\,w}{c}\right) dV\,.^* \tag{14}$$

Darin ist p der Druck der sich aus dem allgemeinen Zustandsgesetz ($pV = GRT$) ergibt.

* $\approx$ gültig wenn $w \ll c$

b) *Zweite Korrektur mit Rücksicht auf die Interaktion Gas-beweglicher Kolben*

Die zweite Korrektur von p_p wird von der Tatsache hervorgerufen, dass die Interaktion Gasmoleküle-beweglicher Kolben sich nicht nur auf die N/3 Moleküle beschränkt, die sich in der Richtung der Zylinderachse,

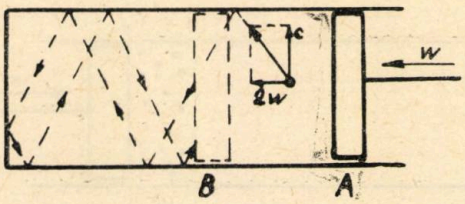


Abb. 4

sondern auch die übrigen 2N/3, die sich senkrecht darauf bewegen, in Anspruch nimmt.

Man kann tatsächlich annehmen, dass, bevor der Kolben zur Bewegung kommt, die 2N/3 Moleküle ungestört in Ebenen oszillieren welche auf der Zylinderachse senkrecht sind, wobei ihre Geschwindigkeit keine Komponente in der Zylinderachse aufweisen. (Selbstverständlich ist die Geschwindigkeitsverteilung chaotisch vas Bewegungsrichtung anbelangt, aber, der kinetischen Gastheorie gemäss, ist die Verteilung des mittleren Impulses auf die drei Achsen der getroffenenen Annahme sehr nahe).

Unter diesen Bedingungen (d.h. der Kolben befindet sich im Stillstand) kommen die 2N/3 Moleküle nicht zur Interaktion mit dem Kolben und so tragen sie auch nicht zur Entstehung des Druckes auf der Kolbenstirnfläche bei.

Wenn der Kolben sich zu bewegen beginnt (sagen wir mit seiner augenblicklichen Geschwindigkeit w), stosst er auf die 2N/3 Moleküle mit der relativen Geschwindigkeit w. Nach dem Stoss besitzt das Molekül die absolute Geschwindigkeit $2w$ (in der Richtung der Zylinderachse). Das geht aus (6) hervor, wo $c = 0$.

Theoretisch, beschreibt das abgebildete Molekül eine Flugbahn welche dieses, wie punktiert gezeigt, wieder zum Aufschlag auf die Kolbenstirnfläche führt. In der Zwischenzeit hat sich der Kolben von A bis B bewegt und hat dabei auf alle sich in dem Raum AB befindlichen Moleküle getroffen.

Mit dem nächsten Stoss wächst die axiale Komponente zu $4w$, und so fort, wobei die absolute Geschwindigkeit des Moleküls immer grösser wird. Damit stellen wir fest, dass die Interaktion des Kolbens mit den 2N/3 Molekülen ganz anders stattfindet als mit den übrigen N/3. Die letzten laufen dem Kolben zu, dank ihrer axialen Geschwindigkeit, während die ersteren, in Mangel an einer anfänglichen axialen Komponente, auf den Kolbenstoss warten müssen. In Wirklichkeit, wegen der Interaktion der 2N/3 Moleküle unter sich und mit den axiallaufenden, ist das

Bild der gesamten Interaktion viel komplizierter, indem im Zylinder alle Augenbliche Druckwellen entstehen, die, vom Kolben ausgehend, sich gegen die entgegengesetzte Zylinderwand fortpflanzen.

Um die Grössenordnung dieses Effektes einzuschätzen werden wir ein vereinfachtes Schema annehmen. Es wird vorausgesetzt, dass der Kolben mit den 2N/ 3 Molekülen nur ein einziges Mal zusammenstosst (also die Druckwelle, die vom Kolben ausgeht nicht reflektiert, sondern unterwegs vollkom-

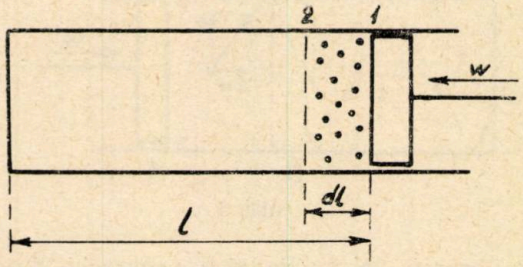


Abb. 5

men amortisiert wird). Somit nehmen wir uns vor den von dem oben besprochenen Effekt erzeugten Druckzuschlag auf der Kolbenstirnfläche festzustellen.

Auf dem Wege dl, welcher in der Zeit $dt = \frac{dl}{w}$ zurückgelegt wird, trifft der Kolben auf

$$N_{dl} = \frac{\frac{2}{3}N}{l}\,dl \tag{15}$$

Moleküle, die seiner Stirnfläche die Impulsänderung

$$F_{Ndl} = \frac{2mw}{\frac{dl}{w}} \cdot N_{dl}\ , \tag{16}$$

oder

$$F_{Ndl} = \frac{2mw^2}{dl}\,\frac{\frac{2N}{3}}{l}\,dl = \frac{4mw^2}{3l}\,N \tag{17}$$

erteilen.

Damit ist der gesuchte Druckzuschlag auf der Kolbenstirnfläche :

$$p_p'' = \frac{F_{Ndl}}{S} = \frac{4mw^2}{3lS} \cdot N = \frac{N}{3} \cdot \frac{mc^2}{V} \cdot \frac{4w^2}{c^2}\ , \tag{18}$$

wo $Sl = V$. Da auf eine unbewegliche Wand der Druck

$$p = \frac{2N}{3} \cdot \frac{mc^2}{2V} = \frac{N}{3} \cdot \frac{mc^2}{V}$$

wirkt, so ist aus (18)

$$p''_p = p \cdot 4 \frac{w^2}{c^2} \tag{19}$$

Mit den Korrekturen welche von der relativen Geschwindigkeit $(c+w)$ und von der Interaktion sämtlicher Molekeln [siehe (a) und (b)] auferlegt werden, und mit Rücksicht auf (10), (12), (19), ergibt sich der Druck auf der Kolbenstirnfläche:

$$p_p = p'_p + p''_p = p\left(1 + \frac{2w}{c} + 5\frac{w^2}{c^2}\right) \approx p\left(1 + \frac{2w}{c}\right). \tag{20}$$

Somit wird der Ausdruck des ersten Grundsatzes auf

$$dQ = dU + Ap\left(1 + \frac{2w}{c} + 5\frac{w^2}{c^2}\right)dV. \tag{21}$$

ergänzt.

Im Falle $w \ll c$, ist die zweite Korrektur $\left(4\frac{w^2}{c^2}\right)$ viel kleiner wie die erste und so kann man sie vernachlüssigen, so wie auch $\frac{w^2}{c^2}$ dem Verhältnis $\frac{w}{c}$ gegenüber.

c) *Dritte Korrektur mit Rücksicht auf den endlichen Wert der bis zur Wiedererlangung des thermodynamischen Gleichgewichtes verstrichenen Zeit (Relaxationszeit)*

Eine dritte Ursache die dazu beiträgt, dass, bei Verdichtung, während des ganzen Hubes und in jeder Kolbenstellung, $p_p > p$ wird, besteht darin dass die Zeit der Wiedererlangung des thermodynamischen Gleichgewichtes einen endlichen Wert hat.

Je länger diese Zeit dauert, desto grösser ist ihr Einfluss auf den augenblicklichen Druck p_p. Bisher nahmen wir Beharrungszustand der Gasmasse an, und zwar auf die ganze Dauer der Kolbenbewegung (thermodynamisches Gleichgewicht). In Wirklichkeit, wie man weist, ist das nicht möglich. Es erweist sich aber nützlich auf die näheren Umstände des Prozesses einzugehen.

Wir setzen voraus, dass der Kolben seine Ruhestelle mit der mittleren Geschwindigkeit w verlässt (was der Annahme einer sehr kurzen Beschleunigungszeit gleichkommt). Anfänglich herrscht offensichtlich thermodynamisches Gleichgewicht in der Gasmasse. Die Molekeln, die sich in unmittelbarer Nähe des Kolbens befinden, und welche sich parallel zur Zylinderachse bewegen, erfahren, infolge ihrer Interaktion mit dem Kolben, wie es unter (a) besprochen wurde, einen der absoluten Geschwindigkeits-

änderung [von (c) zu $(c + w)$] entsprechenden Energiezuwachs. Demgemäss besitzen diese Molekeln eine grössere Energie als die übrigen, die noch nicht zur Interaktion gekommen sind. In der Nähe des Kolbens ist die Molekelnzahl pro Raumeinheit grösser als in der restlichen Gasmasse. Auf diese Weise tritt eine Störung des molekularen Gleichgewichtes ein, die darin besteht, dass in der Nähe des Kolbens der Druck und die Temperatur des Gases grösser sind als in der übrigen Gasmasse. Für die Wiederherstellung des molekularen Gleichgewichtes, muss eine gewisse endliche Zeit vergehen, die wir Relaxationszeit nennen wollen. Würde der Kolben nach dem ersten mit der Geschwindigkeit (w) erfolgten kurzen Anprall plötzlich stillstehen und erst nach der Relaxation seine stossweise Bewegung wiederaufnehmen, so würden sich die Verhältnisse des ersten kurzen Stosses analog wiederholen (thermodynamisches Gleichgewicht).

Unter diesen Bedingungen sind die unter (a) und (b) gemachten Ferststelungen vollkommen gültig. *Die (a)- und (b)- Korrekturen erscheinen also als unabhängig von der endlichen Relaxationszeit ; sie treten auch dann auf wenn diese Null wäre. Streng genommen, bedeutet das so viel, dass die Verwirklichung eines quasistatischen Prosezzes in den Kolbenmaschinen nicht aufzufassen ist. Wäre auch die K-Geschiwindigkeit w noch so klein, würden die unter (a)- und (b)- Effekte doch zum Vorschein kommen.*

Bewegt sich der Kolben (in einem einzigen Hub) kontinuierlich zwischen seinen Totpunkten, mit der Geschwindigkeit w, *d.h.* zwischen dem Anfangs-und Endzustand des Gases, so ist auch währenddessen die Störung des molekularen Gleichgewichtes beständig ; der Kolben wird in jedem Augenblick Druckwellen im Zylinder erzeugen, die durch allmähliche Reflektionswellen nach der Wiederherstellung des Gleichgewichtes trachten. Das gelingt vollständig erst am Ende des Verdichtungshubes, nach dem Stehenbleiben des Kolbens, also in dem Endzustand des Gases.

Aus diesen Erwägungen geht hervor, dass, beim Vedichten, für jede Kolbenstellung, der Druck in der Nähe des Kolbens grösser ist, während er gegen die der Kolbenstirnfläche entgegengesetzte Zylinderwand immer kleiner werdende Werte aufweist. *Man kann also in jeder augenblicklichen Kolbenstellung von einem mittleren* Druck p_m sprechen. In Abb. (6) sind die drei Effekte dargestellt :

Δp_1 — nach Punkt (a), Δp_2 — nach Punkt (b), Δp_3 — der von der endlichen Relaxationszeit verursachte Effekt nach Punkt (c).

Im vorliegenden Falle ist also kein thermodynamisches Gleichgewicht vohanden und so können wir uns nicht der lokalen Zustandsgrössen bedienen, um den globalen Zustand in einem augenblicklichen Zylinderraum darzustellen, da sie zu einer gegebenen Zeit in räumlicher Beziehung veränderlich sind.

Ist das Gleichgewicht nicht übermässig gestört, so kann man den globalen Gaszustand durch augenblickliche Mittelwerte des Druckes und der Temperatur für jede gegebene Kolbenstellung darstellen.

Die mittlere Temperatur wird diejenige sein die der mittleren inneren Energie der ganzen Gasmolekeln entspricht.

Der mitllere Druck wird dann, als Funktion von der mittleren Temperatur, aus dem allgemeinen Zustandsgesetz berechnet:

$$p_{med} = GRT_{med}/V \ . \tag{22}$$

Wie es aus Abb. 6 zu ersehen ist, der Druck muss in umittelbarer Nähe des Kolbens grösser wie der mittlere sein, also:

$$p_{gp} = p_{med} + \Delta p_3 = \alpha\, p_{med} \ , \quad wo\ \alpha > 1 \tag{23}$$

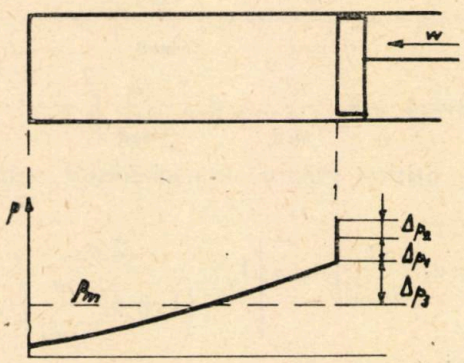


Abb. 6

Neben dem Kolben ist auch die Gastemperatur grösser als die mittlere. Infolgedessen ist da auch die mittlere Molekelngeschwindigkeit grösser wie die der ganzen Molekeln ($c_{med.}$), welche der mittleren Temperatur entspricht. Mann kann also analog mit (23) schreiben:

$$c_{gp} = \beta\, c_{med} \ , \quad \text{worin } \beta > 1 \tag{24}$$

Damit stellen wir fest, dass man den Effekt Δp_3 berücksichtigen kann, indem man die Beziehung (20) benützt: $p_p = p\left(1 + \frac{2w}{c}\right)$. Darin führen wir statt des Druckes p den Druck p_{gp} als Funktion des mittleren Druckes p_{med} (siehe 23) und, statt der Molekelngeschwindigkeit (c), die mittlere Molekelngeschwindigkeit (c_{gp}) des Gases in der Nähe des Kolbens, als Funktion von der mittleren Molekelngeschwindigkeit in der ganzen Gasmasse (siehe 24), ein.

Auf diese Weise erhalten wir:

$$p_p = p_{gp}\,(1 + 2\,w/c_{gp}) = \alpha\, p_{med}\,(1 + 2\,w/\beta\, c_{med}) \tag{25}$$

Die Koefiizzienten α und β hängen von der Relaxations—und von der Kolbengeschwindigkeit an. Die erste hängt mit der Molekelngeschwindigkeit zusammen, d.h. mit. c_{med}. Je grösser c_{med} ist, desto kleiner werden α und β, aber nicht unter 1. Andererseits, je kleiner w ist, desto kleiner

werden α und β. Deren Grenzwert (für $w = 0$) ist wieder 1. Das bedeutet dass wir

$$\alpha = f_1\left(\frac{w}{c_{med}}\right) \text{ und } \beta = f_2\left(\frac{w}{c_{med}}\right)$$

schreiben können.

Da die Werte α und β in der Nähe von 1 liegen, kann mann, in der Voraussetzung dass $w < c_{med}$, folgende Reihen schreiben:

$$\alpha = 1 + \alpha_1 \frac{w}{c_{mcd}} + \alpha_2 \left(\frac{w}{c_{med}}\right)^2 + \cdots \tag{26}$$

$$\beta = 1 + \beta_1 \frac{w}{c_{med}} + \beta_2 \left(\frac{w}{c_{med}}\right)^2 + \cdots \tag{27}$$

Indem man heir den dritten Faktor vernachlässigt, erhält man, mit Bezug auf (25):

$$p_p = \left(1 + \alpha_1 \frac{w}{c_{med}}\right) p_{med} \left[1 + \frac{2w}{\left(1 + \beta_1 \frac{w}{c_{med}}\right) c_{med}}\right].$$

Nach Umformung, auf Grund von

$$\frac{1}{1 + \beta_1 \frac{w}{c_{med}}} \approx 1 - \beta_1 \frac{w}{c_{med}},$$

findet man

$$p_p = \left[1 + \alpha_1 \frac{w}{c_{med}} + \frac{2w}{c_{med}}\left(1 - \beta_1 \frac{w}{c_{med}}\right) + \right.$$
$$\left. + \alpha_1 \left(1 - \beta_1 \frac{w}{c_{med}}\right) \frac{2w^2}{c_{med}^2}\right] p_{med}.$$

Faktoren zweiter Potenz können vernachlässigt werden und so erhält man schliesslich

$$p_p = \left[1 + (\alpha_1 + 2) \frac{w}{c_{med}}\right] p_{med}, \tag{28}$$

wo α_1 von den geometrischen Eigenheiten des Systems und von der Natur des sich im Zylinder befindlichen Gases abhängt.

Nun sind wir so weit, dass man den neuen allgemeinen Ausdruck des ersten Grundssatzes für die nicht umkehrbaren Prozesse, die in den thermischen Maschinen ohne Strömung verlaufen, schreiben kann:

$$dQ = dU + A\, p_{med}\left[1 + a\frac{w}{c_{mcd}} + b\left(\frac{w}{c_{med}}\right)^2 + \cdots\right] dV, \tag{29}$$

worin $dU = Gc_v\, dT_{med}$, und a, b Koeffizienten sind welche experimental oder theoretisch, von Fall zu Fall, für verschiedene Systeme bestimmt werden können.

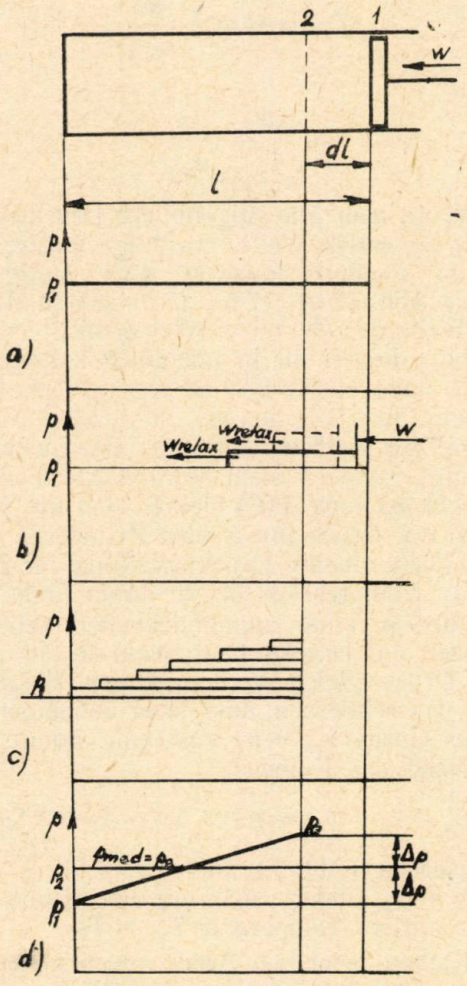


Abb. 7

Die Bestimmung der von der endlichen Relaxationszeit verursachten Korrektur

In dem Augenblick wo der Kolben seine Ruhestelle 1 verlässt (Abb. 7), sedet er eine Druckwelle aus, die den Weg (l) mit der Relaxationsgeschwindigkeit w_{rel} zurücklegt. Die Relaxationszeit Δt, d.h. die Zeit, in welcher die erste Druckwelle den Weg „l" zurücklegt, wird

$$\Delta t = \frac{l}{w_{rel}} \tag{30}$$

sein.

Während dieser Zeit, ist, der mit der Geschwindigkeit (w) vom Kolben zurückgelegte Weg,

$$\Delta l = w\,\Delta t = l\frac{w}{w_{rel}}, \tag{31}$$

so dass

$$\frac{\Delta l}{l} = \frac{w}{w_{rel}} \tag{32}$$

Der Kolben erzeugt aber alle Augenblicke Druckwellen, so dass, in der Relaxationszeit (Δt) der ersten Welle, unzählige andere nacheinanderfolgen, die einem auf dem Kompressionsweg (Δl) stetig wachsenden Druck entsprechen, wie die Abb. (7 a), (7 b), (7 c) zeigen. In (7 c) hat eben die erste ausgesandte Welle den Zylinderdeckel erreicht; die anderen [auf dem Wege (Δl) ausgesandt] folgen ihr in unendlich kurzen Zeitabständen nach. Die Abbildung setzt eine stossweise Bewegung des Kolbens voraus. Da aber dieser sich kontinuierlich bewegt, so wächst der Druck im Zylinderraum, vom Deckel zur Kolbenstirnfläche hin, nicht sprungweise, wie die Abbildung (7 c) zeigt, sondern auch kontinuierlich, wie in (7 d) sichtbar. Ist der Zylinder nicht zu lang [(l') klein], also die Relaxationszeit nicht zu gross, so wächst der Druck linear, vom Zylinderdeckel zum Kolben hin, wie in Abb. (7 d). Diese lineare Druckverteilung im Zylinderraum besteht vom Beginn der der Kompression bis zu ihrem Ende.

Bleibt der Kolben in einer augenblicklichen beliebigen Stellung stehen, so verteilen sich die Drücke im ganzen Raum gleichmässig, indem sie dem mittleren Druck gleich werden. Unter diesen Umständen, kann man [nach Abb (7 d)] schliessen, dass jeder beliebigen K-Stellung (z.B.2) ein Mitteldruck des Gases $p_m = p_2$ zukommt. Somit ist der Gasdruck p_3 in unmittelbarer Nähe des Kolbens.

$$p_3 = p_2 + \Delta p = p_m + \Delta p = p_1 + 2\,\Delta p\ , \tag{33}$$

worin p_1 = Anfangsdruck (Abb 7) ist.
Der Mitteldruck $p_2 = p_m$ ändert sich mit der Kolbenstellung, sowie die ihm entsprechende mittlere Temperatur $T_m = T_2$.

Für die vom Kolben geleistete Arbeit muss man die Gleichung (14) benützen, worin $p = p_3$ als Funktion von p_m einzuführen ist. Dasselbe gilt auch für den Ausdruck des ersten Grundsatzes der Thermodynamik:

$$dQ = dU + A p_p\,dV\ ,$$

d.h
$$dQ = G\,c_v\,dT_m + A p_p\,dV = G\,c_v\,dT_m + A p_3\left(1 + \frac{2\,w}{c}\right)dV \Bigg\} \tag{34}$$

In der Folge wollen wir den Ausdruck von p_p als Funktion von p_m finden.

Zu diesem Zweck bemerken wir, dass, da der Verdichtungsweg (Δl) sehr klein ist, der aus Abb. (7 d) ersichtige Druckzuwachs Δp unge-

fähr demjenigen gleichkommt, der einer quasistatischen Verdichtung entspricht. Somit kann man schreiben

$$\frac{p_2}{p_1} = \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^k, \tag{35}$$

worin $V_1 = Sl_1$ und $V_2 = Sl_1 - S\Delta l$.

Daraus:

$$p_2 = p_1\left(\frac{Sl_1}{Sl_1 - S\Delta l}\right)^k = p_1\left(\frac{l_1}{l_1 - \Delta l}\right)^k \tag{36}$$

Mit Bezug auf (30) und (31), ergibt sich

$$p_2 = p_1\left(\frac{l}{l - l\dfrac{w}{w_{rel}}}\right)^k \tag{37}$$

und

$$p_2 = p_1\left[\frac{1}{1 - \dfrac{w}{w_{rel}}}\right]^k \cong p_1\left(1 + k\frac{w}{w_{rel}} + \cdots\right) \tag{38}$$

Dazu muss $w < w_{rel}$ sein.

Aus (37) und mit Bezug auf (32) findet man

$$\Delta p = p_2 - p_1 = p_1 k\frac{w}{w_{rel}}, \tag{39}$$

und, da jetzt Δp bekannt ist, ergibt sich

$$p_3 = p_1 + 2\Delta p = p_1\left(1 + 2k\frac{w}{w_{rel}}\right) \tag{40}$$

Greifen wir aus (37) p_1 als Funktion von $p_2 = p_m$ heraus und führen wir diese in (39) ein. Man erhält

$$p_1 = p_2\left(1 - k\frac{w}{w_{rel}}\right)^k$$

und

$$p_3 = p_m\left(1 - k\frac{w}{w_{rel}}\right)\left(1 + 2k\frac{w}{w_{rel}}\right)$$

oder auch

$$p_3 = p_m\left[1 + 2k\frac{w}{w_{rel}} - k\frac{w}{w_{rel}} - 2k^2\left(\frac{w}{w_{rel}}\right)^2\right].$$

Wenn man hier die Faktoren zweiter Ordnung vernachlässigt, findet man

$$p_3 = p_m\left(1 + k\frac{w}{w_{rel}}\right) \tag{41}$$

Wir nehmen an, dass die Relaxationsgeschwindigkeit (w_{rel}) mit der Schallgeschwindigkeit (w_s) gleich ist, und diese kleiner wie die mittlere Molekelngeschwindigkeit, also

$$w_{rel} = w_s = \alpha' c_{med}, \text{ wo } \alpha' < 1, \text{ und } \frac{c_{med}}{w_s} = \frac{1}{\alpha'}$$

Mit dieser Annahme, wird Gleichng (41) (wenn wir c_m statt c_{med} bezeichnen):

$$p_3 = p_m \left(1 + k \frac{w}{\alpha' c_m}\right) \tag{42}$$

und

$$\frac{1}{\alpha'} = \frac{\sqrt{3 g R T}}{\sqrt{2 g \frac{k}{k+1} R T}} = \sqrt{1{,}5 \frac{k+1}{k}}.$$

Die Werte $\frac{1}{\alpha'}$ und also auch $\frac{k}{\alpha'}$ hängen nur von der Natur des Gases ab:

$$\text{für } k = 1{,}66, \frac{1}{\alpha'} = 1{,}55 \text{ und } \frac{k}{\alpha'} = 2{,}57$$

$$\text{für } k = 1{,}4\ , \frac{1}{\alpha'} = 1.6 \quad \text{und } \frac{k}{\alpha'} = 2{,}24$$

Um den Kolbendruck p zu ermitteln wendet man den Ausdruck (20) an:

$$p_p = p \left(1 + \frac{2w}{c}\right).$$

Im vorliegenden Falle $p = p_3$ der aus (42) berechnet werden kann, während c annähernd gleich c_m ist. Infolgedessen,

$$p_p = p_m \left(1 + \frac{k}{\alpha'} \cdot \frac{w}{c_m}\right)\left(1 + \frac{2w}{c_m}\right)$$

$$p_p \cong p_m \left[1 + \left(\frac{k}{\alpha'} + 2\right)\frac{w}{c_m}\right] \tag{43}$$

Man bemerkt eine vollkommene Analogie zwischen (43) und (28), die uns zu schreiben berechtigt, dass,

$$\alpha_1 = \frac{k}{\alpha'}.$$

Damit ist die Möglichkeit gegeben den Wert von (a), welcher in Gleichung (29) vorkommt, zu bestimmen:

$$a = (\alpha_1 + 2) = (k/\alpha' + 2),$$

(a) hängt von der Gasart:

$$\text{für } k = 1{,}66 \qquad a = 4{,}57$$
$$\text{für } k = 1{,}4 \qquad a = 4{,}32$$

und wird Koeffizient des Irreversibilitat bestimmenden Verhältnisses benannt.

3. *Der Fall der Ausdehnung.*

In der Thermodynamik der umkehrbaren Prozesse, hängt der Ausdruck der mechanischen Arbeit nicht von der Bewegungsrichtung des Kolbens ab, d.h. abgesehen ob Verdichtung oder Ausdehnung vorhanden. Bei solchen Prozessen, die unendlich kleine Geschwindigkeit voraussetzen, ist dies offensichtlich, da der Druck auf der Kolbenstirnfläche gleich demjenigen ist welcher, unabhängig von der Richtung der Kolbenbewegung, in der ganzen Gasmasse herrscht.

Ganz anders verhalten sich die Dinge im Falle der mit endlicher Geschwindigkeit verlaufenden Prozesse. Wie bei Verdichtung gesehen, weisen die Gasmolekeln, biem Auftreffen auf die Kolbenfläche, eine relative Geschwindigkeit $(c + w)$ und beim Rückprall mit vollelastischen Stoss $(-c - w)$, auf. Nach demselben Gedankengang, sind die bei Ausdehnung entsprechenden Geschwindigkeiten vor und nach dem Stoss $(c - w)$ bzw. $(-c + w)$, sodass:

$$p_p = \frac{N}{3} \cdot \frac{m\,[(c-w)-(-c+w)]}{S\Delta t} = \frac{N}{3} \cdot \frac{m2(c-w)}{\frac{2l}{c-w}S} = \tag{44}$$

$$= \frac{2N}{3V} \cdot \frac{mc^2}{2}\left(1 - \frac{w}{c}\right)^2.$$

Die Bezeichnungen bedeuten: N = Gesamtzahl der Molekeln; c = mittlere Molekelngeschwindigkeit; w = Kolbengeschwindigkeit; $\Delta t = 2l/(c-w)$ = die Zeit zwischen zwei nacheinander folgende Stösse; lS = das Gasvolumen V für eine gegebene Kolbenstellung.

Da der Gleichgewichtsdruck

$$p = \frac{2N}{3V} \cdot \frac{mc^2}{2}$$

ist, so wird, nach (44), der Druck auf dem bewegenden Kolben, bei gestörtem Gleichgewicht,

$$p'_p = p\left(1 - \frac{w}{c}\right)^2 \tag{45}$$

sein, und damit ergibt sich *der erste Grundsatz für die Ausdehnung:*

$$dQ = dU + Ap\left(1 - \frac{w}{c}\right)^2 dV. \tag{46}$$

Da diese Gleichung nur auf die Korrektur Paragraph (a) [siehe Seite 91] Rücksicht nimmt — d.h. nur auf die relative Anprallgeschwindigkeit $(c—w)$ der N/3 axial laufenden Molekeln-untersuchen wir jetzt. den unter (b) behandelten Einfluss der Interaktion sämtlicher Molekeln, indem wir auch diejenigen (2N/3) einbeziehen welche in die senkrecht auf die axiale Richtung oszillieren.

Dem Anschein nach sollte der Effekt dieser Moleküle ausbleiben, da ihnen der Kolben vorauseilt. Aber einzelne davon stossen unsymmetrisch auf die axiallaufenden, weswegen sie in ihrer Bewegung auf dieselbe zick-zack-Bahn wie in Abb. 4 gezwungen werden, die sie zum Anprall auf die Kolbenstirnfläche führen. Dabei erzeugen auch sie, wegen der relativen Geschwindigkeit $(c - w)$, einen kleineren Kolbendruck. Der Effekt ist also negativ und, da er auf dieselbe Weise wie im Falle (a) entsteht, so ist er von der Form $-bw^2/c_{med}^2$.

Da die zwei Effekte, (a) und (b), für die Ausdehnung und Verdichtung identisch sind (mit dem Unterschied dass der letzte positiv und der erste negativ), so wird auch die Relaxationsgeschwindigkeit dieselbe sein, und so kann man auch für die Ausdehnung, nach 29, schreiben:

$$dQ = dU + Ap_{med}\left(1 - a\frac{w}{c_{med}} - b\frac{w^2}{c_{med}^2} - \cdots\right)dV. \tag{47}$$

Indem man die Gleichungen (29) and (47) vergleicht, und die Faktoren zweiter Potenz vernachlässigt, ergibt sich der allgemeine Ausdruck des ersten Prinzips der Thermodynamik, für die ohne Strömung und mit endlicher Geschwindigkeit verlaufenden Prozesse, wie folgt

$$dQ = dU + Ap_{med}\left(1 \pm \frac{aw}{c_{med}}\right)dV, \tag{48}$$

worin + für die Verdichtung und — für die Ausdehnung gelten.

4. *Schlussfolgerungen.*

Die unter (2) und (3) angestellen Betrachtungen führen zu folgenden Schlüssen:

— Der Ausdruck des ersten Grundsatzes der Thermodynamik für thermische Prozesse, die mit endlicher Geschwindigkeit und ohne Strömung verlaufen, unterscheidet sich dadurch von demjenigen welcher für solche Prozesse gilt, die mit unendlich kleiner Geschwindigkeit verlaufen, dass er eine Korrektur erleidet, die eine Funktion von $\frac{w}{c}$ ist (worin $c = c_{med}$).

— Der Korrekturwert hängt von der Bewegungsrichtung des Kolbens, d.h. vom Entwicklungssinne des Prozesses ab.

— Das bedeutet so viel, dass der Mechanismus der Interaktion Kolben-Gas auch dann die Irreversibilität der mit endlichen Geschwindigkeit verlaufenden Prozesse verursacht, wenn alle übrigen Irreversibilitätsursachen abwesend wären.

— Die Druckkorrektur hängt nicht nur von der Kolbengeschwindigkeit, sondern auch von der mittleren Molekelngeschwindigkeit (c) ab. Diese letztere hängt von der Gastemperatur und dessen molekularen Masse. Infolgedessen, nähert sich ein thermischer Prozess desto mehr dem Reversibilitätsbereich an (klassische Thermodynamik), je kleiner die Kolbengeschwindigkeit und die molekulare Gasmasse, sowie je grösser die Gastemperatur sind. Der entsprechende Ausdruck der klassischen Thermodynamik stellt einen Grenzfall dar, erreichbar nur wenn w unendlich klein und $c = \infty$; er kommt, in den thermischen Maschinen, beim Verdichten und Ausdehnen nie vor. Je grösser (w) und je kleiner die Gastemperatur, sowie je grösser (m), desto irreversibler werden die Prozesse. Es geht daraus hervor, dass zwei verschiedene Gase, die dieselbe Temperatur aufweisen und ihr Zustand sich mit derselben Kolbengeschwindigkeit ändert, sich in Hinsicht auf die Irreversibilität (welche die Regel ist) verschieden verhalten, und zwar abhängig von ihrer Natur, also der Molekelnmasse entsprechend. In Gleichng (48) kommt das dadurch zum Ausdruck, dass sowohl der a- Wert wie auch die mittlere Molekelngeschwindigkeit (c) von der Natur des Gases abhängen.

— Beim Verdichten ist die irreversible Arbeit grösser als die reversible, während sie bei der Ausdehnung kleiner ist. Daraus kann man schliessen, dass eine Maschine, in welcher die thermischen Prozesse mit endlicher Geschwindigkeit verlaufen, einen kleineren Wirkungsgrad aufweist als diejenige, in der Prozesse mit unendlich kleiner Geschwindigkeit vor sich gehen. *Zu diesem Schluss gelangt man in der klassischen Thermodynamik nur im Wege des zweiten Grundsatzes.*

— Solange das Verhältnis $a\frac{w}{c}$ viel kleiner wie 1 ist, kann es vernachlässigt, und die Beziehungen der klassischen Thermodynamik verwendet wreden. Weitere Untersuchungen sollen in dieser Hinsicht experimental und theoretisch eine Richtlinie schaffen.

— Dem Gedankengang seiner Herleitung nach, verdient der Ausdruck

$$\delta_m = \left(1 \pm \frac{aw}{c_{med}}\right) \tag{49}$$

die Benennung „*augenblicklicher Faktor der Irreversibilitäts-Entstehung*".

— Folgende Grössen kennzeichnen die Irreversibilität:

c_{med} = mittlere Molekelngeschwindigkeit
w = endliche Geschwindigkeit des Prozesses
$\frac{w}{c_{med}}$ = Irreversibilität bestimmendes Verhältnis
w_s = Schallgeschwindigkeit

w_{rel} = Relaxationsgeschwindigkeit

$\frac{w_{rel}}{c_{med}} = \alpha'$ = Relaxationskonstante des Gases

$\frac{k}{\alpha'} + 2 = a$ = Koeffizient des Irreversibilität bestimmenden Verhältnisses [„a" ist eine Synthese der unter Paragraph (2. a) und (2. c) behandelten Korrektur].

— Dem Paragraph (2. b.) gemäss, venn das Irreversibilität bestimmende Verhältnis w/c_{med} der Einheit zustrebt, kann, der hier erläuterte Effekt, den unter Paragraph (2. a) und (2. c) untersuchten gegenüber, nicht mehr vernachlässigt werden.

Lehrstuhl für Thermotechnik und thermische Maschinen
Politechnisches Institut Bukarest

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC BUCUREȘTI
Tomul XXVI — 1964, Fascicola 5

C.Z.: 629.13

CONSIDERAȚII ASUPRA DETERMINĂRII CÎMPULUI DE VITEZE ÎN FAȚA PALETAJULUI MOBIL AL COMPRESORULUI AXIAL

CRĂCIUN GUȚĂ

Cercetarea teoretică a rețelelor de profile aerodinamice poate fi considerată ca o generalizare a teoriei aripii de avion și este tot atît de importantă pentru calculul turbinelor în general, ca și teoria aerodinamică a aripei în calculul avionului sau a elicei în cazul helicopterului.

Teoria rețelelor de profile aerodinamice antrenează un număr tot mai mare de oameni de știință în rezolvarea teoretică a problemei scurgerii în jurul rețelelor de profile.

Începînd cu Jucovschi N. E., [2] Ciaplîghin S. A. [1] Stodola A [7] și în prezent continuînd cu Uvarov V. V. [6], Sedov L. I. [4]; Stepanov G. Iu. [5], Kocin N. E. [3] și mulți alții (vezi [8]— [11]) teoria rețelelor de profile a cunoscut o amplă tratare și fundamentare.

Intr-o măsură însemnată eficacitatea turbinei cu gaze depinde de finețea aerodinamică a paletajelor, de modul în care se ține seamă de parametrii reali ai curentului la profilarea acestora.

Ridicarea randamentului turbinei cu gaze necesită o muncă laborioasă, susținută, pentru determinarea celor mai bune metode de profilare a paletajului fix și mobil al ansamblului incluzînd turbina cu gaze și compresorul (axial sau centrifugal). În prezent constituie o realizare tehnică și științifică chiar și creșterea cu un procent a randamentului turbinei cu gaze, în ansamblu. De aceea se cere o profundă cunoaștere a fenomenelor hidrodinamice ce au loc la trecerea curentului prin grătarul de profile, corecta lor interpretare și rezolvare. De aici rezultă în egală măsură necesitatea studierii multilaterale teoretice și experimentale a rețelelor de profile.

1. Metoda de calcul a vitezelor curentului în fața paletajului mobil

In afara zonei de interacțiune a stratului limită ce se formează pe palete și pereții înconjurători, unde pierderile de sarcină ajung chiar pînă la 2%, curentul poate fi considerat potențial.

Calculul vitezelor se face admițînd următoarele ipoteze:
a) Curentul este potențial, staționar, incompresibil.
b) Partea de trecere a curentului este cilindrică.
c) Nu există joc radial între capetele paletelor și carcasă.

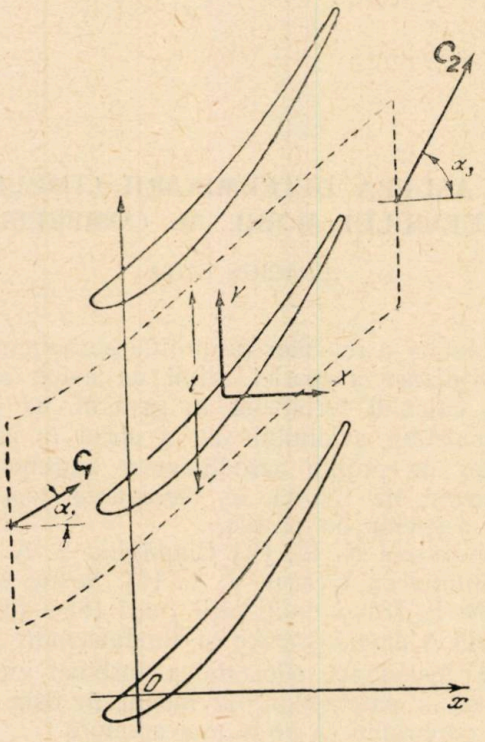


Fig. 1. Schema scurgerii prin rețeaua de profile

Ultima ipoteză ne dă posibilitatea să studiem curentul care iese dintr-un singur canal, fig. 1.

În baza ipotezelor făcute, ecuația de continuitate, în coordonate cilindrice, se scrie:

$$\frac{\partial C_a}{\partial z} + \frac{1}{r}\frac{\partial (r C_r)}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial C_u}{\partial \omega} = 0 \qquad (1)$$

Dacă notăm componentele relative ale vitezei prin:

$$\bar{C}_a = \frac{C_a}{C_{am}}, \quad \bar{C}_r = \frac{C_r}{C_{am}}, \quad \bar{C}_u = \frac{C_u}{C_{am}}$$

Unde C_{am} este componenta axială a vitezei la raza medie, $r_m = \frac{r_e + r_i}{2}$

r_i, r_e raza interioară și exterioară a părții de trecere.

În felul acesta, ecuația (1) se transformă în ecuația lui Laplace, scrisă în coordonate cilindrice:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \bar{z}^2} + \frac{1}{\bar{r}} \frac{\partial \left(\bar{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \bar{r}} \right)}{\partial \bar{r}} + \frac{\partial^2 \varphi}{\bar{r}^2 \partial \omega^2} = 0 \tag{2}$$

Soluția ecuației (2) poate fi căutată sub forma particulară, a unui produs de trei funcții separate (Metoda Fourier — Bernoulli).

$$\varphi = f_1(\bar{z}) \cdot f_2(\bar{r}) \cdot f_3(\omega) \tag{3}$$

Prin transformări simple, derivînd corespunzător relația (3), ecuația (2) se transformă în 3 ecuații diferențiale ordinare și anume:

$$\frac{1}{f_1(\bar{z})} \frac{d^2 f_1(\bar{z})}{d\bar{z}^2} = \pm k^2 \tag{4}$$

$$\frac{1}{f^2(\bar{z})} \frac{d^2 f_1(\bar{r})}{d\bar{r}^2} + \frac{1}{f_2(\bar{r})} \frac{d f_2(\bar{r})}{\bar{r}\, d\bar{r}} = \mp k^2 \tag{5}$$

$$\frac{1}{f_3(\omega)} \frac{d^2 f_3(\omega)}{\bar{r}^2 d\omega^2} = 0 \tag{6}$$

Constanta k poate avea orice valori, în particular poate fi și nulă.
Ecuațiile diferențiale (4) și (6) sînt ordinare și omogene.
Ecuația (5) se poate demonstra că este de tip Bessel.

Considerăm $k > 0$ și amplificăm toți termenii cu $\bar{r}^2 f_2(\bar{r}) \frac{k^2}{k^2}$

Obținem:

$$(k\bar{r})^2 \frac{d^2 f_2(\bar{r})}{d(k\bar{r})^2} + k\bar{r} \frac{d f_2(\bar{r})}{d(k\bar{r})} - (k\bar{r})^2 f_2(\bar{r}) = 0 \tag{7}$$

Dacă însemnăm $f_2(\bar{r}) = y$ și $k\bar{r} = x$ obținem forma obișnuită a ecuației Bessel, fără parametru.

După cum este cunoscut, soluția ecuației (7) este de forma:

$$f_2(\bar{r}) = C I_o(k\bar{r}) + D Y_o(k\bar{r}) \tag{8}$$

unde I_0, Y_0 — funcțiile lui Bessel de speța întîia și a doua.

Rezolvînd ecuațiile diferențiale (4), (6) și (7) putem scrie relația (3), dacă trecem peste o seamă de relații intermediare, sub forma:

$$\varphi = [A\bar{z} + B + \sum_{i=1}^{\infty} (A_i \sin k_i \bar{z} + B_i \cos k_i \bar{z}) I_o(k_i \bar{r})] (\omega + C) \tag{9}$$

În relația (9) A, B, Ai, Bi, C sînt constante.

Pentru a determina viteza curentului într-un punct oarecare, trebuie mai întîi determinate aceste constante.

Practic ne putem limita la un număr finit de termeni, în dezvoltarea în serie trigonometrică a soluției ecuației (4) și de asemeni în dezvoltarea în serie a funcției Bessel, de prima speță.

$$I_o(k_i \bar{r}) = \sum_{i=0}^{n} \frac{\left(\frac{k_i \bar{r}}{2}\right)^{2i}}{(i!)^2} = \sum_{i=0}^{n} \frac{\bar{r}_i^{2i} \; k_i^{2i}}{2^{2i} (i!)^2} \tag{10}$$

Din ecuația potențialului (9) putem deduce succesiv componentele vitezei după cele trei axe de coordonate, luînd un număr finit de termeni în dezvoltarea în serie trigonometrică.

$$\bar{C}_u = \frac{\partial \varphi}{r \partial \omega} = \frac{1}{\bar{r}} \left[A \bar{z} + B + \sum_{i=1}^{n} (A_i \sin k_i \bar{z} + B_i \cos k_i \bar{z}) I_o(k_i \bar{r}) \right] \tag{11}$$

$$\bar{C}_a = \frac{\partial \varphi}{\partial \bar{z}} = \left[A + \sum_{i=1}^{n} (A_i \cos k_i \bar{z} - B_i \sin k_i \bar{z}) k_i I_o(k_i \bar{r}) \right] (\omega + C) \tag{12}$$

$$\bar{C}_r = \frac{\partial \varphi}{\partial \bar{r}} = \left[\sum_{i=1}^{n} (A_i \sin k_i \bar{z} + B_i \cos k_i \bar{z}) k_i I_o(k_i \bar{r}) \right] (\omega + C) \tag{13}$$

În relațiile (12) și (13) se poate vedea că dealungul pasului, componentele vitezei variază în lungul paletei și axei turbomașinii.

Dacă luăm origina axelor de coordonate chiar în zona care ne interesează și vom considera că ieșirea curentului din paletaj este axială atunci vom avea ca un caz particular :

$$\bar{z} = 0 \quad , \quad \omega = 0$$

Adică :

$$\bar{C}_a = C \left[A + \sum_{i=1}^{n} A_i k_i I_o(k_i \bar{r}) \right] \tag{14}$$

$$\bar{C}_r = C \sum_{i=1}^{n} B_i k_i I_o(k_i \bar{r}) \tag{15}$$

$$\bar{C}_u = \frac{1}{\bar{r}} \left[B + \sum_{i=1}^{n} B_i I_o(k_i \bar{r}) \right] \tag{16}$$

Se vede că într-o secțiune dată, în lungul turbomașinii, componentele vitezei sînt funcție numai de rază.

2. Determinarea constantelor A, B, C, A_i, B_i, K_i

Ecuația potențialului (9) trebuie să satisfacă condițiilor de frontieră și anume:

$$\bar{C}_r = 0 \quad , \quad \frac{\partial \bar{C}_r}{\partial \bar{z}} = 0 \quad , \quad \frac{\partial \bar{C}_r}{\bar{r}\,\partial \omega} = 0 \tag{17}$$

pentru $\bar{r} = \bar{r}_e$ și $\bar{r} = \bar{r}_i$.

Legătura reciprocă între $\bar{C}_u$ și $\bar{C}_r$ ne-o dă (mișcarea fiind potențială) una din relațiile de irotaționalitate.

$$\frac{\partial (\bar{C}_u \bar{r})}{\bar{r}\,\partial \bar{r}} = \frac{\partial \bar{C}r}{\bar{r}\,\partial \omega} \tag{18}$$

Din (18) rezultă că îndeplinirea condițiilor la limită este posibilă, cu rigurozitate, numai în cazul profilării paletelor după metoda circulației constante

$$\frac{\partial (\bar{C}_u \bar{r})}{\bar{r}\,\partial \bar{r}} = 0 \quad \text{rezultă} \quad \bar{C}_u \bar{r} = \frac{\Gamma}{2\pi} = \text{const.}$$

Se poate arăta cu ușurință că profilarea după legea circulației constante îndeplinește și condițiile $\bar{C}_r = 0$, $\frac{\partial \bar{C}_r}{\partial \bar{z}}$, deci liniile de curent sînt situate pe cilindri concentrici.

Pentru aceasta luăm soluția particulară (3), care diferențiată în raport cu $\bar{r}\,\partial\omega$ ne dă:

$$\bar{C}_u = \frac{\partial \varphi}{\bar{r}\,\partial \omega} = \frac{1}{\bar{r}} f_1(\bar{z}) f_2(\bar{r}) f_3(\omega) \tag{19}$$

Din relația (19) obținem:

$$\frac{\partial (\bar{C}_u \bar{r})}{\partial \bar{r}} = \frac{\partial}{\partial \bar{r}} [f_1(\bar{z}) f_2(\bar{r}) f_3(\omega)] \tag{20}$$

Din (20) deducem $f_2(\bar{r}) = \text{const.}$ iar din (3)

$$\bar{C}_r = \frac{\partial \varphi}{\partial \bar{r}} = 0 \text{ și } \frac{\partial \bar{C}_r}{\partial \bar{z}} = 0$$

Pentru determinarea constantelor B_i ne vom limita la $n = 4$ termeni în dezvoltarea în serie (10), iar din condițiile în care au fost deduse

relațiile (14—16), putem scrie formula (16) succesiv pentru $p = n + 1$ poziții în lungul paletei.

$$f(\bar{r}_1) = \frac{1}{\bar{r}_1}\left[(B + B_1 + B_2) + \frac{\bar{r}_1^2}{2^2}(B_1 k_1^2 + B_2 k_2^2) + \frac{\bar{r}_1^4}{2^4 (2!)}(B_1 k_1^4 + B_2 k_2^4) + \right.$$

$$\left. + \frac{\bar{r}_1^6}{2^6 (3!)^2}(B_1 k_1^6 + B_2 k_2^6) + \frac{\bar{r}_1^8}{2^8 (4!)^2}(B_1 k_1^8 + B_2 k_2^8)\right] \qquad (21)$$

. . . . . .

. . . . . .

$$f(\bar{r}_5) + \frac{1}{\bar{r}_1}\left[(B + B_1 + B_2) + \frac{\bar{r}_5^2}{2^2}(B_1 k_1^2 + B_2 k_2^2) + \frac{\bar{r}_5^4}{2^2 (2!)^2}(B_1 k_2^4 + B_2 k_2^4 + \right.$$

$$\left. + \frac{\bar{r}_5^6}{2^6 (3!)^2}(B_1 k_1^6 + B_2 k_2^6) + \frac{\bar{r}_5^8}{2^8 (4!)^2}(B_1 k_1^8 + B_2 k_2^8)\right]$$

Cum am remarcat mai înainte, nouă ne este cunoscută legea după care sînt răsucite paletele în lungime $\bar{C}u = f(\bar{r})$ (o putem alege).

Dacă, în sistemul (21) însemnăm prin:

$$\begin{aligned} B + B_1 + B_2 &= q_1 \\ B_1 k_1^2 + B_2 k_2^2 &= q_2 \\ B_1 k_1^4 + B_2 k_2^4 &= q_3 \\ B_1 k_1^6 + B_2 k_2^6 &= q_4 \\ B_1 k_1^8 + B_2 k_2^8 &= q_5 \end{aligned} \qquad (22)$$

rezultă că din sistemul (21) determinăm $q_1 \ldots q_5$, iar din (22) apoi putem determina B, B_1, B_2, k_1, k_2.

Sistemul de ecuații algebrice (21) se rezolvă cu ajutorul determinanților:

$$q_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta_0} \cdots q_5 = \frac{\Delta_5}{\Delta_0} \text{ unde}$$

$$\Delta_o = K \begin{vmatrix} \frac{1}{\bar{r}_1} & \bar{r}_1 & \bar{r}_1^3 & \bar{r}_1^5 & \bar{r}_1^7 \\ \frac{1}{\bar{r}_2} & . & . & . & \bar{r}_2^7 \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ \frac{1}{\bar{r}_5} & . & . & . & \bar{r}_5^7 \end{vmatrix}$$

Determinarea constantelor A, A_1, A_2, C.

Debitul de aer ce trece într-o secundă prin compresor se exprimă prin relația :

$$G = 2\pi\varrho g C_{am} r_m^2 \int_{\bar{r}_i}^{\bar{r}_e} \bar{C}_a \bar{r}\, d\bar{r} \tag{23}$$

Efectuînd integrala din (23) cu înlocuirea lui $\bar{C}_a$ din (12) pentru $\omega = 0$, obținem :

$$G = \pi\varrho g C_{am} r_m^2 \{(\bar{r}_e^2 - \bar{r}_i^2) A + 2 \sum_{i=1}^{n} (A_i \cos k_i \bar{z} - B_i \sin k_i \bar{z}) \times$$

$$\times [\bar{r}_e I_1(k_i \bar{r}_e) - \bar{r}_i I_1(k_i \bar{r}_i)]\} C \tag{24}$$

Expresia (24) se mai poate scrie sub forma :

$$G - \pi\varrho g r_m^2 C_{am} C A (\bar{r}_e^2 - \bar{r}_i^2) = 2\pi\varrho g \bar{r}_m^2 C_{am} C \sum_{i=1}^{n} (A_i \cos k_i \bar{z} -$$

$$- B_i \sin k_i \bar{z}) \times [\bar{r}_e I_1(k_i \bar{r}_e) - \bar{r}_i I_1(k_i \bar{r}_i)] \tag{25}$$

Membrul stîng al acestei relații nu conține pe $\bar{z}$. Rezultă că în orice punct ne-am afla în lungul părții de trecere, membrul drept va rămîne și el constant, deci obținem sistemul de ecuații :

$$C \sum_{i=1}^{n} (A_i \cos k_i \bar{z} - B_i \sin k_i \bar{z})[\bar{r}_e I_1(k_i \bar{r}_e) - \bar{r}_i I_1(k_i \bar{r}_i)] = K \tag{26}$$

unde :

$$K = G - \pi g \varrho r_m^2 C_{am} C A (\bar{r}_e^2 - \bar{r}_i^2) \tag{26'}$$

In cazul nostru $n = 2$, scriem a doua ecuație din (26) pentru $\bar{z} = 0$ și după simple transformări obținem :

$$C A_1 (1 - \cos k_1 \bar{z}) + C A_2 (1 - \cos k_2 \bar{z}) + B_1 CM \sin k_1 \bar{z} +$$

$$+ B_2 CN \sin k_2 \bar{z} = 0 \tag{27}$$

In relația (27) au fost făcute următoarele notări :

$$M = \bar{r}_e I_1(k_1 \bar{r}_e) - \bar{r}_i I_1(k_1 \bar{r}_i)$$

$$N = \bar{r}_e I_1(k_2 \bar{r}_e) - \bar{r}_i I_1(k_2 \bar{r}_i)$$

Dacă luăm pentru $\bar{z}$ două valori în lungul axei compresorului așa încît să avem $k_n \bar{z}_n = k\pi$ determinăm cele două constante A_1 și A_2 din (27) iar apoi din (26) determinăm pe C.

Avînd toate celelalte constante, putem determina constanta A din relația (14) pentru valorile medii ale lui $\bar{r}$ și C_a.

Prin urmare $\bar{r}_m = 1{,}0$ și $C_{am} = 1{,}0$

Obținem:

$$A = \frac{1}{C} - \sum_{i=1}^{n} A_i k_i I_o (k_i)$$

sau pentru $n = 2$

$$A = \frac{1}{C} - [A_1 k_1 I_o (k_1) + A_2 k_2 I_o (k_2)] \tag{28}$$

Constantele fiind determinate se poate face o verificare în ecuația debitului, înlocuind valorile acestora. Dacă diferența între debitul admis inițial și cel rezultat din calcule nu întrece 2% ne putem opri cu calculele aici. În caz contrar trebuiesc alese alte valori pentru K_i și repetat calculul pînă se îndeplinește condiția enunțată mai sus.

În acest fel, avînd toate constantele determinate cu ajutorul relațiilor (14) ÷ (16) determinăm cîmpul de viteze în fața paletajului mobil al compresorului axial sau al turbinei cu gaze, pentru orice metodă aleasă de profilare a acestora. În cazul profilării după metoda circulației constante, în relația (16) expresia

$$B + \sum_{i=1}^{n} B_i I_o (k_i \bar{r}) = \text{const.}$$

și profilarea se poate face renunțînd la folosirea funcțiilor Bessel.

Dacă se cere o precizie mai mare în determinarea distribuției componentelor vitezei curentului în lungul razei, atunci numărul de termeni la care ne limităm n, din dezvoltarea în serie a funcției Bessel este mai mare și determinarea constantelor se poate face la mașina electronică de calcul, întrucît calculul determinanților de ordin mai mare de 5 este, cum se știe, foarte greoi. Cu tot caracterul ei laborios metoda permite determinarea vitezelor în cele mai diferite cazuri de profilare și le leagă într-un tot unitar.

Metoda se poate aplica și în cazul compresoarelor axiale sau turbinelor cu mai multe trepte, unde trebuie să se țină seama de adevăratele valori ale vitezelor din treapta precedentă.

Catedra de construcții aeronautice
Institutul politehnic București

BIBLIOGRAFIE

1. *Ciaplîghin S. A.*, Teoria reșetciatogo crîla, Sobranie socinenii T II Ghidrodinamica, Aerodinamica, Gostehizdat, 1948.

2. *Jucovski N. E.*, Vihrevaia teoria grebnego vinta, Polnoe sobranie socinenii T VI ONTI, 1936.

3. *Kocin N. E.*, „Gidrodinamicescaia teoria reșetok" GITTL, 1949.

4. *Sedov L. I.*, Ploschie zadaci ghidrodinamiki i aerodinamiki, Gostehizdat, 1954.

5. *Stepanov G. Iu.*, Ghidrodinamiceschie issledovania turbinnîh reșetok, „Obzornii biuleteni aviamotorostroenia", 1949 nr. 4 și 5.

6. *Uvarov V. V.*, „C rascetu ghidrodinamiceschih reșetok" Țiam, 1945.

7. *Stoddola A.*, Dampf- und Gasturbinen, Berlin 1924.

8. *Corter A. D. și Cohen E. M.*, Preliminary investigation into the three — dimensional flow through a cascade of aerofoils, ARC, 1946.

9. *Squire H. B., Winter K. G.*, The secondary flow in a cascade of aerofoils in a non — uniform stream, I. Aeron. Sc., 1951, vol. 18, Nr. 4.

10. *Stephenson I. M.*, Secondary flow in cascades, I. Aeron, Sc. 1951, v. 18. Nr. 18.

11. *Stanitz I. D.*, Some theoretical aerodynamic investigations of impellers in radial — and mixed flow centrifugal compressors, Trans, ASME 74, Nr. 4, 1952.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC BUCUREȘTI
Tomul XXVI — 1964, Fascicola 5

ENERGETICĂ

C.Z.: 621.3.016 : 621.165 : 697.34

METODĂ DE CALCUL A PRODUCȚIEI SPECIFICE DE ENERGIE ELECTRICĂ, MEDIE ANUALĂ, PENTRU TURBINELE DE TERMOFICARE URBANĂ *

CAMIL WLEZEK

Calculul exact al energiei electrice produse în regim de termoficare prezintă un mare interes pentru instalațiile energetice respective deoarece cantitatea de energie electrică produsă în termoficare este una din principalele componente ale economiei de combustibil realizate prin termoficare.

Pentru calculul energiei electrice produsă în termoficare, în literatură s-au preconizat mai multe metode, în funcție de tipul de consumator, agent termic etc. Pentru cazul consumatorilor urbani de căldură energia electrică produsă în termoficare se calculează frecvent cu formula:

$$E_T = Q_T \cdot y_m^{an} \tag{1}$$

unde

E_T = [kWh/an] — energia electrică produsă în termoficare;

Q_T = [Gcal/an] — cantitatea anuală de căldură livrată în regim de termoficare din turbină;

$y_m^{an} = \left[\frac{\text{kWh}}{\text{Gcal}}\right]$ — producția specifică de energie electrică medie anuală.

In formula 1, Q_T se poate calcula suficient de precis cunoscîndu-se valoarea consumului orar de căldură, coeficientul de termoficare, alura curbei clasate, structura consumului etc., după cum s-a mai arătat în literatură [*B*—1].

Deoarece prin natura lui, y_m^{an} reprezintă sinteza unui foarte mare număr de factori, de multe ori contradictorii, atît în practică, cît și în lite-

* Lucrare comunicată la sesiunea științifică a cadrelor didactice din Institutul politehnic București, 22—23 februarie 1964.

ratura de specialitate se prezintă o gamă largă de valori ce diferă între ele pînă la 30%. Acest lucru face ca aceste valori să nu poată fi luate în considerare fără o prealabilă verificare și o cunoaștere a condițiilor de calcul. Mai mult chiar, se face frecvent greșeala de a se adopta în loc de y_m^{an}, o valoare orară indicată în literatură, cu titlul informativ, fără să se precizeze condițiile de calcul, dacă cuprinde sau nu și aportul termoficării interne, pentru ce alură a curbei consumului și a structurii lui, etc., a fost calculată.

Avînd în vedere această situație, în lucrarea de față se propune calcularea lui y_m^{an} printr-o metodă grafo-analitică în care să se analizeze toți factorii de care depinde producția specifică medie anuală de energie electrică și modul cum influențează aceștia.

Acești factori depind de sistemul de termoficare ales și sînt legați de:
— caracteristicile consumului de căldură;
— rețeaua de termoficare;
— instalația de termoficare din centrală, inclusiv turbina și caracteristicile ei de exploatare.

Deci pentru obținerea unei valori reale pentru y_m^{an} trebuie analizat întregul ansamblu al sistemului de termoficare: consumator — rețea de termoficare — turbină, ținînd seama de specificul și particularitățile fiecăruia.

Consumul de căldură urban datorită caracteristicilor sale impune prin intermediul rețelei de termoficare regimul de funcționare al prizelor turbinelor de termoficare din centrală și în consecință regimul de producere a energiei electrice în termoficare. Schimbarea caracteristicilor consumului, a sistemelor de preparare a apei calde menajere etc. conduce la modificarea parametrilor la care este cerută căldura și acestea se reflectă în turbină prin modificarea regimului de presiuni al prizelor și a cantităților de căldură livrate din prize la diferite presiuni.

Rețeaua de termoficare influențează asupra lui y_m^{an} prin natura graficului termic ales pentru transportul căldurii.

Turbina influențează asupra lui y_m^{an} prin valoarea momentană a producției specifice de energie electrică în termoficare y_h, în care trebuie luată în considerație influența termoficării interne, influența coeficientului de termoficare, graficul de exploatare al turbinei etc.

1. Consumatorul de căldură

Caracteristicile consumatorului de căldură care conduc la modificări ale valorii lui y_m^{an} sînt:
— regimul consumului de căldură și natura lui;
— structura consumului de căldură;
— modul de preparare a apei calde menajere.

Modificările legate de aceste caracteristici se reflectă prin schimbările de perametri la care este cerută căldura în timpul anului și prin modificarea graficelor de reglare a temperaturii apei în rețea.

1.1. *Natura și regimul consumului de căldură*

Toate considerațiile care se fac în această lucrare se referă la consumul de căldură urban solicitat pentru încălzire și apă caldă menajeră.

Consumul urban total de căldură este format din consumul de căldură pentru încălzire, a cărui valoare este direct dependentă de temperatura exterioară a aerului conform formulei

$$q_{înc} = x \cdot V(t_i - t_e) \quad [\text{kcal/h}] \tag{2}$$

la care se adaugă valoarea consumului de căldură pentru apa caldă menajeră reprezentată printr-un raport „γ" astfel încît valoarea relativă a consumului total de căldură „α_h" poate fi exprimată cu ajutorul formulei:

$$\alpha_h = \gamma + (1 - \gamma)\frac{t_i - t_e}{t_i - t_{ec}} \tag{3}$$

In formulele 2 și 3 semnificația indicilor este:

$x = \left[\frac{\text{Kcal}}{\text{m}^3\,\text{h}\,^\circ\text{C}}\right]$ — caracteristica termică de încălzire;

$V = [\text{m}^3]$ — volumul de încălzire;

$t_i = [+20\,^\circ\text{C}]$ — temperatura interioară a aerului;

$t_e = [^\circ\text{C}]$ — temperatura exterioară a aerului;

$t_{ec} = [^\circ\text{C}]$ — temperatura exterioară de calcul a aerului;

$\gamma = \frac{q_m^{ac}}{q}[\%]$ — cota de apă menajeră, reprezentată ca o valoare constantă din consumul total de căldură.

Consumul de căldură pentru încălzire variază în cursul anului și această variație se reprezintă prin curba clasată a consumului de căldură care depinde de natura consumatorilor, de tipul de construcție adoptat, de condițiile climatologice etc., și este specifică fiecărei țări sau chiar regiuni.

Pentru condițiile din R.P.R. clasarea s-a făcut ținînd seama de curbele clasate a temperaturii medii zilnice a aerului și de valorile temperaturilor exterioare de calcul conform STAS în vigoare pentru circa 10 cente din țară (fig. 1).

1.2. *Structura consumului de căldură.*

Conform celor arătate la cap. 1.1. consumul urban de căldură este format din consum de căldură pentru încălzire și consum de căldură pentru apa caldă menajeră.

Apa caldă menajeră avînd un alt regim de consun decît căldura pentru încălzire, fiind cerută la temperatură constantă și relativ scăzută (+ 60°C) ar putea fi furnizată de prizele turbinelor de termoficare la contra presiuni constante și scoborîte, ($p_2 = 0{,}5$ at).

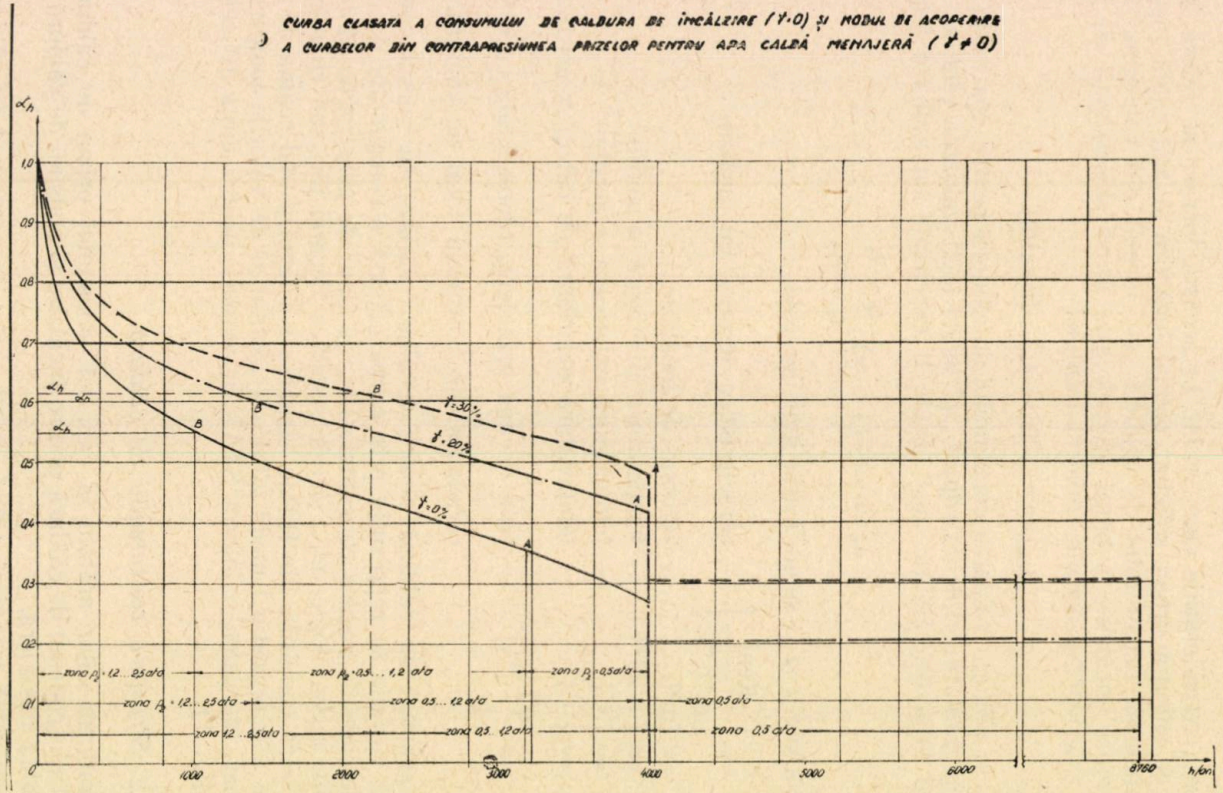

CURBA CLASATA A CONSUMULUI DE CALDURA DE ÎNCĂLZIRE (γ=0) ȘI MODUL DE ACOPERIRE
A CURBELOR DIN CONTRAPRESIUNEA PRIZELOR PENTRU APA CALDĂ MENAJERĂ (γ≠0)
α_h
1,0
0,9
0,8
0,7
0,6
0,5
0,4
0,3
0,2
0,1
0
1000
2000
3000
4000
5000
6000
6760
h/an
γ=30%
γ=20%
γ=0%
A
B
zona β_2=1,2...2,5 α/σ
zona β_2=1,2...2,5 α/σ
zona β_2=1,2...2,5 α/σ
zona β_2=0,5...1,2 α/σ
zona 0,5...1,2 α/σ
zona 0,5...1,2 α/σ
zona β_2=0,5 α/σ
zona 0,5 α/σ
zona 0,5 α/σ
zona 0,5 α/σ

Fig. 1

Deoarece livrarea se face în comun cu consumul de încălzire și prin aceiași rețea de termoficare efectul cotei de căldură pentru apa caldă menajeră se face simțit direct asupra curbei clasate combinat cu efectul căldurii pentru încălzire și indirect asupra prizelor turbinelor prin intermediul rețelei și a metodelor de preparare a apei calde menajere la consumator.

S-au luat în considerare două structuri ale consumului:

— un consum numai de încălzire ($\gamma = 0$)

— un consum format din 70% încălzire și 30% apă caldă ($\gamma = 30\%$).

Curbele clasate a consumului de căldură pentru structurile de mai sus se dau în fig. 1.

1.3. *Prepararea apei calde menajere la consumator.*

Căldura pentru cota de apă caldă menajeră se transportă prin intermediul rețelei de termoficare împreună cu cota de căldură pentru încălzire. Separarea celor două componente se face la consumator, cota de căldură pentru apă caldă menajeră extrăgîndu-se printr-un procedeau oarecare. Încălzirea apei potabile de la temperatura de 5—15°C pînă la temperatura de utilizare (+ 60°C) se face cu ajutorul apei fierbinți din rețeaua de termoficare.

În prezent există mai multe procedee de preparare a apei calde menajere, unele influențînd asupra debitului de apă din rețea, altele asupra temperaturilor din graficul de reglare.

S-au luat în considerare următoarele procedee:

1. prepararea apei calde menajere în două trepte serie cu adoptarea graficului de reglare calitativ corectat intensiv (grafic calitativ) (fig. 2 a).

2. prepararea apei calde menajere în două trepte cu adoptarea graficului de reglare calitativ cu corecție de debit (grafic calitativ-cantitativ) (fig. 2 b).

3. prepararea apei calde menajere într-un boiler racordat paralel cu sistemul de încălzire (fig. 2 c).

Metoda de preparare a apei calde menajere la consumator și în special metoda de preparare a apei în două trepte serie conduce la modificarea graficului de reglare adoptat, schimbînd temperaturile apei din conducta de ducere și conducta de întoarcere. S-a constatat că aceste modificări sînt cu atît mai mari cu cît este mai mare cota de apă caldă menajeră și cu cît temperaturile nominale de calcul ale apei în rețea sînt mai ridicate.

În cazul graficului de reglare calitativă prepararea apei calde menajere la consumator în două trepte serie conduce după cum se va vedea în capitolul 2 la:

— scăderea temperaturii în conducta de întoarcere atît la situația de calcul cît și în punctul de inflexiune;

— ridicarea temperaturilor pe conducta de ducere în punctul de inflexiune ;

— deplasarea punctului de inflexiune (fig. 3).

Deoarece primul procedeu este cel mai utilizat, calculele s-au făcut pentru acesta, celelalte analizîndu-se comparativ.

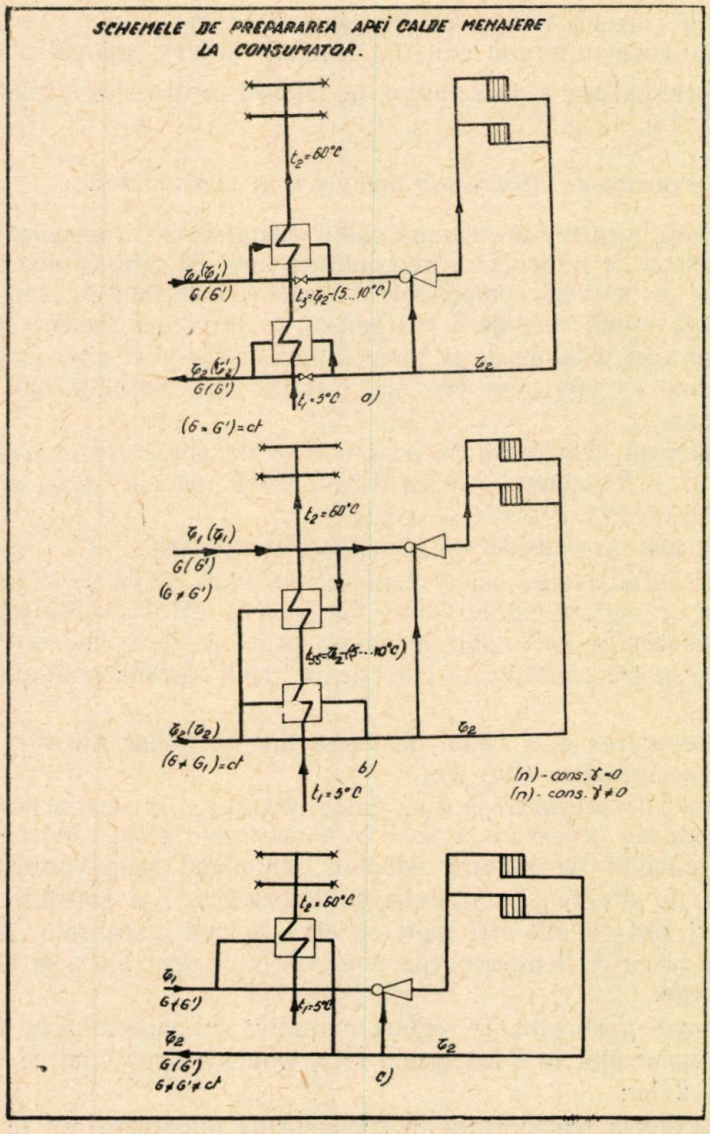


Fig. 2

2. *Rețeaua de termoficare.*

Rețeaua de termoficare se caracterizează prin metoda de reglare adoptată pentru transportul căldurii intitulată „graficul de reglare a căldurii".

GRAFIC DE REGLARE CALITATIV AL TEMPERATURILOR APEI ÎN REȚEAUA DE TERMOFICARE.

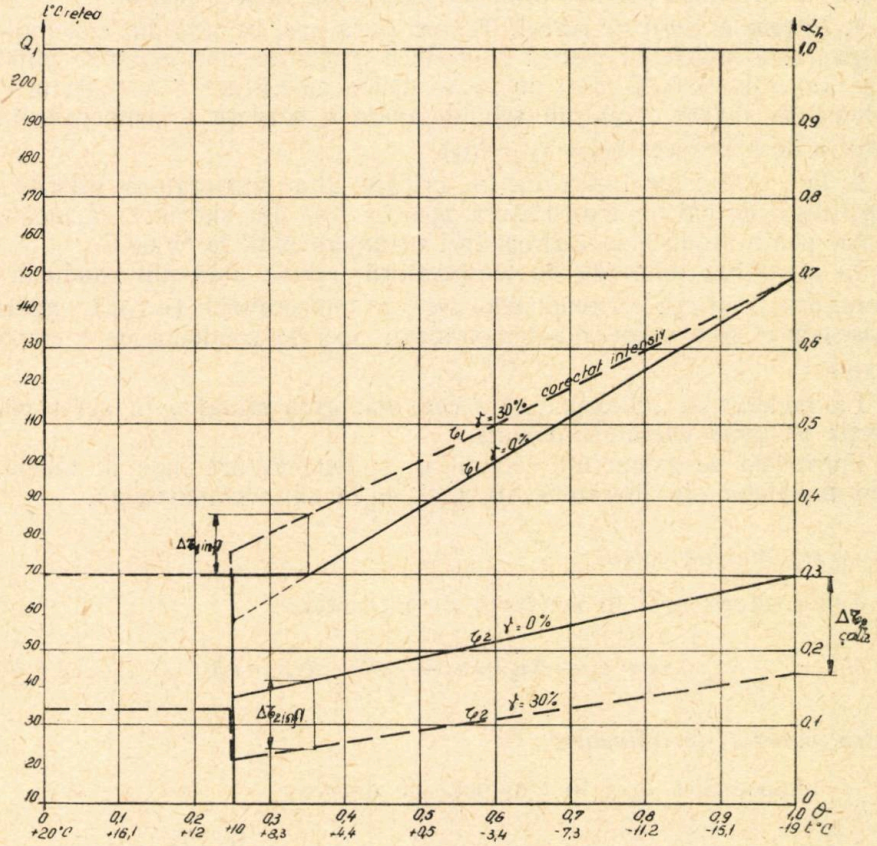


Fig. 3

Dintre graficele de reglare folosite, cel mai mult utilizat este graficul calitativ în care căldura se livrează consumatorului în funcție de temperatura exterioară a aerului pe baza unei diagrame de reglare.

În acest grafic de reglarea, temperaturii apei în conducta de ducere și cea de întoarcere se comandă în funcție de temperatura exterioară a aerului (fig. 3).

Graficul de reglare calitativ nu ține seama decît de nevoile de căldură pentru încălzire, debitul de apă din rețea fiind dat de formula

$$G = \frac{q_{inc}}{C(\tau_1 - \tau_2)} \text{ [kg/h]} \tag{4}$$

Dacă la consumul de căldură pentru încălzire se adaugă și necesarul pentru apă caldă menajeră, în cazul preparării apei calde menajere în două trepte serie, debitul de apă de rețea păstrîndu-se constant ($G = ct$), pentru a se putea transporta o cantitate mărită de căldură este necesară o corectare a temperaturilor apei de rețea după cum urmează:

1. *la temperatura de calcul.* Temperatura apei ce iese din sistemul de încălzire este suficientă pentru a produce încălzirea apei potabile pînă la temperatura de + 60°C, deci nu apare nici o modificare a temperaturii pe conducta de ducere (τ_1), în schimb apare o scădere a temperaturii pe conducta de întoarcere ($\tau_2' = \tau_2 - \Delta\tau_2$).

2. *la punctul de inflexiune* și oricare altă temperatură diferită de temperatura de calcul, temperatura apei ce iese din sistemul de încălzire nu mai poate produce încălzirea apei menajere pînă la + 60°C.

În acest caz diferența de temperatură trebuie dată din conducta de ducere prin mărirea corespunzătoare a temperaturii ($\tau_{1\,infl.}'$) apărînd de asemenea și o scădere a temperaturii apei în conducta de întoarcere ($\tau_{2\,infl.}^{1}$).

La punctul de inflexiune este cea mai grea situație, în acest punct corecția atingînd valoarea maximă.

Formulele de calcul ale corecțiilor de temperatură date în tabela 1, conform datelor din literatură (B 2, 3, 4, 7) sînt următoarele:

Pentru regimul de calcul:

Temperatura apei în conducta de întoarcere:

$$\tau_2' = \tau_2 - \Delta\tau_2 = \tau_2 - \frac{\gamma}{1-\gamma}(\tau_1 - \tau_2) \tag{5}$$

Pentru punctul de inflexiune:

— temperatura apei în conducta de ducere:

$$\tau_1' = \tau_1 + \Delta\tau_1' = \tau_1 + \frac{\gamma}{1-\gamma}(\tau_1 - \tau_2)\frac{t_1 - t_3}{t_2 - t_1} \tag{6}$$

— temperatura apei în conducta de întoarcere:

$$\tau_{2\,infl.}' = \tau_{2\,infl.} - \Delta\tau_{2\,infl.} = \tau_{2\,infl.} - \frac{\gamma}{1-\gamma} \cdot \frac{t_3 - t_1}{t_2 - t_1}(\tau_1 - \tau_2) \tag{7}$$

unde semnificația indicilor este dată în fig. 2 și 3.

Tabela nr. 1

Structura consumului	$\tau_{1\ calcul}$	$\tau_{2\ calcul}$	$\tau_{1\ infl.}$	$\tau_{2\ infl.}$
$\gamma = 10\ \%$	150	70	70	41,7
$\gamma = 20\ \%$ (val. R.P.R.)	150	50	79,5	81,2
$\gamma = 30\ \%$	150	36	86,2	23,7

Dacă se ține seama de timpul cît sînt necesare aceste temperaturi ale apei în rețea se poate trasa curba clasată a temperaturilor apei în rețea care se dă în fig. 4.

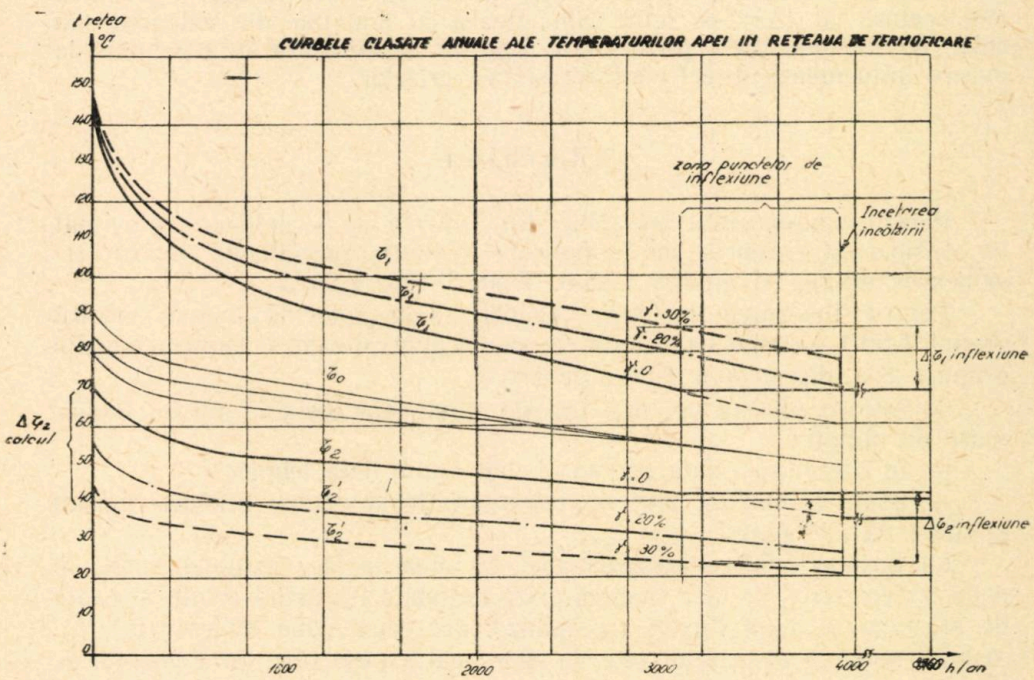


Fig. 4

Din diagramele trasate în fig. 3 și 4 se constată că :

1. Corecțiile temperaturilor apei din rețeaua de termoficare cresc în valori absolute cu creșterea cotei de apă caldă menajeră (γ).

2. Scăderea temperaturii apei în conducta de întoarcere are valoarea cea mai mare pentru condițiile de calcul.

3. Creşterea temperaturii apei în conducta de ducere are valoarea maximă la punctul de inflexiune.

4. Scăderea temperaturii apei în conducta de întoarcere este practic anulată de creşterea temperaturii în conducta de ducere ajungînd că la punctul de inflexiune să fie aproape zero.

5. Cu creşterea cotelor de apă caldă menajeră se măreşte durata de funcţionare a reţelei de termoficare la temperaturi mai ridicate în reţea decît la o sarcină termică de încălzire.

6. Temperatura apei în conducta de ducere în cea mai mare parte a anului se află sub 95°C şi numai 1 000—2 000 h/an în funcţie de cota de apă caldă menajeră se depăşeşte această temperatură, iar temperaturile peste 120°C nu depăşesc 100—200 h/an.

Din punct de vedere energetic este foarte avantajoasă scăderea temperaturii apei din reţea la întoarcerea în centrală, dar într-o măsură şi mai mare este dezavantajoasă ridicarea temperaturii la ducere în jurul punctului de inflexiune, deoarece după cum se va vedea la cap. 3 scăderea temperaturii cu „$\Delta\tau$" pe retur influenţează cu jumătate din valoarea sau chiar de loc presiunea prizelor în timp ce temperatura în conducta de ducere influenţează direct contrapresiunea prizelor.

3. Turbina

Pentru echipamentul energetic din centrala de termoficare s-au luat în considerare grupurile de termoficare moderne specializate pentru termoficarea urbană şi anume T-25-5, T-50, T-100, T-250.

Pentru ilustrarea metodei calculele s-au întocmit numai pentru grupul T-50-1, urmînd ca rezultatele să fie generalizate şi pentru celelalte grupuri. S-a ales grupul T-50-1 deoarece:

— este în prezent cel mai utilizat fiind deja instalat într-un număr mare de unităţi;

— în literatură există pentru el mai multe date tehnice;

— poate fi luat ca prototip reprezentativ şi pentru celelalte maşini similare de alte puteri.

La turbina T-50-1 încălzirea apei de reţea se face în două trepte, în două boilere serie, de la o singură priză reglabilă împărţită printr-o treaptă de presiune în două fluxuri corespunzătoare celor două boilere (fig. 5). Debitul nominal al prizelor este de 92,5 Gcal/h (180 t/h), iar domeniul de variaţie al presiunii este cuprins între 0,5—2,0 at pentru boilerul B-1 şi 0,6—2,5 at pentru bolierul B-2.

Presiunea de prize este impusă de temperatura apei de reţea şi de modul în care se face împărţirea sarcinei termice între cele două boilere.

Asupra funcţionării boilerelor la turbina T-50-1 se fac următoarele precizări:

— Boilerul B-2 nu poate funcţiona cu apă mai rece de 75°C.

— Boilerul B-1 nu poate funcţiona cu apă mai rece de 35°C.

Pentru calculul precis a lui y_m^{an} an nu s-a putut folosi direct diagrama de regimuri a turbinei deoarece aceasta nu este suficient de precisă și nu sesizează micile diferențe de temperaturi de ordinul a 8—10°C. Diagrama de regimuri a fost utilizată pentru verificări.

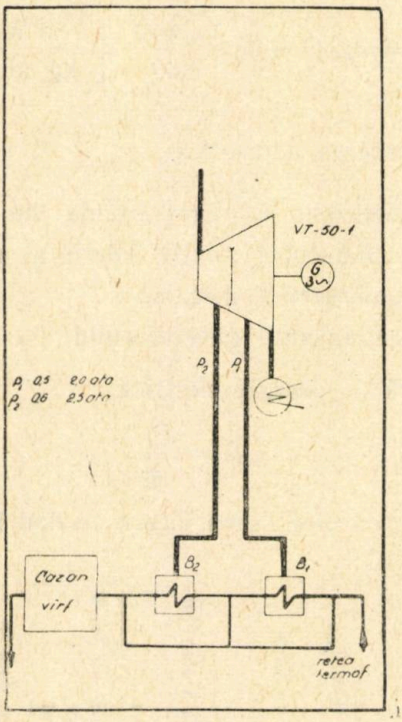


Fig. 5

3.1. *Producția specifică momentană de energie electrică „y_h"*

Căldura livrată la prizele de termoficare este debitată sub formă de abur la o presiune corespunzătoare temperaturii graficului rețelei. Aburul destinzîndu-se de la presiunea de intrare în turbină pînă la presiunea prizei produce un lucru mecanic care în mod frecvent este exprimat în funcție de căldura livrată de priza turbinei în kWh/Gcal și poartă denumirea de producția specifică de energie electrică „y_h".

Producția specifică „y_h" depinde în principal de:

— tipul turbine;
— parametrii inițial ai aburului;
— parametrii aburului la priză;
— coeficientul de termoficare internă;
— graficul de reglare al turbinei;

Pentru calculul lui *yh* s-a adoptat metoda simplificată indicată în literatură [B-4] pentru calculul producției de energie electrică în regim de termoficare și rezultatele au fost comparate cu cifrele de garanție ale mașinii luate din literatură (B-5) și cartea tehnică a mașinii (B-6).

Puterea electrică produsă de un kg de abur livrat la priză :

$$P_t = h_{ad}(1+\beta)\frac{\eta_m \eta_i \eta_g}{860}\left[\frac{\text{kW}}{\text{kg abur}}\right] \tag{8}$$

unde :

$h_{ad} = \left[\frac{\text{kcal}}{\text{kg}}\right]$ — căderea adiabatică

$\beta = [\%]$ — coeficient ce ține seama de termoficarea internă

$\eta_i = 0{,}835$ — randamentul relativ intern al mașinii

$\eta_m = 0{,}985$ — randamentul mecanic

$\eta_g = 0{,}986$ — randamentul generatorului

iar producția specifică de energie electrică

$$y_h = \frac{P_t}{q} \tag{5}$$

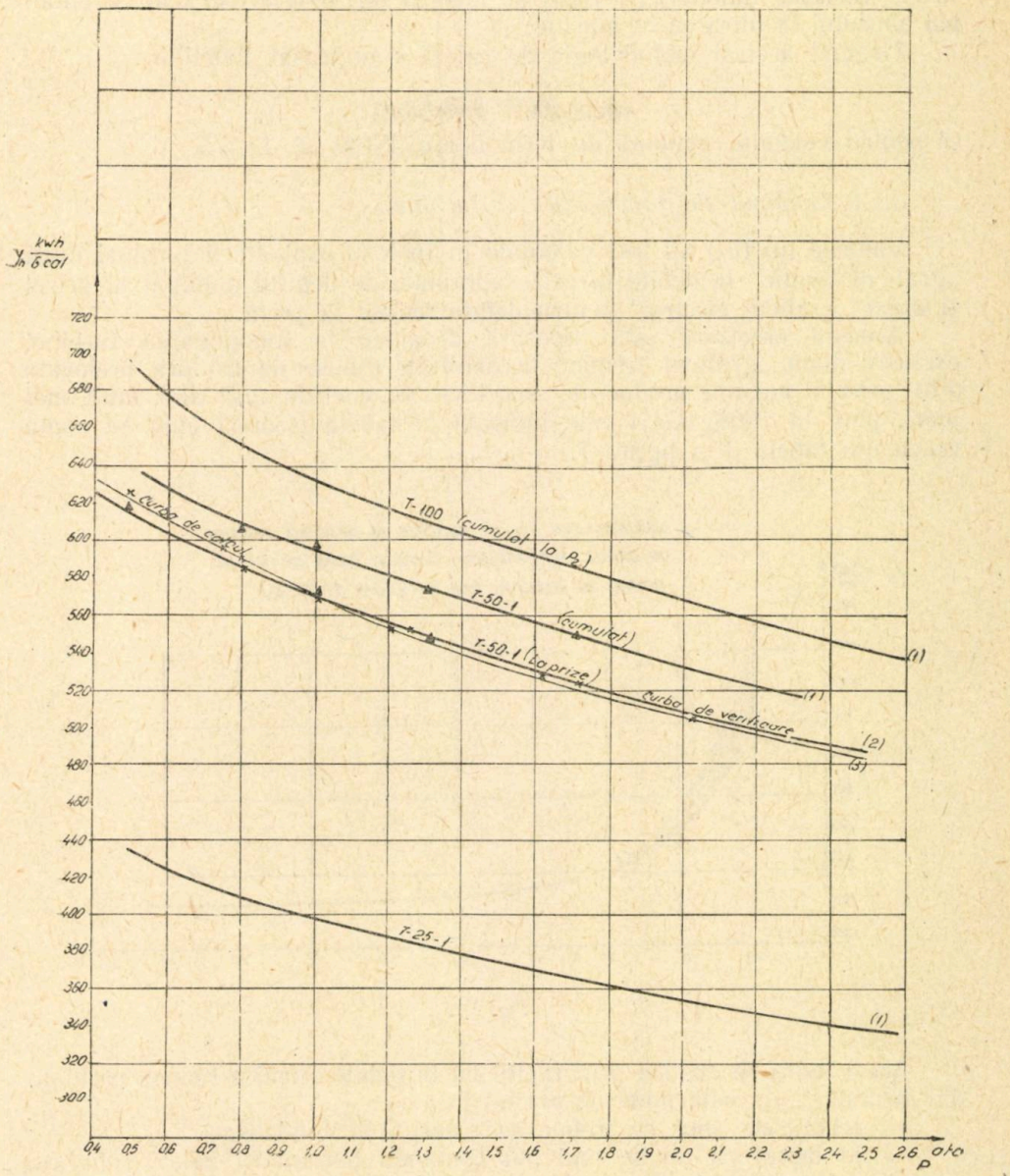
Valorile de calcul și cele de verificare se dau în tabela 2.

Tabela nr. 2

Presiunea prizei p_2 (ata)	Entalpia teoretică a aburului la priză i_2 (Kcal/kg)	Temp. de saturat. la pres. de priză $t_s = i_s$ (°C)	Căderea adiabatică $h_{ad} = i_0 - i_2$ (Kcal/kg)	Coeficient termoficare internă β	Entalpia reală a aburului la priză $i'_2 = i_0 - \eta_i h_{ad}$	Căldura livrată din priză pe kg de abur $i'_2 - i_s$ k cal/kg	Puterea electr. dată în termoficare P_t (kW/kg abur)	Producția specifică de energie electrică de calcul y_h (kW h/G cal)	Producția specifică de energie electrică de verificare y_h (kW h/G cal)
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0,5	555	285	80,9	0,230	602	521,1	332	628	620
0,8	571	269	93,0	0,215	615	521,9	309	591	586
1,0	579	261	99,1	0,210	622	522,6	297	586	580
1,2	585	255	104,2	0,205	627	522,9	290	555	556
1,6	596	244	112,7	0,201	636	523,1	276	528	531
2,0	605	235	119,6	0,195	644	524,1	264	506	508
2,5	614	226	125,8	0,192	652	524,8	254	484	486

Indicii s-au obținut din trasarea în diagrama *i-s* a curbei de destindere politropică a mașinei calculată după B-5 și B-6, iar valorile coeficientului β s-au luat din diagramele indicate în B-4. Reprezentarea gra-

VARIAȚIA PRODUCȚIEI SPECIFICE DE ENERGIE
ELECTRICĂ ÎN FUNCȚIE DE PRESIUNE LA PRIZĂ.



LEGENDA

× Valori calculate
▲ Valori de verificare cifre de garanție
curba 1 reprezintă γ_h total raportat la presiunea bailerului B2
curba 2,3 reprezintă γ_h pe fiecare priză la presiunea prizei respective

Fig. 6

fică a variației funcției $y_h = f(p_2)$ se face în fig. 6 · $i_0 = 840$ kcal/kg entalpia aburului la intrarea în mașină.

Urmînd aceiași metodologie de calcul s-au trasat funcțiile

$$y_h = f(p_2)$$

și pentru celelalte grupuri de termoficare T-100 și T-25-5.

3.1.1. *Graficul de funcționare a turbinei.*

Valorile lui (y_h) au fost calculate în ipoteza exploatării turbinei după „graficul termic" la debite la prize apropiate de debitul nominal al prizei și după „graficul electric" pentru debite reduse la priză.

Această precizare este necesară deoarece la funcționarea turbinei exclusiv după „graficul termic" la cantități reduse de căldură prelevate prin prizele mașinii producțiile specifice de energie „y_h" sînt mult mai mari, pînă la 100% decît cele indicate în tabela 2 după cum se poate vedea din tabela 3 și figura 7.

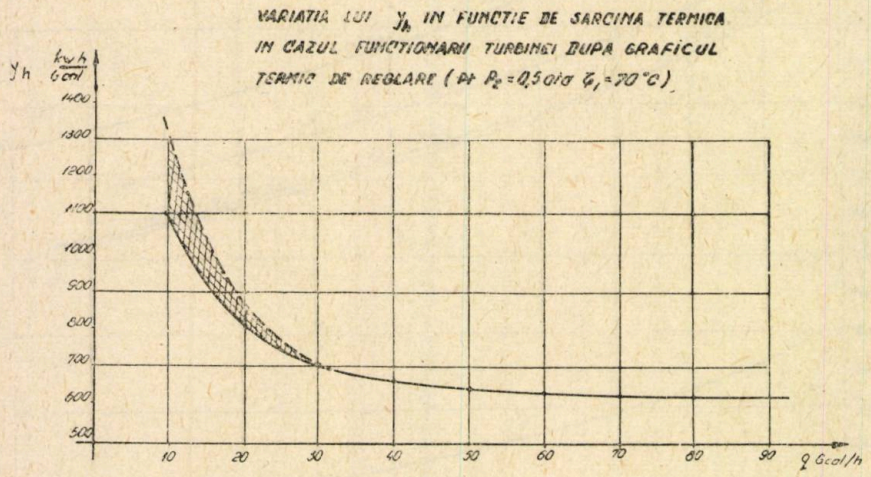


Fig. 7

Acest lucru se explică prin faptul că la debite termice reduse preluate din turbină, „y_h" este puternic afectat de:

— debitul de abur ce trebue să meargă în condensator;

— de faptul că nu se mai pot comanda parametrii căldurii livrate prin diafragma prizei, ci numai prin variația nivelului general al presiunilor în turbină prin mărirea debitului de abur introdus în mașină;

— de aportul relativ mai ridicat al termoficării interne.

Însă exploatarea marilor agregate energetice de 50—250 MW — la puteri de ordinul 10—20 MW pentru a fi reglate după „graficul termic" conduce la regimuri neeconomice de funcționare, și pe de altă parte

acestea nu sînt situații normale de funcționare, grupurile mari fiind exploatate în general după „graficul electric" dictat de sistemul energetic care le impune regimuri de funcționare la puteri cu mult peste 50% *Pn*.

Tabela nr. 3

Variația lui „y_h" cu sarcina termică pentru $p_2 = 0{,}5$ ata și $\tau_1 = 70$ °C în cazul funcționării turbinei după „graficul termic"

Debitul de căldură livrat din prize		Puterea electrică în termoficare MW	Producția specifică de energie electrică kWh/G cal
G cal/h	%		
92,5	100	57,5	620
80	86,5	49,5	620
70	75,5	44,5	630
60	64,8	38	635
50	54,0	32	640
40	43,2	26,5	660
30	32,5	21	700
20	21,5	15	750... 850
10	10,8	11	1100... 1400
0	0	0	0

3.2. *Schema preparării apei de rețea la centrală.*

Pentru a se vedea modul în care este influențată producția de energie electrică de graficul de reglare al rețelei și deci de temperaturile apei din rețea, trebuie analizată schema de încălzire a apei de rețea în cadrul centralei de termoficare și la turbină.

Încălzirea apei de rețea în centrală pentru grupurile moderne de termoficare se face conform schemei din fig. 5 în două boilere serie la turbină, vîrful sarcinei termice perluîndu-se din cazane de vîrf.

La prepararea apei la turbină într-un singur boiler, temperatura de plecare a rețelei (τ_1) impune presiunea pînă la care se destinde aburul de priză, astfel că nu se poate fructifica scăderea temperaturii pe conducta de întoarcere datorită preparării apei calde la consumator în două trepte serie.

Prepararea apei la turbină în mai multe boilere serie are ca urmare o divizare a ecartului de temperatură în care urmează să se încălzească apa în turbină în două sau mai multe trepte. Acest lucru conduce la posibilitatea destinderii aburului de priză pînă la presiuni mai scăzute și astfel la fructificarea temperaturilor mai scăzute ale apei de rețea, cel puțin 1/2—1/3 din căldură urmînd a fi livrată la o presiune mai scăzută.

La împărțirea sarcinei pe cele două boilere, se stabilesc în funcție de temperatura apei de plecare și cantitatea de căldură cerută, presiunile de

funcționare pe cele două boilere. Presiunea p_2 a boilerului B_2 este mai mare decît presiunea p_1 a boilerului B_1 fiind impusă de temperatura de plecare a apei în rețea cu care trebuie să iasă din turbină. Presiunea p_1 este impusă de temperatura „τ_a" care este la rîndul ei comandată de modul de împărțire a sarcinei pe cele două boilere.

La cap. 2 s-a arătat că pentru producerea de energie electrică, scăderea temperaturii pe retur datorită preparării apei calde menajere în două trepte serie cu grafic de reglare corectat intensiv, are o influență mai mică decît creșterea temperaturii pe ducere.

„$\Delta\tau_2$" obținută prin scăderea temperaturii pe conducta de întoarcere nu poate fi fructificată decît parțial deoarece:

— „$\Delta\tau_2$" se împarte pe cele două boilere practic în mod egal dar numai asupra boilerului B_1 are influență producînd scăderea temperaturii „τ_a" cu aproximativ $\frac{\Delta\tau_2}{2}$ și conducînd la o creștere a producției specifice de energie „y_{h_1}" cu Δy_1.

— temperaturi „τ_a"$< 70°C$ nu pot fi fructificate deoarece presiunea de priză nu se poate scădea sub 0,5 at.

— „$\Delta\tau_1$" cu care crește temperatura pe conducta de ducere acționează cu valoarea integrală asupra boilerului B_2 conducînd la o creștere corespunzătoare a presiunii la 2 prize și la o scădere resepectivă a lui „y_{h_2}" cu Δy_2.

— dacă se ține seama și de durata de funcționare a rețelei cu temperaturile ridicate din jurul punctului de inflexiune, se constată că în funcție de valoarea lui „γ" un număr mare de ore pe an boilerul B_2 merge cu producții specifice de energie y_{h_2} mai scăzute decît în cazul sarcinei de încălzire ($\gamma = 0$).

Cîștigul de energie „Δy_1" obținut prin scăderea temperaturii pe conducta de întoarcere cu $\Delta\tau_2 = 15—25°C$ cît se obține maxim la regimul de calcul în conducta de retur este de cca. $10—12 \frac{kWh}{Gcal}$ pentru cazul $\gamma = 20\%$ și de $18—22 \frac{kWh}{Gcal}$ pentru $\gamma = 30\%$.

În schimb pierderea de energie „Δy_2" datorită ridicării temperaturii cu cca. 16°C în conducta de ducere în zona de inflexiune este de ordinul 30—35 kWh/Gcal pentru $\gamma = 30\%$.

Dacă cîștigul de energie Δy_1 și pierdere de energie Δy_2 sînt asociate cu duratele de timp respective se ajunge la concluzia că pentru perioada de iarnă prepararea apei menajere în două trepte serie prin corectarea intensivă graficului produce o scădere a producției specifice de energie cuprinsă între 0 și 15 kWh/Gcal adică cu circa 0—2,0%.

Cu creșterea cotei de apă caldă menajeră, efectul de scădere a lui y_m^{an} în timpul iernii este compensat parțial de efectul creșterii lui y_m^{an} în timpul verii datorită faptului că se produce o mare cantitate de energie la contrapresiune scoborîtă pentru alimentarea cu apă caldă menajeră în timpul verii.

3.3. *Împărțirea sarcinei termice pe cele două boilere.*

Din datele de calcul termic ale turbinei T-50-1 (B-6) pentru diverse regimuri de sarcini termice s-a putut constata că cele două boilere ale mașinii se pot încărca în mod normal cu sarcini după cum urmează:

— boilerul B_1 cu sarcina termică q_1, cuprinsă între 40—70% q

— boilerul B_2 cu o sarcină termică q_2 cuprinsă între 60—30% q.

— Făcînd o analiză a modului de împărțire a sarcinei termice și a repercursiunilor pe care le are asupra producției de energie electrică s-a

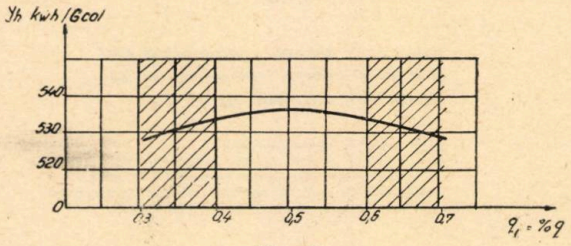


Fig. 8

constatat că „y_h" pentru întreaga turbină variază cu raportul q_1/q_2 avînd valoarea maximă cînd

$$q_1 = q_2 = 0{,}5\ q$$

De asemenea se poate observa din tabela 4 că în limitele

$$q_1 = (0.5 \pm 0{,}1)\ q$$

variația lui y_h față de $y_{h_{max}}$ este foarte mică astfel că se poate spune cu destulă precizie că sarcina termică se împarte principial în mod egal pe cele două boilere (fig. 8).

Tabela nr. 4

Specificație		q_1 = % q				
		0,3	0,4	0,5	0,6	0,7
Producția specifică de energie pe turbină y_h kWh/Gcal		528	532	535	533	526
Δy	kWh/Gcal	7	3	0	2	9
	%	0,13	0,056	0	0,038	0,17

Valorile lui y_h pentru întreaga turbină s-au calculat pe baza diagrameior $y_h = f(p_2)$ din fig. 6 ținînd seama de căldura livrată de fiecare boiler în valori relative conform formulei:

$$y_h = q_1 \cdot y_{h_1} + q_2 \cdot y_{h_2} \tag{10}$$

3.4. *Curba clasată a lui „y_h“.*

Pentru a se putea calcula y_m^{an} este necesar după cum s-a arătat mai sus să se cunoască valoarea lui „y_h“ pe fiecare boiler și în plus modul de variație al lui „y_1“ în cursul anului în funcție de:

— coeficientul de termoficare (α_h)

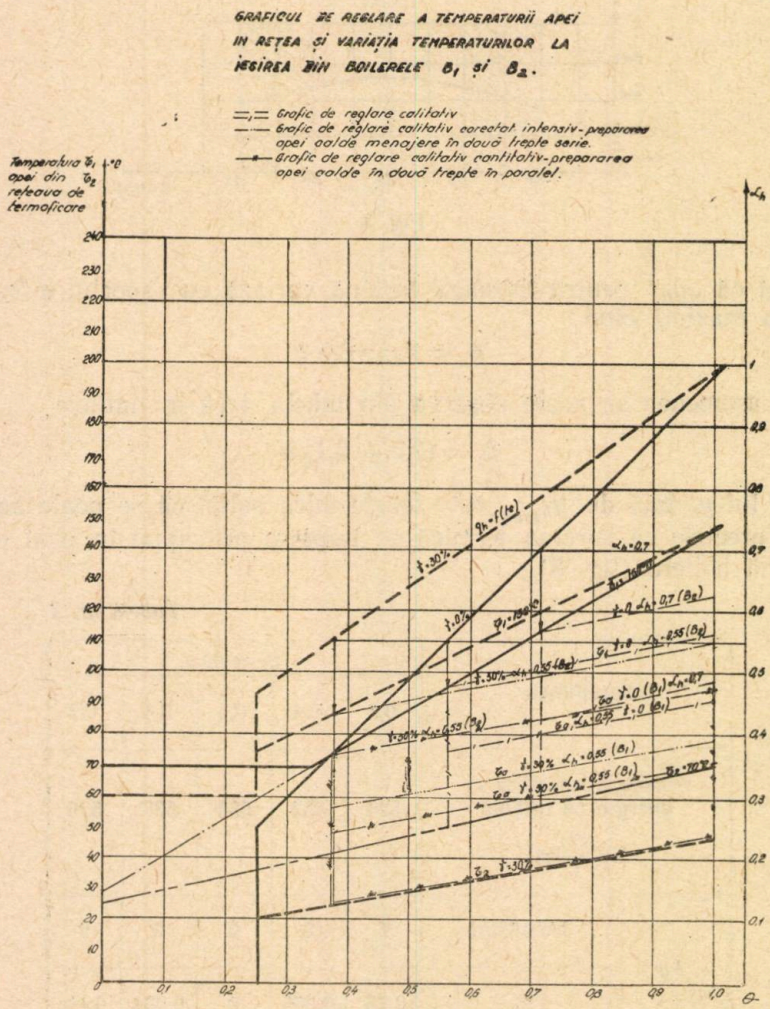


Fig. 9

CURBA CLASATĂ A LUI „γ_h" PENTRU BOILERUL B_1 ȘI B_2 LA GRUPUL T-50-1 IN CAZUL:

- preparării apei calde menajere în două trepte serie.
- sarcină termică combinată $\gamma = 30\%$.

--- presiunea minimă la priză 0,5 ata
——— presiunea minimă la priză poate scădea sub 0,5 ata

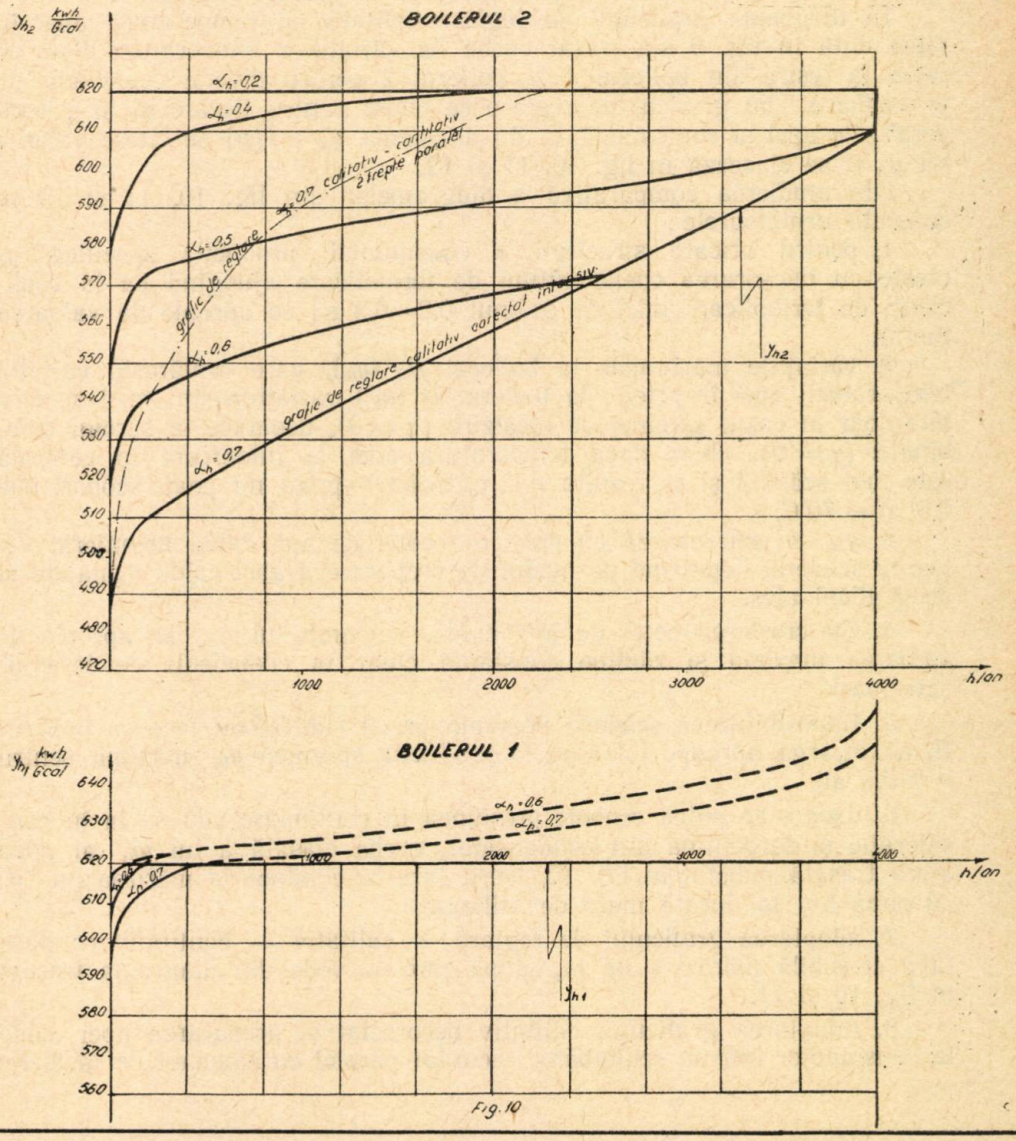


Fig. 10

— structura consumului de căldură (γ)

— tipul de grafic de reglare al rețelei de termoficare și modul de preparare a apei calde menajere.

Variația lui y_h în funcție de factorii specificați se dă în curba clasată a lui y_h calculată separat pentru B_1 și B_2, pentru $\gamma = 0$ și $\gamma = 30\%$ în cazul mai multor coeficienți de termoficare și pentru graficele de reglare și modalitățile de preparare a apei calde menajere arătate la cap. 2.1.

Curbele clasate ale lui „y_h" s-au trasat pentru fiecare boiler în parte, în funcție de temperatura pe care trebuie să o asigure conform graficului de reglare a temperaturii apei în rețea (fig. 3, 4) și producția specifică corespunzătoare presiunii stabilite conform diagramei din fig. 6.

În diagrama graficului de reglare calitativ al temperaturii apei în rețea dată în fig. 9 s-a trasat curba de variație a temperaturii apei de rețea la ieșire din boilerul 1 și boilerul 2 pentru diverși coeficienți de termoficare. Din graficul de reglare se citesc pentru fiecare α_h și γ temperaturile apei și corespunzător din diagrama $y_h = f(p)$ se citesc valorile lui y_h și se clasează în fig. 10, 11 și 12.

Din studierea comparativă a diagramelor din fig. 10, 11 și 12 se constată următoarele:

1. pentru oricare structură a consumului, producția specifică y_h crește cu micșorarea coeficientului de termoficare ajungînd ca la coeficienți de termoficare mici de ordinul 0,2—0,3 să se apropie de valoarea limită.

2. variațiile mari apar la boilerul B_2 (y_{h_2}), care urmărește variația temperaturii apei în rețea; la boilerul B_1 (y_{h_1}) variațiile sînt mici și vizibile doar în cazul sarcinei de încălzire ($\gamma = 0$), deoarece la sarcini combinate ($\gamma \neq 0$), chiar dacă temperatura apei la întoarcere în centrală este mai scăzută și ar rezulta un „τ_a" scăzut, priza nu poate scoborî sub 0,5 at = 70°C.

3. y_{h_2} se micșorează cu creșterea cotei de apă caldă menajeră, valoarea scăderei depinzînd de modul de preparare a apei calde menajere și de graficul ales.

4. Cu creșterea cotei de apă caldă, valoarea lui y_{h_1} se apropie de valoarea maximă și rămîne constantă chiar la coeficienți de termoficare mari.

5. Imposibilitatea scăderii presiunii prizei sub 0,5 at face ca boilerul B_1 să meargă aproape tot anul la producția specifică y_{h_1} maximă pentru $p = 0{,}5$ at.

6. dacă s-ar putea scoborî presiunea în continuare sau se ia în considerație și serpentina din condensator, curba clasată a lui y_{h_1} ar avea alura trasată punctat în fig. 10, lucru care ar conduce la mărirea lui y_h cu circa 5% la durată mare de utilizare.

7. adoptarea graficului de reglare — calitativ — cantitativ conduce la o sensibilă mărire a lui y_{h_2} după cum se vede din diagrama trasată în fig. 10 și 11.

8. Adaptarea graficului calitativ necorectat și prepararea apei calde la consumator într-un schimbător racordat paralel cu sistemul de încălzire

(fig. 12) schimbă alura curbelor clasate ale lui y_{h_2} situîndu-le între curbele graficului de reglare calitativ corectat și cele ale graficului calitativ-cantitativ.

CURBA CLASATĂ A LUI „Yh" PENTRU BOILERUL B_1 ȘI B_2 LA GRUPUL T-50-1 ÎN CAZUL: SARCINA TERMICĂ DE ÎNCĂLZIRE ($\gamma = 0$)

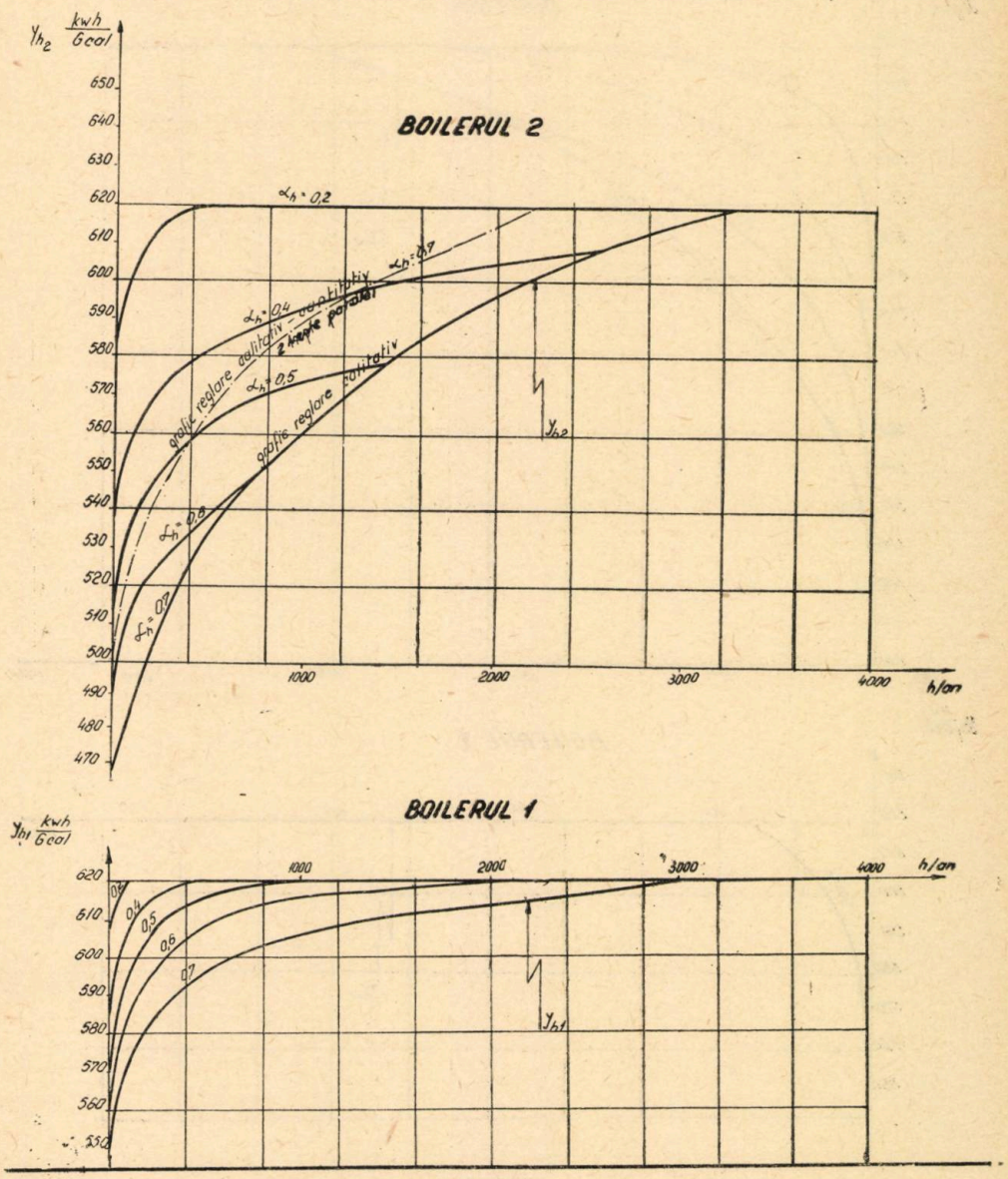


Fig. 11

CURBA CLASATA A LUI „y_h" PENTRU BOILERUL B_1 ȘI B_2 LA GRUPUL T-50-1 IN CAZUL
-preparării apei calde menajere în schimbător racordat în paralel cu sistemul de încălzire.

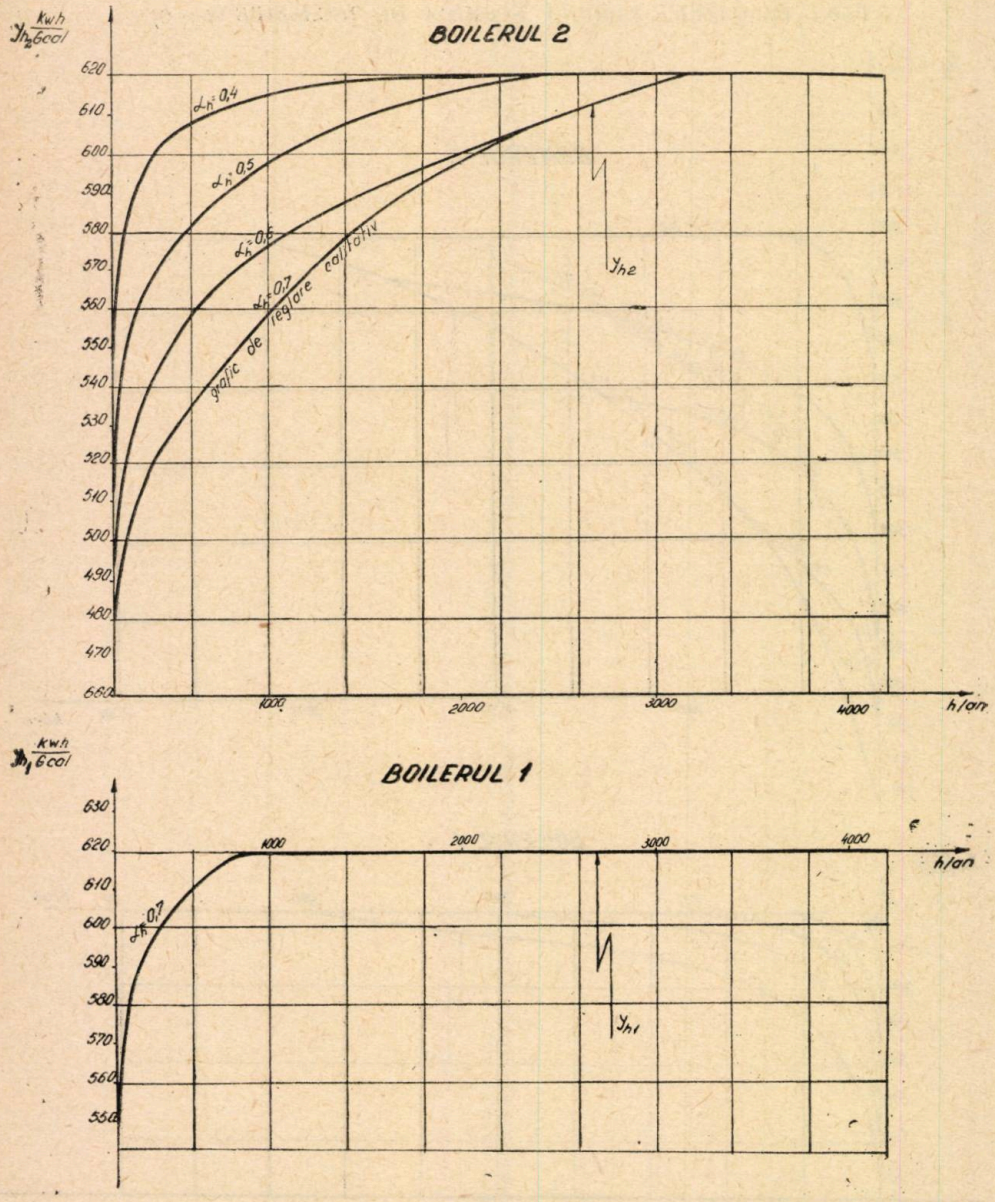


Fig. 12

4. Calulul lui y_m^{an}

În capitolele precedente s-a arătat că producția specifică de energie electrică medie anuală este efectul combinat al unui complex de factori contradictorii și că acest efect se concretizează în producția de energie electrică obținută în regim de termoficare pe baza căldurii livrate în cele două boilere.

Dar pentru a se obține valoarea exactă a lui y_m^{an} trebue urmărită în afară de variația în cursul anului a lui „y_h" pe fiecare boiler, și cantitatea de căldură la care se referă, însumîndu-se efectul lor atît pentru perioada de iarnă cît și pentru perioada de vară.

Metoda de calcul aplicată este o metodă grafo-analitică în care y_m^{an} se calculează ținînd seama de considerentele de mai sus conform formulei 1.

$$y_m^{an} = \frac{E_T}{Q_T} \tag{11}$$

Unde :

$Q_T = \left[\frac{\text{Gcal}}{\text{an}}\right]$ = căldura livrată anual din prizele turbinei și este suma

$$Q_T = Q_{T\ înc+apă\ caldă}^{iarna} + Q_{T\ apă\ caldă}^{vara} \tag{12}$$

E_T = energia produsă anual în termoficare care este dată de suma

$$E_T = \sum_{h=0}^{h=8760} q_1 \cdot y_1 + \sum_{h=0}^{h=8760} q_2 \cdot y_2 \tag{13}$$

care ținînd seama de împărțirea sarcinei în mod egal pe cele două boilere va conduce la

$$E_T = \sum_{h=0}^{h=8760} \cdot q \cdot \frac{y_1 + y_2}{2} \tag{14}$$

Dacă ținem seama și de specificul producției de căldură în timpul perioadei de încălzire și a perioadei de vară cînd $y_2 = 0$, formula 13 se poate scrie

$$E_T = \sum_{h=0}^{h=4000} q_{înc+ac}^h \cdot \frac{y_1 + y_2}{2} + \sum_{h=4000}^{h=8760} q_{ac}^h \times y_1 \tag{15}$$

în care împărțind prin Q și înlocuind cu:

$$y_m^{iarna} = \frac{\sum_{h=0}^{h=4000} q_{inc+ac} \frac{y_1 + y_2}{2}}{Q_{inc+ac}^{iarna}} \tag{16}$$

$$y_m^{vara} = \frac{\sum_{h=4000}^{h=8760} p_{ac} \times y_1}{Q_{ac}^{vara}} \tag{17}$$

$$\frac{Q_{inc+ac}^{iarna}}{Q} = a \tag{18}$$

$$\frac{Q_{ac}^{vara}}{Q} = b \tag{19}$$

vom avea formula lui y_m^{an}

$$\boxed{y_m^{an} = a\ y_m^{iarna} + b\ y_m^{vară}} \tag{20}$$

unde $y_m^{iarnă}$ și $y_m^{vară}$ se obțin din clasarea lui y_{h_1} și y_{h_2} pe cele două boilere pentru diverși coeficienți de termoficare orari (α_h) ținînd cont de cantitatea de căldură aferentă.

Valorile coeficienților din formula 20 se dau în tabela 5 iar y_m^{an} este reprezentat în figura 13.

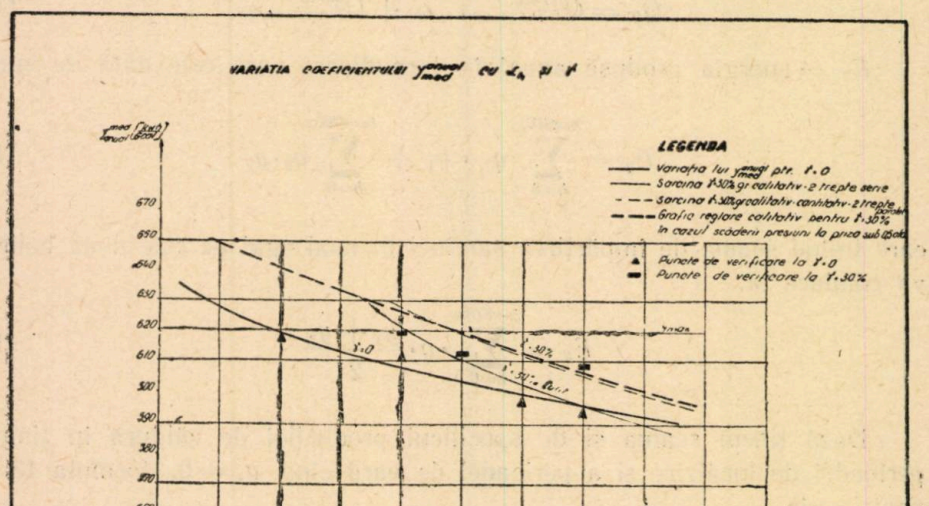


Fig. 13

Tabela nr. 5

Coeficientul de termoficare orar α_h	Structura consumului de căldură	a	b	y_m^{iarna} kWh/Gcal	y_m^{vara} kWh/Gcal	y_m^{an} kWh/Gcal	Modul de preparare a apei calde menajere și graficul de reglaj
1	2	3	4	5	6	7	8
$\alpha_h = 0{,}7$	$\gamma = 0$	1,00	—	598	—	598	reglaj calitativ
	$\gamma = 30\ \%$	0,633	0,367	585	620	598	reglaj calitativ corectat intensiv
	$\gamma = 30\ \%$	0,633	0,367	600	620	606	reglaj calitativ cantitativ
	$\gamma = 30\ \%$	0,633	0,367	600	620	608	reglaj calitativ cu prepararea apei în boiler racordat în paralel cu sistemul de
$\alpha_h = 0{,}5$	$\gamma = 0$	1,000	—	605	—	605	calitativ
	$\gamma = 30\ \%$	0,583	0,417	605	620	610	calitativ corectat intensiv
	$\gamma = 30\ \%$	0,583	0,417	610	620	619	calitativ cantitativ

Din analiza datelor din tabelul 5 și din diagrama din fig. 13 se constată că:

1. y_m^{an} scade cu creșterea lui „α_h" cu circa 5—7% față de valoarea maximă.

Scăderea lui y_m^{an} este normală deoarece cu creșterea lui α_h, boilerul B_2 este nevoit să lucreze cu temperaturi tot mai ridicate.

2. y_m^{an} este influențat de structura consumului de căldură, mărimea depinzînd de coeficientul de termoficare, de modul de preparare a apei calde menajere și valoarea lui γ.

3. la coeficienți de termoficare mici (0,2 ... 0,3), y_m^{an} are valoarea maximă, influența tuturor elementelor compensîndu-se

4. la coeficienți de termoficare mari (0,7 ... 0,8), influența se face simțită conducînd la scăderea lui y_m^{an}.

5. metoda de preparare a apei calde menajere în două trepte serie cu corectarea intensivă a graficului de reglare conduce la o micșorare a lui y_m în timpul, iernii, care însă este compensată de efectul lui y_m din timpul verii.

6. metoda de preparare a apei calde menajere în două trepte paralel cu grafic de reglare calitativ necorectat (calitativ-cantitativ) conduce la o mărire a lui y_m^{an}.

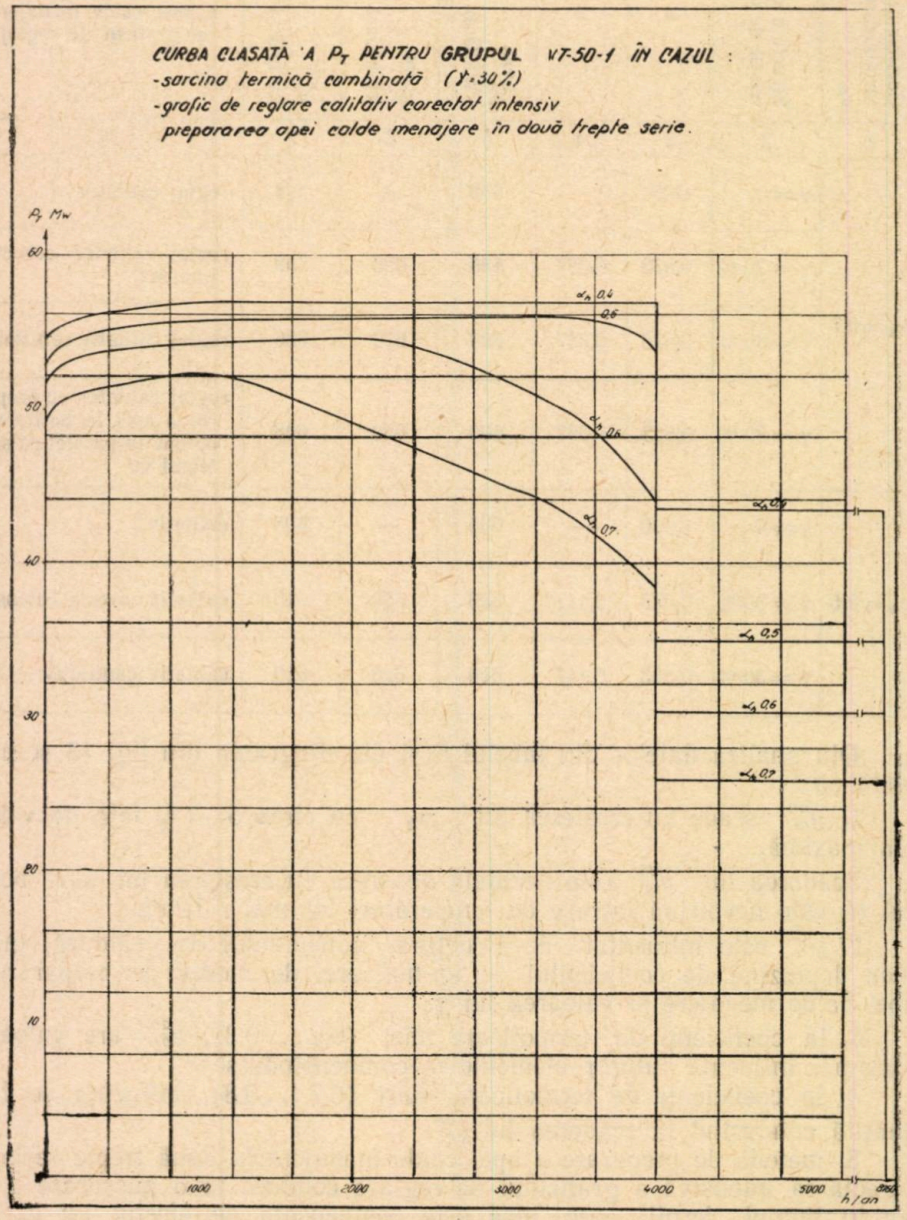


Fig. 14

*
* *

Pentru valorile curente ale coeficientului de termoficare 0,3...0,5 se poate adopta la calculul energiei electrice în termoficare cu destulă precizie (1...2%) o valoare unică pentru y_m^{an}.

În cazul de față pentru grupul T-50-1 se propune o valoare a lui y_m^{an}: 605—610 kwh/Gcal.

4.1. *Verificarea valorii* y_m^{an}

Pentru a se verifica precizia metodei arătată mai sus s-au comparat datele obținute conform acestei metode cu datele pentru y_m^{an} obținute cu ajutorul diagramei de regimuri a mașinii.

Curbele clasate ale lui P_T pentru diverși α_h se dau în fig. 14 iar valorile obținute pentru y_m^{an} se prezintă în tabela nr. 6 și se reprezintă în fig. 13.

Tabela nr. 6

	$\alpha_{h=0,2}$	$\alpha_{h=0,4}$	$\alpha_{h=0,5}$	$\alpha_{h=0,6}$	$\alpha_{h=0,7}$
$\gamma = 0$	615	617	609	596	594
$\gamma = 30\ \%$	620	620	616	615	614

După cum se vede datele se înscriu în limitele admisibile de eroare, astfel că adoptarea unei valori unice pentru y_m^{an} este perfect justă.

Făcînd calculele corespunzătoare și pentru celelalte grupuri specializate de termoficare s-au putut obține valori similare ale lui y_m^{an} și anume:

Indicativul grupului	y_m^{an} [kWh/Gcal]
T — 25 — 5	410
T — 50 — 1	610
T — 100 — 1	630
T — 250 — 1	775

5. Concluzii

Studiindu-se ansamblul sistemului de termoficare consumator — rețea — turbină pe baza unei metode analitice se constată că y_m^{an} este influențat în sensuri diferite de structura consumului de căldură, coeficien-

tul de termoficare, metoda de preparare a apei, de graficul de reglaj, de turbină etc.

Influența contradictorie a tuturor acestor factori face posibilă adoptarea unei valori „y_m^{an}" pentru fiecare grup turbogenerator de termoficare care cu o aproximație acceptabilă, să poată fi utilizată în calculele tehnice și economice.

Catedra de centrale electrice
Institutul politehnic București

BIBLIOGRAFIA

1. *Wlezek C.* — Influența structurii consumului de căldură asupra căldurii livrate în termoficare și a coeficientului de termoficare Buletinul Institutului politehnic București 4/964.

2. *Zacs M. L.* — Schema de preparare a apei calde menajere în două trepte. Vodosnabjenie i sanitar tehnica (1961) nr. 9 pag. 10—18.

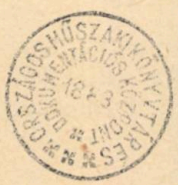
3. *Furtunescu H.* — Scheme raționale de preparare a apei calde menajere pentru consumatorii racordați la rețelele de termoficare bitubulare închise. Energetica nr. 9 (1963) pag. 468—476.

4. *Colț G., Grecu Titus* — Calculul aproximativ al consumului de abur și al producției de energie electrică în regim de termoficare. Energetica (1962) nr. 12 pag. 514—518.

5. *P. N. Sliahin* și *M. L. Berșadski* — Kratkii spravocinic po paroturbinîm ustanovkam Gosenergoizdat 1961.

6. — Cartea tehnică a turboagregatului T-50-1. Calculul termic L.M. Z.

7. *V. I. Griușfeld, A. M. Kneazov* — Diagrama de regimuri pentru instalația de turbine T-100-130. Teploenerghetica nr. 10 (1962).



ÎNTREPRINDEREA POLIGRAFICĂ „GRAFICA NOUĂ" II, BUCUREȘTI — c. 10872

INDICAȚII REDACȚIONALE

Manuscrisele vor fi prezentate în două exemplare, dactilografiate la două rînduri și colaționate de autor. Relațiile matematice și formulele se vor scrie cît mai clar, cu cerneală.

Desenele și graficele vor fi executate în tuș negru pe hîrtie de calc, numerotate și prezentate separat cu un borderou cuprinzînd nr. curent și legenda fiecărei figuri. Locul figurilor se va indica în text. Scrisul pe figuri va fi cel standardizat.

În continuarea textului, pentru fiecare exemplar se va da bibliografia de referință și, pe cîte o foaie separată de hîrtie, cîte un rezumat, în limbile : rusă, franceză, germană și engleză. La bibliografie se va indica în mod obligatoriu : numele și inițialele de prenume ale autorului, titlul și volumul lucrării, editura, locul și anul apariției, sau periodicul în care a apărut, volumul, anul, pagina inițială și finală a articolului.

Bibliografia se va întocmi în ordinea de citare în text și se va numerota curent. Referințele la bibliografie se vor face în text prin indicarea numărului de ordine al lucrării, încadrat în paranteze drepte, de exemplu [5].

Întreaga responsabilitate pentru exactitatea calculelor, datelor experiențelor și afirmațiilor științifice revine numai autorilor. Conducerea revistei își rezervă dreptul de a nu publica materialele necorespunzătoare.

40820

F 1130

REFERATIVA

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC BUCUREȘTI

TOMUL XXVI FASCICOLA 6 ANUL 1964
NOIEMBRIE — DECEMBRIE

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC BUCUREŞTI

apare, cu şase fascicole pe an, în continuarea vechilor periodice ştiinţifice : „Bulletin de Mathématiques et de Physique pures et appliquées" şi „Buletinul Politehnicei din Bucureşti".

Organizat pe baze noi, el reflectă în primul rînd activitatea ştiinţifică a corpului didactic din Institutul politehnic Bucureşti. În limita spaţiului disponibil, se pot publica şi lucrări ştiinţifice ale colaboratorilor din afara institutului.

Corespondenţa şi schimburile de publicaţii cu redacţia şi administraţia Buletinului se fac pe adresa :

INSTITUTUL POLITEHNIC BUCUREŞTI
CALEA GRIVIŢEI 132
(cu menţiunea „pentru Buletinul Institutului")

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC BUCUREŞTI

издаётся в шести годовых выпусках, являясь продолжением прежних научных периодических журналов „Bulletin de Mathématiques et de Physique pures et appliquées" и „Buletinul Politehnicei din Bucureşti".

Составленный на новых основах, он отражает в первую очередь научную деятельность преподавательского состава Бухарестского Политехнического Института. В пределах возможностей будут опубликованы и научно-исследовательские работы и внеинститутских сотрудников.

Переписка и обмен периодическими изданиями с редакцией и руководством Бюллетеня производятся по адресу :

INSTITUTUL POLITEHNIC BUCUREŞTI
CALEA GRIVIŢEI 132
(с указанием „pentru Buletinul Institutului")

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC BUCUREŞTI

est une publication, continuant les anciens périodiques scientifiques : „Bulletin de Mathématiques et de Physique pures et appliquées" et „Buletinul Politehnicei din Bucureşti".

Tel qu'il se présente, il reflète en premier lieu l'activité scientifique du corps didactique de l'Institut Polytechnique de Bucarest. On pourra y ajouter aussi, dans la limite des possibilités, les travaux des collaborateurs qui n'appartiennent pas à l'institut.

L'adresse pour la correspondance et les échanges de publications est :

INSTITUTUL POLITEHNIC BUCUREŞTI
CALEA GRIVIŢEI 132
(avec la mention „pentru Buletinul Institutului")

ORSZÁGOS MŰSZAKI KÖNYVTÁR ÉS DOKUMENTÁCIÓS KÖZPONT

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC BUCUREȘTI

TOMUL XXVI — FASCICOLA 6

NOEMBRIE — DECEMBRIE

1964

COMITETUL DE REDACȚIE

Prof. Dr. *I. Agîrbiceanu*, membru corespondent al Academiei R.P.R. ; Prof. Dr. *I. S. Antoniu*, membru corespondent al Academiei R.P.R.; Acad. Prof. *M. Bercovici*; Prof. Dr. *E. Bratu*, membru corespondent al Academiei R.P.R. ; Prof. *Gh. Buzdugan*, membru corespondent al Academiei R.P.R. ; Acad. Prof. Dr. *E. Carafoli* ; Conf. *S. Călin*, cand. Șt. Th. ; Acad. Prof. Dr. *D. Dumitrescu* ; Conf. *I. Grădișteanu*, cand. Șt. Ec. ; Prof. *C. Ionescu-Bujor* ; Prof. Dr. *Gh. Manea*, membru corespondent al Academiei R.P.R.; Prof. *N. Manolescu*; Prof. *St. Mantea*; Prof. *N. Marinescu*, cand. Șt. Th. ; Acad. Prof. Dr. *C. Nenițescu* ; Prof. *C. Penescu*, membru corespondent al Academiei R.P.R. ; Prof. *M. Postelnicescu* ; Acad. Prof. Dr. *R. Rădulet* ; Prof. *Al. Rău* ; Prof. *Al. Spătaru* ; Prof. *L. Stoicescu* ; Prof. *I. Zăgănescu*.

Redactor responsabil: Prof. *C. Dinculescu*
Membru corespondent
al Academiei R. P. R.

ORSZÁGOS MŰSZAKI KÖNYVTÁR ÉS DOKUMENTÁCIÓS KÖZPONT

Sumar

MATEMATICA

I. M. Miu
Sur quelques théorèmes concernant au zéros des polynômes . . . 17

M. Tîrnoveanu
Despre modalitățile de valență ale unui sistem logistic neconstructiv de treapta I. 29

FIZICA

G. Moisil
Protection with Sacrificial Anodes of Buried Structures (Theory, practical formulas, tables.) 35

REZISTENȚA MATERIALELOR

V. Drobotă
Flambajul lateral al grinzilor pendulare continue sub sarcini transversale uniform repartizate 49

CENTRALE ELECTRICE

C. Dinculescu, G. Drăgan, I. Adămuț
La coordination de l'isolement des installations électroénergétiques haute tension 57

TERMOTEHNICA

L. Stoicescu, S. Petrescu
Thermodynamische Zustandsänderungen die mit endlicher konstanter Geschwindigkeit verlaufen 79

ELECTROTEHNICA

Gh. Hortopan
Analizor pentru cercetarea fenomenelor de comutație 121

ELECTRONICA

C. Bulucea, S. Cserveny
Influența multiplicării purtătorilor de sarcină în joncțiunea colectorului asupra curentului de emitor, la tranzistoarele PNP de germaniu, aliate. 131

Резюме

Д.К. 517

И. М. Миу

В связи с теоремами относительно нулей полиномов

В данной работе обобщаются некоторые теоремы, выведенные автором. Даётся более полное обобщение, чем в теореме Лукаса, вопроса о нулях полинома.

Указываются некоторые случаи применения теоремы, выведенной автором в [2], [3], [4] относительно разделения вещественных нулей полинома с вещественными коэфициентами.

Делается вывод, что вообще степени полиномов, которые разделяют вещественные нули одного полинома могут быть еще более уменьшены.

Buletinul Institutului politehnic Bucureşti, Tom. XXVI, fasc. 6/964.

Д.К. 517

М. Тырновяну

Об особенностях логистической валентности неконструктивной системы I степени

В § I определяются понятия, связанные с неконструктивной логической системой I степени Σ^1, её валентная возможность и даются теоремы 1.1, 1.2, с помощью которых вводится примитивная семиотика и производная семиотика валентных возможностей системы.

В § 2 определяются законы дедуктивных и индуктивных выводов валентных возможностей системы Σ^1 и даются теоремы 2.1, 2.2, с помощью которых выявляются фундаментальные свойства этих законов.

Buletinul Institutului politehnic Bucureşti, Tom. XXVI, fasc. 6/964.

Д.К. 537.3

Г. Монсил

Оротекторная защита подземных сооружений
(теория, практические формулы, таблицы)

Сила электрического тока, протекающего через контакт между протектором и подземным сооружением, покрытым оболочкой, дана формулой (17).

Соответствующие приближения приводят к практическим формулам (32) и (37).

Значение коэфициентов M, N и S даны в таблицах 1, 2 и 3.

Buletinul Institutului politehnic Bucureşti, Tom. XXVI, fasc. 6/964.

Summary

D.C. 517

I. M. Miu

On Some Theorems Referring to Polynomial Zeros

In this paper, generalizations of some theorems settled by the author are given in [1] and Lucas'theorem referring to polynomial zeros is generalized more than in [1].

Some applications of the theorem settled by the author in [2], [3], [4], referring to the separation of the real zeros of a polynomial with real quotients are given. It is generally shown that the polynomial degrees separating the real zeros can be even more reduced.

Buletinul Institutului politehnic Bucureşti, Tom. XXVI, fasc. 6/964.

D.C. 517

M. Tîrnoveanu

About the Valence Modalities of a Logistic Unconstructive I Rate System

In the first § the author defines the notions of logistic unconstructive I rate system Σ^1. the valence modalities of Σ^1 and gives the theorems 1.1, 1.2, which introduce the primitive semiotics and the derivate semiotics of the valence modalities of the Σ^1 system.

In the second § the author gives the deductive and inductive laws of the valence modalities of the Σ^1 system and he also gives the theorems 2.1 and 2.2, which bring forth the fundamental properties of these laws of inference.

Buletinul Institutului politehnic Bucureşti, Tom. XXVI, fasc. 6/964.

D.C. 537.3

G. Moisil

Protection with Sacrificial Anodes of Buried Structures (Theory, practical formulas, tables)

The formula (17) giving the leakage current intensity through the connection between a buried coated structure and a sacrificial anode, is established by an approximating formula (17) practical formulas (32) and (37) are obtained.

Coefficients M, N and S of these formulas are intabulated in tables 1, 2 and 3.

Buletinul Institutului politehnic Bucureşti, Tom. XXVI, fasc. 6/964.

Д.К. 620.1

В. Дробота

Боковая продольная, устоичивость маятниковых сплошных балок под равномерно распределёнными нагрузками

Статья занимается установлением критической нагрузки продольной устоичивость для сплошных балок малой поперечной жёсткости поддерживаемых на опорах, позволяющих вращение балки в любое направление, нагруженных равномерно распределённой вертикальной нагрузкой, приложенной по высоте среднего деформированного волокна балки.

Для опирания на более чем две опоры, трактуется лишь случай в котором деформированная ось балки после продольного изгиба, расположена на той же стороне линии, соединяющей опоры (симметричная продольная устоичивость).

Buletinul Institutului politehnic Bucureşti, Tom. XXVI, fasc. 6/964.

Д.К. 621.315:621.3.027.3

К. Динкулеску, Т. Дрэган, И. Адэмуц

Координация изоляции электроэнергетического устройства высокого напряжения

В работе, авторы, исходя из сравнения данных, содержащихся в рекомендациях Международной Комиссии по Электроэнергетике и в различных отечественных нормах, а также на основании предыдущих работ, анализируют вышеуказанные вопросы и делают ряд выводов и дают ряд рекомендаций.

Также анализируются уровни производства и изоляции, предусмотренные в разных нормах и возможность сокращения последних.

Вносится ряд предложений, что касается ступеней максимальных напряжений от 123 кв и выше и подчёркивается необходимость установления уровней изоляции для различной аппаратуры станции или между фазами по сравнению с уровнем фазовой изоляции. В последней части работы указывается необходимость определения с большей точностью влияния коэффициентов коррекции на лабораторные испытания изоляции электрооборудования.

Buletinul Institutului politehnic Bucureşti, Tom. XXVI, fasc. 6/964.

Д.К. 621.316

Г. Хортопан

Анализаторы для исследования явлений переключения

Определение перенапряжений переключения необходимо в целях познания диэлэктрического заряда выключателей и для установления их способности выключения.

В продолжении предыдущей работы описывается устройство транзисторного анализатора (в предыдущей работе были изложены теоретические основы динамической модели сети, при помощи которой исследуются перенапряжения переключения). В этом этапе был построен анализатор, состоящий из источника энэргии, статического устройства для управления идеальным выключателем и модель сети в первом приближении. Даны осциллограммы, полученные при помощи анализатора, и излагается программа для будущего.

Buletinul Institutului politehnic Bucureşti, Tom. XXVI, fasc. 6/964.

D.C. 620.1

V. Drobotă

Lateral Buckling of Continuous Pendulous Beams under Uniformly Distributed Loads

This article deals with the determining of the buckling critical load of continuous beams with a small cross stiffness supported by bearings allowing the rotation of the beam in any direction, loaded with a uniformly distributed vertical load, applied to the disorted medium fibre heigt of the beam. For the leaning upon more than two supports, only the case in which the distorted axis after buckling, is located on the same side of the line linking the supports (the symmetrical buckling) is dealt with.

Buletinul Institutului politehnic Bucureşti, Tom. XXVI, fasc. 6/964.

D. C. 621.315 : 621.3.027.3

C. Dinculescu, G. Drăgan, I. Adămuţ.

The Coordination of the Insulation of High-Voltage Electro-Power Plants

In this paper, the authors starting from comparing the data comprised in the I.E.C. recommendations to the different national standards as well as to the data obtained in their previous works, analyse the above mentioned problems coming to a series of conclusions and recommendations. At the same time they analyse the production and the insulation levels provided in different standards as well as the possibility of reducing the insulation levels. Suggestions on the maximum voltage stages from 123 kV. up are given and the need to settle the insulation levels for the different equipments of the power-stations or between the phases compared to the level of insulation per phase are as well emphasized.

Buletinul Institutului politehnic Bucureşti, Tom. XXVI, fasc. 6/964.

D. C. 621.316

Gh. Hortopan

Analyser for the Research of Commutation Phenomena

The determination of commutation overvoltages is needed for knowing the dielectric stress of breakers for determining their ability to disconnect.

The description of a transistorised analyser follows a previous paper explaining the theoretical bases of the network dynamic model, used in the present paper for the research on commutation voltages. The analyser consisting of the energy source, the static device, for the control of the ideal breaker, and the network model in a first aproximation, were built during this stage. The oscillograms obtained with the obtained analyser are given and a further programme is exposed.

Buletinul Institutului politehnic Bucureşti, Tom. XXVI, fasc. 6/964.

Д.К. 536.7

Л. Стонческу, С. Петреску

Термодинамические превращения состояния, протекающие с конечной постоянной скоростью

На основе нового математического выражения первого начала для необратимых процессов в тепловых машинах (см. вып. 5/1964 те же авторы), выводится новое дифференциальное выражение адиабаты сжатия и другое выражение для адиабаты растяжения.

Эти уравнения выводятся также и на основе молекулярной кинетики для газов с одним и с несколькими атомами в молекуле.

Устанавливаются все интегральные уравнения необратимой адиабаты в различных координатах на основании нового математического выражения первого принципа с учётом скорости поршня, средней молекулярной скорости и времени релаксации.

Дается графическое изображение необратимых адиабат сжатия и растяжения и их работа.

Изучается и обьясняется значение выражения $\int Tds$, для адиабат, развивающихся с конечной скоростью.

Изучая и остальные необратимые превращения (политропу, изотерму, изобару) приходим к заключениям общего порядка.

Устанавливается возможность количественно выражать необратимость открытых процессов в машинах без помощи второго начала термодинамики, сформулированном на феноменологической основе.

На основе графического изображения необратимых адиабат сжатия и растяжения приходят к потребительному циклу с одним источником тепла и к адиабатической необратимой доступности над обратимой адиабатой.

Buletinul Institutului politehnic Bucureşti, Tom. XXVI, fasc. 6/964.

Д.К. 621.382.3

К. Булуча, С. Ксервени

Влияние мультипликации носителей заряда в коллекторном переходе на эмиттерный ток, у ПНП германиевых легированных транзисторов

Изучается влияние лавинной мультипликации в коллекторном переходе на эмиттерный ток, начиная с экпериментального наблюдения этого явления.

Замечаемый эффект теоретически объясняется обратной связью через сопротивление базы r_{bb} и термической реакцией коллектор—эмиттер.

Экспериментальная проверка проводится на низкочастотных транзисторах *EFT*.

Buletinul Institutului politehnic Bucureşti, Tom. XXVI, fasc. 6/964.

D. C. 536.7

L. Stoicescu, S. Petrescu

Thermodynamic State Transformations Resulting with a Steady Finite Speed

Relying on the new mathematical expression of the first principle for irreversible processes in heat engines (see part 5/1964, by the same authors) a new differential expression is deduced for the compression adiabatic line and another one for the expansion adiabatic line.

These equations are also deduced on a molecular kinetic basis, for gases with one or more atoms in the molecule.

All the integrated equations of the irreversible adiabatic lines are stated into various coordinates on the basis of the new mathematical expression belonging to the first principle, considering the speed of the piston, the mean molecular speed and the relaxation period.

The expansion and compression irreversible adiabatic lines' graphs and their work are represented. The significance of the $\int Tds$ expression for the adiabatic line developed with a finite speed is studied and explained.

Studying also the other irreversible transformations (polytropic curve, isotherm, isobar) the authors draw general conclusions.

The possibility of expressing quantitatively the irreversibility of open processes in heat engines without requiring the second thermodynamic principle formulated on a phenomenological basis, is also stated.

The consumption cycle with a single heat source and the irreversible adiabatic line's accessibility over the reversible adiabatic line, result form the graphs of expansion and compression irreversible adiabatic lines.

Buletinul Institutului politehnic Bucureşti, Tom. XXVI, fasc. 6/964.

D.C. 621.382.3

C. Bulucea, S. Cserveny

The Influence at the Collector Junction of the Multiplication of the Cherge Carrier upon the Emitter Current, in the PNP Alloy Transistors

It is noted experimentally the modification of the imput characteristics of transistors during avalanche multiplication at the collector junctions. This effect is explained theoretically on the basis of the reaction by distributed resistance of the basis and the collector-emitter thermic conection.

The experimental verifications are made on low frequencies EFT transistors.

Buletinul Institutului politehnic Bucureşti, Tom. XXVI, fasc. 6/964.

Résumé

C.D. 517

I. M. Miu

Sur certains théorèmes concernant les zéro des polynômes.

Dans ce travail on donne des généralisations de certains théorèmes établis par l'auteur dans [1] et on généralise plus que dans [1] le théorème de Lucas sur les zéros d'un polynôme.

On donne ensuite quelques applications du théorème établi par l'auteur dans [2], [3], [4] concernant la sépartion des zéros réels. On montre que'en général les degrés des polynômes qui séparent les zéros réels d'un polynôme peuvent être amoindris.

Buletinul Institutului politehnic Bucureşti, Tom. XXVI, fasc. 6/964.

C.D. 517

M. Tîrnoveanu

Considerations sur les modalités de valence d'un système logistique non constructif de I-er degré

Dans le premier § on définit les notions de système logistique non constructif de I-er degré Σ^1, la modalité de valence de Σ^1 et on présente les théorèmes 1.1, 1.2. par lesquels on introduit la sémyotique primitive et la sémiotique dérivée des modalitiés de valence du système Σ^1.

Dans le deuxième § on définit les lois d'inférence déductives et inductives des modalités de valence du système Σ^1 et on donne les théorèmes 2.1, 2.2 par lesquels on fait ressortir les propriétés fondamentales de ces lois d'inférence.

Buletinul Institutului politehnic Bucureşti, Tom. XXVI, fasc. 6/964.

C. D. 537.3

G. Moisil

L'utilisation des anodes actives dans la protection des structures souterraines. (Théorie, formules pratiques, tables)

L'intensité du courant qui s'écoule par la connexion établie entre une anode active et une structure métallique souterraine, revêtue d'une gaine protectrice, est donnée par la formule (17). Des approximations convenablement choisies conduisent aux formules pratiques (32) et (37). On trouve dans les tables 1, 2 et 3, les vaelurs des coefficients *M*, *N* et *S*.

Buletinul Institutului politehnic Bucureşti, Tom. XXVI, fasc. 6/964.

Zusammenfassung

D.K. 517

I. M. Miu

Ueber einige Lehrsätze in Bezug auf die Nullen der Polynome

In dieser Arbeit werden Verallgemeinerungen von einigen vom Autor in [1] festgesetzten Lehrsätzen angegeben und es wird mehr als in [1] der Lehrsatz von Lucas über die Nullen eines Polynoms verallgemeinert.

Weiterhin werden einige Anwendungen des vom Autor in [2], [3], [4] festgesetzten Lehrsatzes in Bezug auf die Trennung der reellen Nullen eines Polynoms mit reellen Koeffizienten, angegeben. Es wird gezeigt dass, im allgemeinen die Grade der Polynome, welche die reellen Nullen eines Polynoms trennen, noch mehr vermindert werden können.

Buletinul Institutului politehnic Bucureşti, Tom. XXVI, fasc. 6/964.

D.K. 517

M. Tîrnoveanu

In Bezug auf die Valenzmodalitäten eines nichtkonstruktiven Systems der Stufe I

In § 1 werden die Begriffe nichtkonstruktives logistisches System, nichtkonstruktives logististisches Systems der Stufe I Σ^1, die Valenzmodalität von Σ^1 definiert und es werden die Lehrsätze 1.1, 1.2. durch welche die primitive Semiotik und die abgeleitete Semiotik der Valenzmodalitäten des Systems Σ^1 eingeführt wird, angegeben.

In § 2 werden die Gesetze der deduktiven und induktiven Inferenz der Valenzmodalitäten des Systems Σ^1 definiert und werden die Lehrsätze 1.1, 2.2 durch welche die Grundeigenschaften dieser Influenz-Gesetze (einflussreichen Gesetze) hervorgehoben werden, gegeben.

Buletinul Institutului politehnic Bucureşti, Tom. XXVI, fasc. 6/964.

D.K. 537.3

G. Moisil

Der kathodische Schutz eingegrabener Anlagen mittels aktiver Anode) Theorie, praktische Formeln und Tafeln)

Die Stromstärke die die Verbindung zwischen einer aktiven Anode und einer eingegerabenen umhüllten Rohr-oder-Kabelleitung durchfliesst, ist durch die Formel (17) gegeben. Die praktischen Annäherungsformeln (32') und (37) sind mit den Tafeln 1, 2 und 3, die Koeffizienten M, N und S geben, anzuwenden.

Buletinul Institutului politehnic Bucureşti, Tom. XXVI, fasc. 6/964.

C. D. 620.1

V. Drobotă

Le flambage latéral des poutres pendulaires continues sous des charges uniformément distribuées

L'article s'occupe de l'établissement de la charge critique de flambage pour les poutres continues de petite rigidité latérale soutenues sur des appuis qui permettent la rotation de la poutre sur n'importe quelle direction, chargées d'une charge verticale uniformément distribueé, appliqueé sur la fibre moyenne déformée de la poutre. Pour les poutres sur plus de deux appuis, on traite seulement le cas ou l'axe déformé de la poutre après le flambage, est située du même côté que la ligne qui unit les appuis. (le flambage symétrique).

Buletinul Institutului politehnic Bucureşti, Tom. XXVI, fasc. 6/964.

C.D. 621.315 : 621.3.027.3

C. Dinculescu, G. Drăgan, I. Adămuţ.

La coordination de l'isolement pour les instalations électro-énergétiques de haute tension

Dans leur travail, les auteurs commencent par comparer les données des recommandations de la C.E.I. et des différentes normes internationales, ainsi que les données obtenues dans leurs travaux antérieurs. Ensuite ils analysent les problèmes mentionnés ci dessus et déduisent une série de conclusions et de recommandations. En même temps, on analyse les niveaux de production et les niveaux d'insolation prévus dans diverses normes, ainsi que la possibilité de réduire ces niveaux d'isolation. On formule des propositions concernant les degrés de tensions maxima, au delà de 123 kV et l'on souligne la nécessité d'établir des niveaux d'isolation pour différents outillages des stations ou entre les phases par rapport au niveau d'insolation par phase.

La dernière partie du travail traite le problème de la nécessité de déterminer plus précisément l'influence des coefficients de correction concernant les essais de laboratoire de l'isolation des outillages électro-énergétiques.

Buletinul Institutului politehnic Bucureşti, Tom. XXVI, fasc. 6/964.

C.D. 621.316

Gh. Hortopan

L'analysateur pour l'étude des phenomènes de commutation

La détermination des surtensions de commutation est nécessaire en vue de la connaissance de la sollicitation diélectrique des interrupteurs et pour établir leur pouvoir de coupure.

En continuant un ouvrage antérieur dans lequel on a exposé les bases théoriques du modèle dynamique de réseau, à l'aide duquel on étudie les surtensions de commutation on décrit la construction d'un analysateur transistorisé. Dans cette étape on a construit l'analysateur, composé de la source d'énergie, du dispositif, statique pour la commande de l'interrupteur idéal et le modèle du réseau dans une première approximation. On donne les oscillogrammes obtenues à l'aide de cet analysateur et on expose le programme pour l'avenir.

Buletinul Institutului politehnic Bucureşti, Tom. XXVI, fasc. 6/964.

D.K. 620.1

V. Drobotă

Der seitliche Knickvorgang der durchgehenden Pendelträssig verteilten Lasten

Der Artikel beschäftigt sich mit der Bestimmung der kritischen Knicklast für durchgehende Träger von kleiner transversalen Starrheit, die auf Stützpunkten gestützt sind welche die Drehung des Trägers in jede Richtung ermöglichen und mit einer senkrechten gleichmässig verteilten Last belastet sind, die in der Höhe der mittleren deformierten Faser des Trägers wirkt. Für die Stützung auf mehr als zwei Stützpunkte, wird nur der Fall besprochen, in welchem die nach dem Knickvorgang deformierte Achse des Trägers auf der gleichen Seite der Linie liegt welche die Stützpunkte verbindet, (symetrischer liegt, Knickvorgang).

Buletinul Institutului politehnic Bucureşti, Tom. XXVI, fasc. 6/964.

D.K. 621.315 : 621.3.027.3

C. Dinculescu, G. Drăgan, I. Adămuţ.

Die Koordinierung der Isolation der elektroenergetischen Hochspannungsanlagen

Im Rahmen der Arbeit, ausgehend vom Vergleich der in den IEC Empfehlungen und verschiedenen nationalen Normen enthaltenen Angaben, wie auch von den aus ihren früheren Arbeiten erhaltenen Angaben, analysieren die Autoren die oben erwähnten Probleme und leiten eine Reihe Schlussfolgerungen und Empfehlungen ab. Gleichzeitig werden die in verschiedenen Normen vorgesehenen Produktions und Isolationsniveaus sowie auch die Möglichkeit der Reduzierung dieser Isolationsniveaus analysiert. Es werden Verschläge in bezug auf die Höchstspannungsstufen von 123 kV aufwärts gemacht und die Notwendigkeit der Festsetzung der Isolationsniveaus für verschiedene Ausrüstungen in den Anlagen, oder zwischen Phasen im Vergleich mit dem Isolationsniveau in der Phase, unterstrichen.

Im letzten Teil der Arbeit wird die Notwendigkeit zur genaueren Bestimmung des Einflusses der Korrektionskoeffizienten bei den Laboratoriumsversuchen, die Isolation der elektroenergetischen Ausrüstungen, betreffend erläutert.

Buletinul Institutului politehnic Bucureşti, Tom. XXVI, fasc. 6/964.

D.K. 621.316

Gh. Hortopan

Analysator zur Untersuchung der Schaltvorgänge

Die Bestimmung der Schaltungsüberspannungen ist zur Ekennung der dielektrischen Beanspruchung der Schalter und der Festsetzung ihres Ausschaltungsvermögens, nötig.

In der Fortsetzung einer früheren Arbeit, in welcher die theoretischen Grundsätze des dynamischen Netzmodells mit dessen Hilfe die Schaltungsüberspannungen in der Arbeit untersucht werden, dargelegt wurden, wird die Konstruktion eines transistorisierten Analysators beschrieben. In dieser Etappe wurde ein Analysator gebaut, bestehend aus der Energiequelle, der statischen Vorrichtung für die Betätigung des idealen Schalters und des Netzmodells in erster Annäherung. Es werden die mit dem Analysator erhaltenen Oszillogramme angegeben und das Programm der zukünftigen Arbeiten dargelegt.

Buletinul Institutului politehnic Bucureşti, Tom. XXVI, fasc. 6/964.

C.D. 536.7

L. Stoicescu, S. Petrescu

Transformations thermodynamiques d'état qui découlent à vitesse finie constante

Sur la base de la nouvelle expression mathématique du premier principe, pour les processus irréversibles des machines thermiques (voir fasc. 5/1964 des mêmes auteurs) on déduit une nouvelle expression differentielle de l'adiabate de compression et une autre pour celle d'expansion.

On déduit ces équations aussi sur la base de cynétique moléculaire pour les gaz à un atome on à plusieurs atomes dans la molécule.

On établit toutes les équations intégrales de l'adiabate irréversible dans différentes coordonnées, sur la base de la nouvelle expression mathématique du principe 1, tenant compte de la vitesse du piston, de la vitesse moyenne moléculaire et du temps de relaxation.

On traite la représentation graphique des adiabates irréversibles de compression et d'expansion et de leur travail mécanique. On étudie et on éclaircie la signification de l'expression $\int Tds$ pour les adiabates qui se déroulent à vitesse finie.

En étudiant aussi les autres transformations irréversibles (la polytrope, l'isotherme l'isobarre) on arrive à des conclusions d'ordre général.

On établit la possibilité d'exprimer quantativement l'irréversibilité des procéssus ouverts dans les machines, sans faire appel au deuxième principe de la thermodynamique qui est formulé sur une base phénoménologique.

Sur la base de la représentation graphique des adiabates irréversibles de compression et de détente, on arrive au cycle consomateur avec une seule source de chaleur et à l'accessibilité adiabate irréversible au dessus de l'adiabate réversible.

Buletinul Institutului politehnic Bucureşti, Tom. XXVI, fasc. 6/964.

C.D. 621.382.3

C. Bulucea, S. Cserveny

L'Influence de la multiplication des porteurs de charge dans la jonction du collecteur sur le courant de l'émitteur

En partant de l'observation expérimentale du cet effet, l'auteur a étudé l'influence de la multiplication en avalanche à la jonction du collecteur sur le courant de l'émitteur.

L'explication théoretique de l'éffet constaté est fondé sur le point de vue de la réaction inverse de la résistance distribué de la base, $r_{bb'}$, et du couplage thermique collecteur-émitteur.

Les vèrifications expérimentales ont été réalisée sur des transistors EFT.

Buletinul Institutului politehnic Bucureşti, Tom. XXVI, fasc. 6/964.

D. K. 536.7

L. Stoicescu, S. Petrescu

Thermodynamische Zustandsänderungen die mit endlicher, konstanter Geschwindigkeit verlaufen

Es wird, auf Grund des neuen mathematischen Ausdruckes des ersten Prinzips, für irreversible Vorgänge in thermischen Maschinen (siehe Bul. Inst. Polit. Buk. Nr. 5/1964), eine neue Differentialgleichung für Verdichtungs-und eine andere für Entspannungs-Adiabaten hergeleitet.

Dieselben werden auch auf Grund der kinetischen Gastheorie für ein-und mehratomige Gasmolekeln festgestellt.

Vom selben neuen Ausdruck des ersten Prinzips ausgehend, gelangt man zu allen integrierten Gleichungen der irreversiblen Adiabate, in verschiedenen Koordinatensystemen, indem man K-Geschwindigkeit, mittlere Molekelngeschwindigkeit und endliche Relaxationszeit in Betracht zieht.

Graphische Darstellung der irreversiblen Adiabate, ihre Arbeit für Verdichtung und Ausdehnung, sowie die Bedeutung des Integralls $\int Tds$ für die mit endlicher Geschwindigkeit durchlaufene Adiabate, werden erläutert und untersucht.

Die übrigen Zustandsänderungen werden ebenfalls untersucht und allgemeine Schlüsse werden gezogen.

Es wird die Möglichkeit festgestellt die Irreversibilität der offenen Prozesse der thermischen Maschinen quantitativ auszudrücken, ohne an den II-ten phänomenologisch formulierten Prinzip zu appellieren.

Die graphische Darstellung der Verdichtung und Entspannung führt zu Arbeit verbrauchenden Kreisprozessen mit einem einzigen Wärmebehälter und zur irreversiblen adiabaten Erreichbarkeit oberhalb der reversiblen Adiabate.

Buletinul Institutului politehnic Bucureşti, Tom. XXVI, fasc. 6/964.

D. K. 621.382.3

C. Bulucea, S. Cserveny

Der Einfluss der Ladungsträgermultiplikation im Kollektor-Übergang auf den Emitterstrom, in PND-Legierungstransistoren

Von der experimentellen Beobachtung des Effektes ausgehend, wird der Einfluss der Lawinenmultiplikation im Kollektorübergang auf den Emitterstrom untersucht. Dieser Effekt wird theoretisch auf Grund der Rückkopplung durch der Basiswiderstand $r_{bb'}$, und der thermischen Kopplung zwischen Kollektor und Emitter erklärt.

Die experimentellen Verifizierungen wurden auf EFT Transistoren durchgeführt.

Buletinul Institutului politehnic Bucureşti, Tom. XXVI, fasc. 6/964.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC BUCUREȘTI
Tomul XXVI — 1964, Fascicola 6

MATEMATICĂ

C.Z. 517

SUR QUELQUES THÉORÈMES CONCERNANT AU ZÉROS DES POLYNÔMES

I. M. MIU

En ce qui suit nou généraliserons les théorèmes etablies par nous en [1] et nous donnerons une plus grande généralisation du théorème de Lucas (voir [1]).

Nous donnerons ensuite quelques applications du théorème établie par nous en [2]. Ces applications se réferent aux zéros réels des polynômes.

§ 1. *Généralisations des deux théorèmes*

En [1] nous avons établi le suivant théorème :

Étant donné le polynôme :

$$f(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots + a_{n-1} z + a_n \tag{1}$$

avec les coefficients réels ou complexes, on considére le polynôme :

$$\varphi(z) = p f(z) - (z - z_0) f'(z) , \tag{2}$$

avec p réel $\geqslant 0$ et z_0 un nombre réel ou complexe.

Soit les cercles $C_1, C_2, \ldots C_j$ et le domaine $M = C_1 U C_2 \ldots U C_j$. Les cercles continnent à l'intérieur ou sur le contour le point z_0. Le domaine M a en extériéur ou au plus sur le contour toutes les zéros de polynôme $f(z)$.

Le théorème affirme que toutes les zéros du polynôme $\varphi(z)$ sont situés aussi à l'extérieur de domaine M ou au plus sur le contour extérieur.

Nous donnerons la suivante généralisation :

*Théorème I **

Soient les polynômes $f_1(z)$, $f_2(z)$ avec les coefficients réels ou complexes et de degrés respectivement n_1, n_2. On considére le polynôme :

$$\psi(z) = (\alpha m_1 + \beta m_2) f_1(z) f_2(z) - (z - z_0) [m_1 f_1'(z) f_2(z) + m_2 f_2'(z) f_1(z)]$$

où nous avons :

m_1, m_2 nombres arbitraires reéls $\geqslant 0$,

α, β nombres arbitraires réels teles que $\alpha \geqslant n_1$, $\beta \geqslant n_2$,

z_0 : un nombre réel ou complexe.

Soit les cercles C_1, $C_2 \ldots C_j$ et le domaine $M = C_1 U C_2 \ldots U C_j$. Les cercles contiennent à l'intériuer ou sur leurs contours le point z_0. Le domaine M a en extérieur ou au plus sur le contour toutes les zéros des polynômes $f_1(z)$, $f_2(z)$. Toutes les zéros du polynôme $\psi(z)$ sont situés aussi à l'extérieur de M ou au plus sur le contour.

Démonstration.

Nous procédons comme en [1].

Considerons le polynôme $f(z) = f_1^{pr}(z)\, f_2^{qs}(z)$, ou p, q, r, s, sont nombres naturels.

Soit un cercle C qui contient à l'intérieur le point z_0 et tel que les zéros de polynôme $f(z)$ se trouvent à l'extérieur ou au plus sur lui.

Nous faisons la transformation conforme $z - z_0 = \dfrac{1}{Z - z_0}$, qui transforme le cercre C en un cerce C'. Le domaine intérieur du C corespond au domaine extérieur de C' et le domaine extérieur correspond au domaine intérieur.

Il résulte que le polynome

$$F(Z) = (Z - z_0)^{n_1 pr + n_2 qs} f_1^{pr}\left(z_0 + \frac{1}{Z - z_0}\right) f_2^{qs}\left(z_0 + \frac{1}{Z - z_0}\right),$$

a toutes les zéros à l'intérieur du cercle C' ou au plus sur son contour.

En appliquant le théorème de Lucas, il résulte que le polynôme :

$$F'_Z(Z) = (n_1 pr + n_2 qs)(Z - z_0)^{n_1 pr + n_2 qs} f_1^{pr}(3)\, f_2^{qs}(3) -$$
$$- (Z - z_0)^{n_1 pr + n_2 qs - 2}\left[pr\, f'_{13}(3)\, f_1^{pr-1}(3)\, f_2^{qs}(3) + \right.$$
$$\left. + qs\, f'_{23}(3)\, f_1^{pr}(3)\, f_2^{qs-1}(3)\right], \text{ où } 3 = z_0 + \frac{1}{Z - z_0},$$

a toutes les zéros à l'intérieur du cercle C' ou au plus sur son contour.

En revennant à la variable z, il résulte que le polynôme

$$\left(n_1 \frac{p}{q} + n_2 \frac{s}{r}\right) f_1(z)\, f_2(z) - (z - z_0)\left[\frac{p}{q} f'_{1z}(z)\, f_2(z) + \frac{s}{r} f'_{2z}(z)\, f_1(z)\right]$$

a toutes ses zéros a l'extérieur du cercle C ou au plus sur son contour.

En continuant comme en [1] on arrive à la conclusion que le polynôme

$$\psi(z) = (\alpha m_1 + \beta m_2) f_1(z)\, f_2(z) - (z - z_0)\left[m_1 f'_1(z)\, f'_2(z) + m_2 f'_2(z)\, f_1(z)\right],$$

ou α, β, m_1, m_2 satisfont les conditions du théorème, a toutes les zéros à l'extérieur du cercle C.

De la même façon on peut démontrer le suivante théorème plus générale :

*Théorème I**.*

Soient les polynômes $f_j(z)$, $j = 1, 2 \dots p$ avec les coefficients réels ou complexes et de degrés respectivement $n_1, n_2 \dots n_p$.

On considére le polynôme

$$\Phi(z) = \left[\sum_{j=1}^{p} \alpha_j m_j - (z - z_0)\left(\sum_{j=1}^{p} \frac{m_j f_j'(z)}{f_j(z)}\right)\right] \prod_{i=1}^{p} f_i(z) \qquad (4)$$

où nous avons :

m_i : nombres arbitraires réels $\geqslant 0$

α_i : nombre arbitraires réels tel que $\alpha_i \geqslant n_i$,

z_0 : un nombre réel ou complexe.

Considérons les cercles $C_1, C_2 \dots C_j$ qui ont à l'intérieur ou au plus sur leurs contours le point z_0 et ont en extérieur ou au plus sur le contour extérieur, toutes les zéros des polynômes $f_j(z)$.

Soit le domaine ouvert $M = \overset{j}{\underset{i=1}{U}} C_i$ et CM son domaine complémentaire.

Toutes les zéros du polynôme $\Phi(z)$ sont situés dans le domaine CM, ou au plus sur son frontière.

Aussi nous avons la généralisation du théorème II de l'ouvrage [1] ainsi :

Théorème II

Soient les polynômes $f_j(z)$, $j = 1, 2 \dots p$ avec les coefficients réels ou complexes et de degrés respectivement $n_1, n_2 \dots n_p$.

On considére le polynôme :

$$\Phi(z) = \left[\sum_{j=1}^{p} \alpha_j m_j - (z - z_0)\left(\sum_{j=1}^{p} \frac{m_j f_j'(z)}{f_j(z)}\right)\right] \prod_{i=1}^{p} f_i(z) \qquad (4)$$

où nous avons :

m_i : nombres arbitraires réels $\geqslant 0$

α_i : nombres arbitraireas réels tel que $\alpha_i \geqslant n_i$

z_0 : un nombre réel ou complexe.

a) Quoi que ce soit le cercle C qui passe par z_0 et par un zéro du polynôme $\Phi(z)$, contient dans l'intérieur ou sur le contour au moins un zéro de l'un de polynôme $f_j(z)$.

b) Chaque droite $\triangle$ menée par z_0 et par un zéro du polynôme $\Phi(z)$. divise le plan en deux semi-plans $\bar{D}_1$, $\bar{D}_2$ que nous les considérons domaines fermés sur la droite $\triangle$.

Dans chaque semi-plans $\bar{D}_1$, $\bar{D}_2$ il y a au moins un zéro de l'un de polynôme $f_j(z)$.

La demonstration de ce théorème se fait analoguement comme en [1].

Observations.

Pour les théorèmes ainsi généralisés, on peut étudier aussi analoguement toutes les questions traitées en [1].

§ 2. *La généralisation du théorème de Lucas*

Dans ce qui suit nous donnerons une généralisation du théorème de Lucas. Le théorème de Lucas s'énonce ainsi :

Etant donné le polynôme :

$$f(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots + a_n ,$$

avec les coeficients réels ou complexes et une courbe convexe et fermés Γ qui a dans l'intérieur ou au plus sur le contour les zéros du $f(z)$, alors le polynôme derivé $f'(z)$ a aussi les zéros en l'intérieur de la courbe Γ ou au plus sur le contour.

Dans nôtre ouvrage [1], nous avons indiqué une généralisation de ce théorème ainsi :

Considérons le polynôme $f(z)$ qui a toutes les zéros en intérieur ou au plus sur la courbe Γ, et nous formons le polynôme :

$$F(z) = q f(z) + (z - z_0) f'(z) ,$$

avec q réel $\geqslant 0$ et z_0 réel ou complexe en intérieur ou sur Γ.

Le polynôme $F(z)$ a aussi les zéros à l'intérieur de la courbe Γ ou au plus sur le contour.

Une plus grande généralisation du théorème de Lucas est le suivant :

Théorème

Soient les polynôme $f_j(z)$, $j = 1, 2 \ldots p$, avec les coefficients réels ou complexes et une courbe convexe et fermée Γ qui a en intérieur ou au plus sur le contour toutes les zéros des polynômes $f_j(z)$.

Le polynôme

$$F(z) = \left(\sum_{j=1}^{p} \frac{m_j f_j'(z)}{f_j(z)} \right) \prod_{i=1}^{p} f_i(z) , \tag{5}$$

avec m_j nombres réels arbitraires $\geqslant 0$, a aussi les zéros en intérieur de la courbe Γ ou au plus sur son contour.

Démonstration.

Nous considérons le polynôme :

$$f(z) = \prod_{j=1}^{p} f_j^{\frac{s_j}{a_j} \prod_1^p a_i}(z) ,$$

où s_j, a_j, $j = 1, 2 \ldots p$ *sont nombres naturels.*

En appliquant le théorème de Lucas, comme les zéros du polynôme $f(z)$ se trouvent en intérieur de la courbe Γ (courbe convexe et fermée) il résulte que les zéros de la dérivée :

$$f'(z) = \left(\sum_{j=1}^{p} \frac{s_j}{a_j} \frac{f_j'(z)}{f_j(z)} \right) \prod_{i=1}^{p} a_i ,$$

se trouvent aussi en l'intérieur de la courbe Γ.

Si nous posons $\frac{s_j}{a_j} = m_j$, il résulte que le polynôme

$$\left(\sum_{j=1}^{p} \frac{m_j f_j'(z)}{f_j(z)} \right) \prod_{i=1}^{p} f_i(z) ,$$

avec m_j nombres rationnels arbitraires $\geqslant 0$, a les zéros dans l'intérieur de la courbe Γ.

Pour démontrer plus loin, que les nombres m_j peuvent être aussi irationnels positifes, nous procederons analoguement comme en [1] (le théorème I).

Les cas particuliers.

1° Pour trois polynôme $f_1(z)$, $f_2(z)$, $f_3(z)$, avec les conditions du théorème de Lucas généralisé, il résulte que le polynôme :

$$m_1 f_1'(z) f_2(z) f_3(z) + m_2 f_2'(z) f_1(z) f_3(z) + m_3 f_3'(z) f_1(z) f_2(z)$$

a toutes les zéros en l'intérieur de la courbe Γ ou au plus sur le contour $(m_i \geqslant 0)$.

2° Si nous considérons le cas particulier de deux polynômes : $f_1(z) = f(z)$ et $f_2(z) = z - z_0$, on obtient la généralisations du théorème de Lucas qui a été indiquée en [1]).

3° Dans les conditions du théorème généralisé de Lucas, quand le polynôme (5) a un zéro z_1 sur Γ, il resulte que la courbe Γ a dans un voisinage de z_1 un segment de droit qui est déterminé par deux zéro des fonctions $f_j(z)$ (dans l'hypothése que la courbe Γ est la moindre courbe convexe qui contient les zeros de $f_j(z)$).

On excepte seulement le cas quand le zéro z_1 de la fonction (5) se confond avec un zéro des fonctions $f_j(z)$.

4° Si par un certain point z_0 on menent deux droites qui continnent dans un même angle toutes les zéros des polynômes $f_j(z)$, $j = 1, 2 \ldots p$, les zéros des polynômes 4) et 5) sont situès dans ce angle.

5° Si les points $z_1, z_2, \ldots z_n$ sont situés dans l'intérieur de la courbe Γ (convexe et fermée) aussi le polynôme :

$$\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{m_i}{z - z_i} \right) \prod_{j=1}^{n} (z - z_j) ,$$

avec le nombre m_i réels $\geqslant 0$, a toutes les zéros dans l'intérieur de la courbe Γ.

6° Si les polynômes $f_j(z)$ sont polinômes Hurwitz, aussi le polynnôme (5) est un polynôme Hurrwitz.

§ 3. *Les applications d'un théorème cancernant à la separation des zéros réels des polynômes*

En nôtres ouvrages [2], [3], [4], nous avons indiqué des théorèmes concernant aux zéros d'une fonction réelle $f(x)$, continue sur un intervalle $[a, b]$ et dérivable sur l'intervalle (a, b).

Comme une consequence de ces théorèmes il résulte :

Soit une fonction $f(x)$ continue sur $[a, b]$ et dérivable sur (a, b) et $\psi(x)$, $\varphi(x)$ deux fonctions definies sur $[a, b]$ avec valeurs finies et continues sur (a, b).

(Dans ce théorème et aussi dans les autres théorèmes des notres ouvrages [2], [3], [4], on comprend que les fonctions $\psi(x)$ et $\varphi(x)$ sont bornés sur $[a, b]$).

Les zéros réels des fonctions :

$$\Phi(x) = \psi(x) f(x) + \varphi(x) f'(x), \quad \varphi(x), \tag{6}$$

séparent les zéros réels de fonctions $f(x)$ dans $[a, b]$.

Nous avons appliqué ce théorème aux polynômes $P(x)$ avec les coefficients réels. Quand un polynôme $P(x)$ de degré n n'a pas de zéros multiples, nous avons vu qu'on peut trouver deux polynômes de degré $\approx \frac{n-1}{2}$, dont les zéros séparent les zéros du $P(x)$.

Ainsi, pour un polynôme $P(x)$ de degré $n = 2p$, il faut déterminer les zéros réels de deux polynômes, avec les dégrés respectif p *et* $p-1$.

En ce qui suit nous indiquerons une méthode pour diminuer encore le degré de l'un de deux polynômes avec une unité.

Dans ce cas, pour séparer les zéros du $P(x)$, il faut trouver les zéros réels de quatre polynômes.

Soit le polynôme $P(x)$, de degré $2p$ dont les zéros réels nous voulons les separer.

On détèrmine deux polynômes en utilisant la consequènce precedente avec la formule (6) appliquée aux polynômes.

De la relation,

$$\Phi(x) = M(x) P(x) + N(x) P(x) \tag{6'}$$

ou $M(x)$, $N(x)$ sont polynômes, on détermine le polynôme $\Phi(x) = \Phi_1(x)$ de degré p et le polynôme $N(x) = N_1(x)$ de degré $p-1$.

Nous déterminons encore deux polynômes $\Phi(x) = \Phi_2(x)$ et $N(x) = N_2(x)$ aussi de degré p respectif $p-1$. On sait que les zéros réels du $\Phi_1(x)$ et $N_1(x)$, (éventuel $x = 0$) sépparent les zéros réels du $P(x)$ et aussi les polynômes $\Phi_2(x)$ et $N_2(x)$ ont les mêmes proprietés.

Soit

$$\left.\begin{aligned} \Phi_1(x) &= x^p + a_1 x^{p-1} + \ldots + a_p \\ \Phi_2(x) &= x^p + b_1 x^{p-1} + \ldots + b_p \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

Cela posé, considérons le cas quand entre deux zéros consécutifs x_1, x_2 *du* polynôme $P(x)$ se trouve au moins un zéro de chaque polynôme $\Phi_1(x)$, $\Phi_2(x)$. Soit x_1' le zéro du $\Phi_1(x)$ et x_2' le zéro du $\Phi_2(x)$. On a $x_1 < x_1' < x_2$; $x_1 < x_2' < x_2$.

Nous pouvons avoir deux cas :

$$\text{a) } \Phi_1(x_2')\,\Phi_2(x_1') \geqslant 0 \quad , \qquad \text{b) } \Phi_1(x_2')\,\Phi_2(x_1') < 0 .$$

Dans le cas a) le polynôme : $\Phi_1(x) - \Phi_2(x)$ a au moins un zéro entre x_1' et x_2'.

Dans le cas b) le polynôme $\Phi_1(x) + \lambda\Phi_2(x)$ avec $\lambda > 0$, a aussi au moins un zéro entre x_1' et x_2' (on voit ces propriétés en faisant les graphiques des Φ_1, Φ_2 entre x_1 et x_2).

Il s'ensuit que les zéros réels des polynômes :

$$\Phi_1(x) - \Phi_2(x) \, , \quad \Phi_1(x) + \lambda\Phi_2(x) \text{ avec } \lambda > 0 \, , \; N_1(x) \, , \; N_2(x) \qquad (8)$$

(éventuel $x = 0$) séparent les zéros réels du polynôme $P(x)$.

Pour réduire aussi le degré du polynôme $\Phi_1(x) + \lambda\Phi_2(x)$ avec une unité, on lui trouvera un zéro $x = \alpha$, tel que $\lambda > 0$.

Quand ces zéros n'existent pas, il résulte que les polynômes $\Phi_1(x)$, $\Phi_2(x)$ n'ont aucun zéro réel et la probleme ne se pose pas, parce que, en ce cas, les zéros du $P(x)$ sont separés par les zéros du $N_1(x)$ ou du $N_2(x)$ (on admet que Φ_1 et Φ_2 n'ont pas des racines réelles multiples ou communes — parce qu'elles peuvent être trouvées prealablement.).

On a :

$$\lambda = -\frac{x^p + a_1 x^{p-1} + \ldots a_p}{x^p + b_1 x^{p-1} + \ldots b_p} .$$

Si $a_p\, b_p < 0$ on obtient $\lambda = -\dfrac{a_p}{b_p}$, $x = \alpha = 0$.

Dans le cas contraire on prend une valeur $x = \alpha$, de telle sorte que $\Phi_1(\alpha)\ \Phi_2(\alpha) < 0$.

Observations

1° La méthode que nous venons d'exposer est possible parce qu'il existe plusieures solutions pour séparer les zéros réels d'une fonction [1].

Ainsi, pour séparer les zéros réels du polynôme $P(x)$ nous avons trouvé premièrement deux solutions :

$$\text{I. } \Phi_1(x) \, , \; N_1(x) \; ; \quad \text{II. } \Phi_2(x) \, , \; N_2(x) .$$

Plus loin, nous avons considéré le polynôme $\Phi_1(x)$ avec $\Phi_2(x)$ et il a résulté que les zéros réels des polinomes $P_1(x)$, $P_2(x)$, $N_1(x)$, $N_2(x)$ séparent les zéros réels du $P(x)$. Nous faisons la remarque que la methode peut être appliqué à toutes les polynômes de degrés paire ou impaire et que au lieu de Φ_1 et Φ_2 nous pouvons prendre un certain polynôme de la solution I avec un certain polynôme de la solution II.

2° Nous pouvons continuer pareillement, mais en général plus loin la méthode présente de difficultés, parce que le nombre des polynômes est trop grand.

§ 4. *Applications*

Problème 1. On demande de séparer les zéros réels du polynôme :

$$P(x) = x^6 - 4x^5 + x^4 - 8x^3 - x^2 + 6x + 1$$

Formons le polynôme (6) et nous avons :

$$\Phi(x) = (px + q)\,(x^6 - 4x^5 + x^4 - 8x^3 - x^2 + 6x + 1) + \\ + (x^2 + ax + b)\,(6x^5 - 20x^4 + 4x^3 - 24x^2 - 2x + 6)$$

a) En anulant les coefficients de x^7, x^6, x^5, x^4 on obtient :

$$x^7 : p + 6 = 0$$
$$x^6 : q + 6a + 4 = 0$$
$$x^5 : -4q - 20a + 6b - 2 = 0$$
$$x^4 : q + 4a - 20b + 24 = 0.$$

On obtient :

$$p = -6,\ q = \frac{532}{17},\ a = -\frac{100}{17},\ b = \frac{27}{17},$$

Les coefficients de x^3, x^2, x, x^0 sont :

$$x^3 : -8q - 24a + 4b + 4 = -\frac{1680}{17}$$

$$x^2 : -q - 2a - 24b - 30 = -\frac{1490}{17}$$

$$x^1 : 6q + 6a - 2b - 6 = \frac{2436}{17}$$

$$x^0 : q + 6b = \frac{694}{17}.$$

Ainsi nous avons déterminé les polynômes :

$$\Phi_1(x) = 1680\ x^3 + 1490\ x^2 - 2436\ x - 694$$
$$N_1(x) = 17\ x^2 - 100\ x + 27$$

b) D'après cela, on annule les coefficients des x^7, x^6, x^5, x (les expressions de ces coefficients sont trouvés plus haut).

On a :

$$p + 6 = 0$$
$$q + 6a + 4 = 0$$
$$-4q - 20a + 6b - 2 = 0$$
$$q + 6b = 0$$

On obtient :

$$p = -6, \quad q = \frac{102}{15}, \quad a = -\frac{27}{15}, \quad b = -\frac{17}{15}.$$

Les coefficients de x^4, x^3, x^2, x sont respectivement

$$\frac{694}{15}, \quad -\frac{176}{15}, \quad -\frac{90}{15}, \quad \frac{394}{15}$$

On aura :

$$\Phi_2(x) = 694\ x^3 - 176\ x^2 - 90\ x + 394$$
$$N_2(x) = 15\ x^2 - 27\ x - 17\ , \quad x = 0$$

c) On forme ainsi les polynômes 8) :

$$P_1(x) = \frac{\Phi_1(x)}{1680} - \frac{\Phi_2(x)}{694} = 1{,}141\ x^2 - 1{,}321\ x - 0{,}982$$

$$x\,P_2(x) = \frac{\Phi_1(x)}{694} + \frac{\Phi_2(x)}{394} = 4{,}18\ x^3 + 1{,}70\ x^2 - 3{,}74\ x\,.$$

Les zéros du polynôme $P\ (x)$ sont séparés par les zéros des polynômes :

$$P_1(x) = 1{,}141\ x^2 - 1{,}321\ x - 0{,}982$$
$$P_2(x) = 4{,}18\ x^2 + 1{,}70\ x - 3{,}74$$
$$N_1(x) = 17\ x^2 - 100\ x + 27$$
$$N_2(x) = 15\ x^2 - 27\ x - 17$$

et par $x = 0$.

Les zéros réels des polynômes precedents sont :

$P_1(x)$: $-0{,}514$; $1{,}665$ $\qquad$ $P_2(x)$: $-1{,}17$; $0{,}763$

$N_1(x)$: $0{,}285$; $5{,}59$ $\qquad$ $N_2(x)$: $0{,}494$; $2{,}29$

d) En substituant ces zéros dans le polynôme $P(x)$ on obtient

x	$-\infty$	$-1{,}17$	$-0{,}514$	$-0{,}494$	0	$0{,}285$	$0{,}763$	$1{,}665$	$2{,}29$	$5{,}59$	$+\infty$
$P(x)$	$+$	$+$	$-$	$-$	$+$	$+$	$+$	$-$	$-$	$+$	$+$

Le polynôme donné $P(x)$ a donc quatre zéros réels respectivement dans les intervalles : $(-1{,}17\ ;\ -0{,}514)$, $(-0{,}494\ ;\ 0)$, $(0{,}763\ ;\ 1{,}665)$, $(2{,}29\ ;\ 5{,}59)$.

Observations.

1° On peut éliminer les unes de substitutions si on détérmine en préalable la limite inférieure et la limite supérieure des zéros du $P\ (x)$.

2° Il faut observer que nous avons déterminé les polynômes $\Phi_1(x)$, $N_1(x)$; $\Phi_2(x)$, $N_2(x)$ en annulant certains coefficients, mais on peut trouver tels polynômes en annulant d'autres coefficients. En toutes le cas, il faut tenir compte de $x = 0$.

3° Dans l'exémple précédent, les termes libres sont de signe contraire. Nous allons resoudre la suivante problème où ces termes ont les même signes.

Probleme 2. On démande de séparer les zéros réels du polynôme :

$$P(x) = x^4 - 2x^3 + x^2 + 2x + 1$$

Formons le polynôme (6) et on aura :

$$\Phi(x) = p\ (x^4 - 2x^3 + x^2 + 2x + 1) + (x + a)\ (4x^3 - 6x^2 + 2x + 2)$$

— En annulant les coefficients de x^4 et x^3 on obtient

$$x^4 : p + 4 = 0$$

$$x^3 : 4a + 2 = a$$

$$p = -4\ ,\ a = -\frac{1}{2}$$

$$x^2 : -6a - 2 = 1$$

$$x^1 : 2a - 6 = -7$$

$$x^0 : 2a - 4 = -5$$

Ainsi nous avons :

$$\Phi_1(x) = x^2 - 7x - 5\ ,\quad N_1(x) = x - \frac{1}{2}.$$

(Les zéros des ces polynômes séparent les zéros du $P(x)$, mais nous allons illustrer plus loin la méthode avec cette exemple).

— On annule les coefficints de x^4 *et* x^0 et on aura :

$$p = -4\ ,\ a = 2$$

$$\Phi_2(x) = 5x^2 - 7x - 1\ ,\ N_2(x) = x + 2\ ,\ \text{et}\ x = 0.$$

— On obtient

$$P_1(x) = \Phi_2(x) - 5\,\Phi_1(x) = 28x + 24.$$

Pour trouver $P_2(x)$ il faut détérminer la valeur $\lambda > 0$ donné par

$$\lambda = -\frac{\Phi_1(x)}{\Phi_2(x)} = -\frac{x^2 - 7x - 5}{5x^2 - 7x - 1}$$

pour une certaine valeur de x.

Pour $x=2$ on aura $\lambda=3$ et on obtient :

$$(x-2)\,P_2(x)=\Phi_1(x)+\lambda\Phi_2(x)=16x^2-28x-8.$$

$$\frac{1}{8}\,P_2(x)=4x+1.$$

Les zéros réels du polqnôme $P(x)$ sont séparés par les zéros des polynômes

$$P_1(x)=4(7x+6)\quad,\quad P_2(x)=4x+1$$

$$N_1(x)=x-\frac{1}{2}\quad,\quad N_2(x)=x+2 \text{ et par } x=0,\ x=2.$$

— En substituant les zéros des polynômes précédentes dans $P(x)$, on aura :

x	$-\infty$	-2	$-\frac{6}{7}$	$-\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{2}$	2	$+\infty$
$P(x)$	+	+	+	+	+	+	+	+

Le polqnôme $P(x)$ n'a aucune vacine réelle.

Problmème 3. On demande de séparer les zéros réels du polynôme :

$$x^6-2x^5-3x^4+5x^3-4x^2-x-1.$$

Nous avons :

$$\Phi(x)=(px+q)(x^6-2x^5-3x^4+5x^3-4x^2-x-1)+$$
$$+(x^2+ax+b)(6x^2-10x^4-12x^3+15x^2-8x-1)$$

a)

$x^7 : p+6=0$

$x^6 : q+6a+2=0$

$x^5 : -2q-10a+6b+6=0$

$x^4 : -3q-12a-10b-15=0$

$x^3 : 5q+15a-12b+16=\frac{981}{28}$

$x^2 : -4q-8a+15b+5=-\frac{981}{28}$

$x : -q-a-8b+6=\frac{421}{28}$

$x^0 : -q-b=-\frac{43}{28}$

$$p=-6,\ q=\frac{82}{28},\ a=-\frac{23}{28}$$

$$b=-\frac{39}{28}$$

$$\Phi_1(x)=981x^3-589x^2+421x-43$$
$$N_1(x)=28x^2-23x-39$$

b)

$$x^7 : p + 6 = 0$$
$$x^6 : q + 6a + 2 = 0$$
$$x^5 : -2q - 10a + 6b + 6 = 0$$
$$x^0 : -q - b = 0$$
$$x^4 : -3q - 12a - 10b - 15 = \frac{43}{19}$$
$$x^3 : 5q + 15a - 12b + 16 = \frac{615}{19}$$
$$x^2 : -4q - 8a + 15b + 5 = -\frac{349}{19}$$
$$x : -q - a - 8b + 6 = \frac{321}{19}$$

$$p = -6,\ q = \frac{28}{19},\quad a = -\frac{11}{19}$$
$$b = -\frac{28}{19}$$

$$\Phi_2(x) = 43x^3 + 615x^2 - 349x + 321$$
$$N_2(x) = 19x^2 - 11x - 28$$

c)

$$P_1(x) = \frac{\Phi_1(x)}{981} - \frac{\Phi_2(x)}{43} = -14{,}90x^2 + 8{,}549x - 7{,}52$$

$$xP_2(x) = \frac{\Phi_1(x)}{43} + \frac{\Phi_2(x)}{321} = 22{,}93x^3 - 11{,}78x^2 + 8{,}68x.$$

Les polynômes $P_1(x)$, $P_2(x)$ ont les zéros complexes.
Les zéros réels des $N_1(x)$ et $N_2(x)$ sont :

$N_1(x)$: — 0,838 ; 1,66 $\quad$ $N_2(x)$: — 0,958 ; 1,54.

x	$-\infty$		$-0{,}958$		$-0{,}838$		0		$1{,}54$		$1{,}66$		$+\infty$
$P(x)$	+		—		—		—		—		—		+

En déterminant la limite supérieure et la limite inférieure des zéros réels de $P(x)$, il résulte d'ici que le polynôme donné a deux zéros réels situés respectivement dans les intervalles : $(-2 ; -0{,}958)$, $(1{,}66 ; 3)$.

La chaire de mathématiques
Institut polytechnique de Bucarest

BIBLIOGRAPHIE

1. *I. M. Miu :* Contribution à la thèorie des équations algébriques. (Buletinul Institutului politehnic Bucureşti, Tom. XXV, fascic. 5, 1963).
2. *I. M. Miu :* Une nouvelle méthode de séparation des racines réelles des équations. (Buletinul Institutului politehnic Bucureşti, tom. XXV, fasc. 4, 1963).
3. *I. M. Miu :* Sur une théorème et une généralisation du théorème de la moyenne (Buletinul Institutului politehnic Bucureşti, tom. XXV fasc. 6, 1963).
4. *I. M. Miu :* Sur les zéros réels de certaines fonctions (Buletinul Institutului politehnic Bucureşti, tom. XXVI, fasc. 2, 1963).

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC BUCUREȘTI
Tomul XXVI — 1964, Fascicola 6

C.Z. 517

DESPRE MODALITĂȚILE DE VALENȚĂ ALE UNUI SISTEM LOGISTIC NECONSTRUCTIV DE TREAPTA I*

MIRCEA TÎRNOVEANU

Observația 1.1°. În această comunicare se definește un sistem logistic neconstructiv de treapta I, Σ^1, și se studiază unele proprietăți ale modalităților de valență ale sistemului Σ^1.

2° Notațiile din această comunicare sînt acelea din [7].

§ 1. *Semiotica modalităților de valență ale lui* Σ^1.

Observația 1.1. În acest paragraf se definește sistemul neconstructiv de treapta I, Σ^1, și semiotica modalităților de valență ale sistemului Σ^1.

Definiția 1.1. Sistem logistic neconstructiv. Se numește *sistem logistic neconstructiv* un sistem logistic $[M, \sigma]$ pentru care se pot defini două procedeie (care nu sînt algoritmi normali) π_1, π_2 de recunoaștere a apartenenței la mulțimea M, respectiv de recunoaștere a apartenenței la mulțimea σ și unde card$M$ și cardσ sînt arbitrare.

Definiția 1.2. Sistemul logistic neconstructiv de treapta I, Σ^1. Sistemul Σ^1 este definit de

$$\Sigma^1 =_D [M\,;\ \sigma].$$

unde

1° $[M\,;\ \sigma]$ este un sistem logic analitic de treapta I.

2° $[M\,;\ \sigma]$ este un sistem logic neconstructiv.

3° Există un sistem logistic neconstructiv $[A\,;\ R]$, un izomorfism f și un izomorfism g indus de f astfel încît

$$[M\,;\ \sigma] = f[A\,;\ R]$$

$$\sigma = g(R)$$

---

* Lucrare comunicată la sesiunea cadrelor didactice din Institutul politehnic București, 22—23 februarie 1964.

Definiția 1.3. Modalitatea de valență ale lui Σ^1. Fie Σ^1 un sistem logistic neconstructiv de treapta I ;

$$\Sigma = [R\,;\ q_1,\ q_2,\ A,\ A^*,\ A']$$

un proces comunicativ, unde :

$$A = \Sigma^1$$
$$A^* = (\Sigma^1)^*$$
$$A' = (\Sigma^1)'\,;$$

$(\Sigma^1)_v$ mulțimea valențelor globale ale sistemului Σ^1. Se numește *modalitatea de valență* a sistemului Σ^1, modalitățile globale (σ_{R_1}) ale tuturor sistemelor comunicative de forma :

$$[R,\ q_{i_1},\ p_{i_2}, \Sigma^1 \cup (\Sigma^1)_v,\ (\Sigma^1)_i)^*, (\Sigma^1 \cup (\Sigma^1)_v]_{i\in I}$$

Teorema 1.1. (Semiotica primitivă a modalităților de valență ale lui Σ^1). Fie I.1.*i* simbolul ipotezei 1.*i*

$\varepsilon\, I.1.i\,;\ i = 1, 2, \ldots, 15$

$\uparrow$

$I.1.1 : \varepsilon$

$I.1.2 : \cdot$

$I.1.3 : |$

$I.1.4 : \varepsilon'$
$\quad \varepsilon_1$

$I.1.5 : \varepsilon'$
$\quad \varepsilon \cdot 1$

$I.1.6 : \varepsilon'$
$\quad \varepsilon' \cdot \cdot$

$I.1.7 : \varepsilon'$
$\quad \varepsilon'$
$\quad\quad \cdot 1$

$I.1.8 : \varepsilon'$
$\quad \varepsilon'$
$\quad\quad \varepsilon\varepsilon'$

$I.1.9 ; \varepsilon'$
$\quad \varepsilon'$
$\quad\quad \varepsilon'$
$\quad\quad\quad \varepsilon\,\varepsilon\,1$

$I.1.10 : \varepsilon'$
$\quad \varepsilon'$
$\quad\quad \cdot\varepsilon'$
$\quad\quad\quad \varepsilon'$
$\quad\quad\quad\quad \varepsilon \cdot 1$

$I.1.11: \varepsilon'$

ε'

ε'

$\varepsilon \quad \varepsilon'$

$\varepsilon\varepsilon 1 \quad \varepsilon$

$\varepsilon \cdot 1$

$I,1.12: \varepsilon \cdot \cdot \cdot$

$\varepsilon\varepsilon \cdot \cdot \cdot$

$\varepsilon\varepsilon \cdot \cdot$

$\varepsilon\varepsilon \cdot \cdot$

$\varepsilon\varepsilon \cdot \cdot$

$\cdot \cdot \cdot$

$\cdot \cdot \cdot$

$\cdot \cdot \cdot$

$I.1.12: \varepsilon \cdot \cdot \cdot 1$

$\varepsilon\varepsilon \cdot \cdot \cdot 1$

$\varepsilon\varepsilon \cdot \cdot \cdot 1$

$\varepsilon\varepsilon \cdot \cdot \cdot 1$

$\varepsilon\varepsilon \cdot \cdot \cdot 1$

$\cdot \cdot \cdot \cdot 1$

$\cdot \cdot \cdot \cdot 1$

$I.1.14: \varepsilon \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot$

$\cdot \cdot \cdot \cdot \cdot$

$\cdot \cdot \cdot \cdot \cdot$

$\cdot \cdot \cdot \cdot \cdot$

$\cdot \cdot \cdot \cdot \cdot$

$\cdot \cdot \cdot \cdot \cdot$

$\cdot \cdot \cdot \cdot \cdot$

$\cdot \cdot \cdot \cdot \cdot$

$I.1.15. \varepsilon \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot 1$

$\cdot \cdot \cdot \cdot \cdot 1$

$\cdot \cdot \cdot \cdot \cdot 1$

$\cdot \cdot \cdot \cdot \cdot 1$

$\cdot \cdot \cdot \cdot \cdot 1$

$\cdot \cdot \cdot \cdot \cdot 1$

$\cdot \cdot \cdot \cdot \cdot 1$

$I.1.16. \varepsilon\ (I.1.1, \ldots, I.1.15)$

$\downarrow$

$(\Diamond)\Sigma^1 = [A\,;\, \sigma \cup (I.1.1, \ldots, I.1.15)] \,\&\, (\Diamond)(\sigma_{R_1})^* = I.1.1, \ldots, I.1.15)$.

Teorema 1.2. (Semiotica derivată a modalităților de valență ale sistemului Σ^1).

$\varepsilon\ (\shortmid\!\!-\!\!\shortmid\!\!\rightarrow)$

$\cdot \downarrow$

$\varepsilon\ (\varepsilon \shortmid\!\!-\!\!\shortmid\!\!\rightarrow (\sigma^*_{R_1}) \,|\& (\cdot \shortmid\!\!-\!\!\shortmid\!\!\rightarrow (\sigma^{**}_{R_1}) \,\&\, (| \shortmid\!\!-\!\!\shortmid\!\!\rightarrow (\sigma^{***}_{R_1})$

$\downarrow$

$(\Sigma^1 \cup (\sigma^*_{R_1}) \cup (\sigma^{**}_{R_1}) \cup (\sigma^{***}_{R_1}))_v \neq 0$

§ 2. *Legi de inferență ale modalităților de valență ale sistemului* Σ^1.

Observația 2.1. In acest paragraf se studiază legile de inferență deductivă și inductivă ale modalităților de valență ale sistemului Σ^1.

Definiția 2.1. Lege de inferență deductivă ale modalităților de valență ale sistemului Σ^1. Fie sistemul Σ^1 și fie (σ_{R_1}) submulțimea modalităților de valență ale sistemului Σ^1. Relația $\mathfrak{R}_d \in \mathfrak{R}$ (unde $\mathfrak{R}$ este domeniul $\mathfrak{L}$ — relațiilor) este o lege de inferență deductivă în (σ_{R_1}) dacă

1° Există $(\sigma'_{R_1}) \subset (\sigma_{R_1})$ astfel încît

$$\mathfrak{R}_d\ \sigma_{R_1}\ \sigma'_{R_1};\ (\sigma'_{R_1} \in (\sigma'_{R_1}))\ \&\ (\sigma_{R_1} \in (\sigma_{R_1}))$$

2° (σ_{R_1}) admite o semiotică primitivă conform cu teorema 1.1.

3° (σ_{R_1}) admite o semiotică derivată conform cu teorema 2.2. unde simbolul $\vdash\!\dashv\!\rightarrow$ este compatibil cu relația $\mathfrak{R}_d$

Definiția 2.2. Lege de inferență inductivă ale modalităților de valență ale sistemului Σ^1. Fie sistemul Σ^1 și fie (σ_{R_1}) mulțimea modalităților de valență ale sistemului Σ^1. Relația $R_i \in \mathfrak{R}$ (unde $\mathfrak{R}$ este domeniul $\mathfrak{L}$ — relațiilor) este o *lege de inferență inductivă* în (σ_{R_1}) dacă:

1° Există $(\sigma'_{R_1}) \subset (\sigma_{R_1})$ astfel încît

$$P\,(\diamond\ R_i\ \sigma_{R_1}\ \sigma'_{R_1}) \neq 0;\ (\sigma'_{R_1}\ \epsilon'_{R_1}))\ \&\ (\sigma_{R_1} \in (\sigma_{R_1}))$$

unde P este simbolul probabilității.

2° $P((\sigma_{R_1})\ RQT.\ 1.1.) \neq 0$
(adică probabilitatea ca (σ_{R_1}) să fie compatibilă cu teorema 1.1. este diferită de zero).

3° $P\,((\sigma_{R_1})\ R\ \underset{|}{Q}\ T\ 1.2.)\ \&\ (\vdash\!\dashv\!\rightarrow R\ Q\ R_i)) \neq 0$
(adică probabilitatea ca (σ_{R_1}) să fie compatibilă cu teorema 1.2. și ca simbolul $\vdash\!\dashv\!\rightarrow$ să fie compatibil cu relația R_i este diferită de zero).

Teorema 2.1. Fie: E domeniul $\mathfrak{L}$ — entităților, Ω^i, Ω^{ij}, Ω^{123}, valențe ale sistemului Σ^1; Δ^i, Δ^{ij}; Δ^{123} modalități ale valențelor Ω^i, Ω^{ij}, Ω^{123}; $\mathfrak{R}$ domeniul $\mathfrak{L}$ — relațiilor; $\mathfrak{L}$ domeniul $\mathfrak{L}$ — probabilităților; S^i, S^{ij}; S^{123} semiotici primitive ale lui Δ^i. Δ^{ij}, Δ^{123}; S^{xi}, S^{xij}, S^{x123} semiotici derivate ale lui Δ^i, Δ^{ij}, Δ^{123}. $\varepsilon\,((E' \subset E)\ \&\ (\mathfrak{R}' \subset \mathfrak{R})\ \&\ (E' \neq \emptyset)\ \&\ (E' \neq E)\ \&\ (\mathfrak{R}' \neq \emptyset)\ \&\ (\mathfrak{R}' \neq \mathfrak{R})) \rightarrow (\Omega^i, \Omega^{ij}, \Omega^{123})' \mathrel{\underset{\sqcap\!\sqcap}{\sqcup\!\sqcup}} \Omega)\ \&\ ([\Delta^i, \Delta^{ij}, \Delta^{123}]' \mathrel{\underset{\sqcap\!\sqcap}{\sqcup\!\sqcup}} \Delta)\ \&\ ([S^i, S^{ij}, S^{123}]' \mathrel{\underset{\sqcap\!\sqcap}{\sqcup\!\sqcup}} S)\ \&\ ([S^{xi}, S^{xij}, S^{x123}]' \mathrel{\underset{\sqcap\!\sqcap}{\sqcup\!\sqcup}} S^x];\ i.j = 1.2.3.$

Teorema 2.2.

$$((x_0,\ y_0 \in \Omega)\ \&\ (x_0 \neq y_0)) \Rightarrow \varepsilon\ ((X, Y \subset \Omega)\ \&\ (x_0 \in X,\ y_0 \in Y)\ \&$$
$$\&\ (\{K_x\}_{x \in X} \neq \varnothing, \{K_y\}_{y \in Y} \neq \varnothing)$$
$$((\operatorname{card} x,\ \operatorname{card} y \leqslant \aleph_0) \Rightarrow ((\{Kx\} \div$$
$$\div \{K_y\}\ \&\ (K_{x_0} \div K_{y_0}))\ \&$$
$$\&(\operatorname{card} x,\ \operatorname{card} y \geqslant \aleph_0) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow ((\{K_x\} \dot{\div} \{K_y\})\ \&\ (K_{x_0} \div K_{y_0}))$$

Catedra de matematică
Institutul politehnic București

BIBLIOGRAFIE

1. *Carnap R.* Meaning and necessity, Chicago, 1956.
2. *Carnap R.* — Beobachtungsprache und theoretische Sprache, în Dialectica, vol. 12, 1958 pp. 236—248.
3. *Kleene, S. G.* — Introduction to Methamathematics D. van Nostrand Compagny, New-York Toronto, 1962.
4. *Tîrnoveanu Mircea* Despre funcția de valență logică ψ. Com. Acad. R.P.R., 1962, XII, 6.
5. *Tîrnoveanu Mircea* — Despre o modelare geometrică a sistemului Σ Com. Acad. R.P.R., 1963, XIII, 1.
6. *Tîrnoveanu Mircea* — Despre un sistem de comunicare de treapta 1, Com. Acad. R.P.R., 1963, XIII, 8.
7. *Tîrnoveanu Mircea* — Elemente de logică matematică, vol. I, Ed. didactică și pedagogică, 1964.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC BUCUREȘTI
Tomul XXVI — 1964, Fascicola 6

FIZICA

C.Z. 537.3

PROTECTION WITH SACRIFICIAL ANODES OF BURIED STRUCTURES (THEORY, PRACTICAL FORMULAS, TABLES)

G. MOISIL

1. General

The design of electrical protection of buried structures with sacrificial anodes, involves the computation of the electrical potential along the structure.

Roger's formulas [1] established for cathodic protection with external sources, have been applied to this end by Trifel [2]. A more detailed study has been carried out by Lunev and Ershov [3]. On the basis of certain hypotheses derived from electrochemical considerations, and by the adoption of a conventional theory concerning the dispersion of the current in the soil, these authors have deduced formulas for the current intensity and for the potential along the structure.

The ideas of Lunev and Ershov will be exposed bellow, in a form that will enable the use of a more general theory of the current dispersion as follows :

(a). Current leaked through the connection between the structure and the anode is :

$$I = \frac{(E_C^0 - E_A^0) + \Delta E_C + \Delta E_A}{\Sigma W} \tag{1}$$

where E_C^0 and E_A^0 are the potentials of the buried structure and of the anode, if no connection is made between these electrodes ; ΔE_C and ΔE_A are the potential changes after connecting the electrodes together, ΣW is the whole resistance of the circuit.

(b). The electrical resistance between the structure and the anode being unaffected by the presence of electromotive fields, ΣW can be computed exactly in the same way, as in the absence of these fields.

(c). ΔE_C may be identified with the potential V_c (o), which would be produced in the point $x = O$ by a current I, drained from this point of the structure, in the absence of electromotive fields :

$$\Delta E_C = V_c(o) = -p_c(o)\, I \tag{2}$$

$p_c(x)$ is a proportionality coefficient between $V_c(x)$ and I, and it is a function of the geometrical and electrical parameters of the problem.

(d). As it results from experimental data [3], the anode polarization is very small, and thereby $\triangle E_A$ can be discarded.

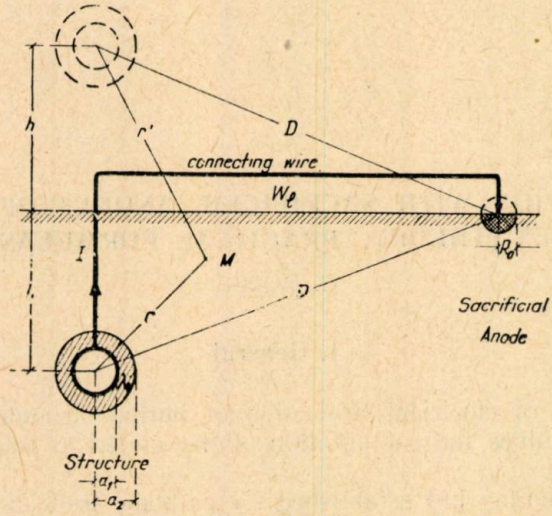


Fig. 1

Thereafter, the current I, and the potential $V_c(x)$ along the structure are :

$$I = \frac{E_C^0 - E_A^0}{p_c(x) + \Sigma W} \tag{3}$$

$$V_c(x) = - p_c(x) \frac{E_C^0(o) + E_A^0}{p_c(o) + \Sigma W} \tag{4}$$

2. Theory

In a previous paper [4], the author has solved, by integrating the Laplace-Poisson equation, the following problem :

An infinite cylindrical structure, covered with an insulating coating, and an anode, are buried together in a homogenous soil (see fig. 1). The interface soil-air is supposed to be plane. The impressed cathodic protection current I, from an external source, produces along the structure the potential :

$$V_c(x) = - \frac{r_c I}{\pi} \int_0^\infty f(q) \cos xq \, dq \tag{5}$$

where

$$f(q) = \frac{K_0(qa_1) - A_1(q)\, K_0(qa_2)\, I_0(qa_1)}{2\pi r_c \lambda_s + q^2 [K_0(qa_1) + B_1(q)\, K_0(qa_2)]\, I_0(qa_1)} \tag{6}$$

The functions $A_1(q)$ and $B_1(q)$ are determined by the following parameters :

a_1 — radius of the structure
a_2 — radius of the cylindrical external surface of the coating
h — depth of burial of the structure
D — distance structure-anode
λ_i — coating conductivity
λ_s — soil conductivity
r_c — resistance of the structure length-unit.

The expressions of $A_1(q)$ and $A_2(q)$ are given in Appendix *I*, formulas $(A—1)$ and $(A—2)$.

From (4) and (5) it results immediately :

$$p_c(o) = \frac{r_c}{\pi} \int_0^\infty f(q)\, dq \tag{7}$$

The preceding expression may be used in formula (4) for the protection with sacrificial anode as well, if the hypotheses $(a)—(d)$ are accepted.

In order to apply relation (3) for the calculus of the current I, leaked through the connection between a sacrificial anode and the buried structure, it is necessary to know the whole resistance of the circuit, i.e. ΣW. This quantity is the sum of two terms :

$$\Sigma W = W_1 + W_s \tag{8}$$

The first term is the resistance of the external circuit between structure and anode, and it includes the resistance of the connecting wires, and eventually the internal resistances of measuring instruments, or other devices inserted in the external circuit. The second term is the resistance of the soil, measured between the absorption point on the structure and the injection point on the anode. *If* V_a is the potential of the injection point on the anode, and $V_c(o)$ is the potential of the absorption point on the structure, then

$$W_s = \frac{V_a - V_c(o)}{I} = p_a + p_c(o) \tag{9}$$

where $p_c(o)$ has the expression (7).

To obtain p_a it is necessary to know the potential in any point of the soil. In the above mentioned paper [4] the following expression is given for this potential :

$$V(r, r', R_A, x) = \frac{I}{2\pi^2 \lambda_s} \int_0^\infty \{\psi_s(q)\, I_0(qa_2)\, [K_0(qr) + K_0(qr')] + 2\, K_0(qR_A)\} \cos xq\, dq \tag{10}$$

where r is the distance between the considered point in the soil and the structure axis, r' is the distance between the considered point in the soil and the image of the structure axis with respect to the air-soil plane and $\sqrt{R_A^2 + x^2}$ is the distance between the considered point in the soil and the anode. $\Psi_s(q)$ is the Fourier's image of the distribution function of the current density on the coating-soil interface. His expression is [4]:

$$\psi_s(q) = A_2(q) + B_2(q) f(q) \tag{11}$$

where $f(q)$ is given by (6). The form of $A_2(q)$ and $B_2(q)$ are given in the Appendix *I*, formulas (*A*—3) and (*A*—4).

In order to calculate the potential on the surface of a hemispherical anode of radius R_0, expression (10) will be used. In this peculiar case

$$r = r' = D$$

$$\sqrt{R_A^2 + x^2} = R_0$$

Hence, on the anode surface $p(r,r', R_A, 0) = p_a$ take the form:

$$p_a = \frac{1}{\pi^2 \lambda_s} \int_0^\infty (A_2 + B_2 f) I_0(qa_2) K_0(qD)\, dq + \frac{1}{\pi^2 \lambda_s} \int_0^\infty K_0(qR_0)\, dq \tag{12}$$

If we let $D \to \infty$, then the first integral becomes zero, because $K_0(\infty) = 0$. Thence

$$p_a(\infty) = \frac{1}{\pi^2 \lambda_s} \int_0^\infty K_0(qR_0)\, dq = \frac{1}{2\pi \lambda_s R_0} = W_{oA} \tag{13}$$

W_{oA} is nothing but the resistance of the anode with respect to the soil, in the absence of the buried structure.

The difference

$$p_{ac} = p_a - W_{oA} \tag{14}$$

id est:

$$p_{ac} = \frac{1}{\pi^2 \lambda_s} \int_9^\infty (A_2 + B_2 f) I_0(qa_2)(qD)\, dq \tag{15}$$

is the change in the anode resistance with respect to the soil, due to the presence of the buried structure.

Strictly speaking, (14) and (15) are correct only when spherical anodes are used. However, since the distance structure anode is large, we will assume that this expression is valid whatever form the anode may have.

Combining (8) and (9) with (14) it appears that

$$\Sigma W = W_1 + W_{oA} + p_{ac} + p_c(o) \tag{16}$$

Thus (3) becomes

$$I = \frac{E_c^0 - E_A^0}{W_1 + W_{oA} + p_{ac} + 2\,p_c(o)} \tag{17}$$

3. Practical formulas

To calculate the current intensity with the above established formula, is very difficult. By using suitable approximations, it is possible to derive simplified formulas, for practical purposes. Thereby, a quite simple formula may be obtained when the following aproximations are assumed *) :

(α) $\quad a_1,\ a_2 \ll D,\ h$

(β) $\quad a_1 \approx a_2$

(γ) $\quad r_c\,\lambda_s \leqq 10^{-6}$

(δ) $\quad \Re\lambda_s \geqq 10^2$

$\Re$ is the insulating resistance of coating length-unit.
These conditions are practically fulfilled by all modern cables and pipelines.

From the condition (α) we obtain :

$$\frac{a_2}{2h} \approx 0 \qquad \frac{2\,a_2}{D} \approx 0$$

$$I_0(qa_1) \approx 1 \quad I_1(qa_1) \approx 0 \tag{18}$$

$$I_0(qa_2) \approx 1 \quad I_1(qa_2) \approx 0$$

In this case, the following simplified expressions for $A_1(q)$, $A_2(q)$, $B_1(q)$ and $B_2(q)$ are obtained.

$$A_1 K_0(qa_2) = \left(1 - \frac{\lambda_t}{\lambda_s}\right) K_0(qa_2) - \frac{\lambda_t}{\lambda_s}\,[2K_0(qD) + K_0(2qh)] \tag{19 a}$$

$$B_1 K_0(qa_2) = \left(1 - \frac{\lambda_t}{\lambda_s}\right) K_0(qa_2) - \frac{\lambda_t}{\lambda_s}\,K_0(2qh) \tag{19 b}$$

$$A_2 = -1 \tag{19 c}$$

$$B_2 = +1 \tag{19 d}$$

*) All the quantities are expressed in the SI system.

Thereafter, the expression (15) is also simplified, p_{ac} taking the form of :

$$p_{ac} = -\frac{1}{2\pi\lambda_s D} + \frac{1}{\pi^2\lambda_s}\int_0^\infty \frac{\frac{\lambda_s}{\lambda_i}K_0(qa_1) - \left(\frac{\lambda_s}{\lambda_i}-1\right)K_0(qa_2) + K_0(2qh) - 2K_0(qD)}{\frac{2\pi r_c\lambda_s}{q^2} + \frac{\lambda_s}{\lambda_i}K_0(qa_1) - \left(\frac{\lambda_s}{\lambda_i}-1\right)K_0(qa_2) + K_0(2qh)} K_0(qD)\,dq \tag{20}$$

Condition (α), also gives for $p_c(o)$ the expression :

$$p_c(o) = \frac{r_c}{\pi}\int_0^\infty \frac{\frac{\lambda_s}{\lambda_i}K_0(qa_1) - \left(\frac{\lambda_s}{\lambda_i}-1\right)K_0(qa_2) + K_0(2qh) - 2K_0(qD)}{2\pi r_c\lambda_s + q^2\left[\frac{\lambda_s}{\lambda_i}K_0(qa_1) - \left(\frac{\lambda_s}{\lambda_i}-1\right)K_0(qa_2) + K_0(2qh)\right]}\,dq \tag{21}$$

Another approximation of the p_{ac} and $p_c(o)$ expressions are possible if condition (α) is used simultaneously with condition (β). Indeed, if a_1 and a_2 are very small with respect to D and h, then it is possible to use the approximations :

$$K_0(qa_1) = -\left(\ln\frac{\gamma}{2} + \ln qa_1\right) \tag{22 a}$$

$$K_0(qa_2) = -\left(\ln\frac{\gamma}{2} + \ln qa_2\right) \tag{22 b}$$

where $\gamma = e^C$, C being Euler's constant.

Whence :

$$\frac{\lambda_s}{\lambda_i}K_0(qa_1) - \left(\frac{\lambda_s}{\lambda_i}-1\right)K_0(qa_2) \approx -\ln\left(\frac{\gamma}{2} + qa_2\right) - \frac{\lambda_s}{\lambda_i}\ln\frac{a_2}{a_1}$$

On the other hand, the coating insulating resistance per length-unit is :

$$\mathfrak{R} = \frac{1}{2\pi\lambda_i}\ln\frac{a_2}{a_1}$$

and thence :

$$\frac{\lambda_s}{\lambda_i}K_0(qa_1) - \left(\frac{\lambda_s}{\lambda_i}-1\right)K_0(qa_2) \approx -\left[\ln\frac{\gamma}{2} + \ln\left(qa_2\, e^{-2\pi\lambda_s R}\right)\right] \approx K_0(qa)$$

where :

$$a = a_0\, e^{2\pi\lambda_s R}$$

$$a_0 \approx a_1 \approx a_2$$

Therefore

$$p_{ac} = -\frac{1}{2\pi\lambda_s D} + \frac{1}{\pi^2 \lambda_s}\int_0^\infty \frac{K_0(q\alpha) + K_0(2qh) - 2K_0(qD)}{\frac{2\pi r_c \lambda_s}{q^2} + K_0(q\alpha) + K_0(2qh)} K_0(qD)\, dq \qquad (23)$$

and

$$p_c(o) = \frac{r_c}{\pi}\int_0^\infty \frac{K_0(q\alpha) + K_0(2qh) - 2K_0(qD)}{2\pi r_c \lambda_s + q^2 [K_0(q\alpha) + K_0(2qh)]}\, dq \qquad (24)$$

Now if we accept all the four conditions (α)—(δ), it is possible to obtain a quite simple, practical formula. In order to deduce such a formula, firstly the integral

$$J = \int_0^\infty \frac{K_0(q\alpha) + K_0(2qh) - 2K_0(qD)}{\frac{2\pi r_c \lambda_s}{q^2} + K_0(q\alpha) + K_0(qD)} K_0(qD)\, dq \qquad (25)$$

will be decomposed as follows:

$$J = \int_0^\infty = \int_0^Q + \int_Q^\infty = J_1 + J_2 \qquad (26)$$

The limit Q must have such a figure, as to enable the approximation $K_0(q\alpha) = -\left(\ln\frac{\gamma}{2} + \ln q\alpha\right)$, to remain valid in the range $q = 0$ to $q = Q$, and in the range $q = Q$ to $q = \infty$, the condition

$$K_0(qD) \ll K_0(q\alpha) + K_0(2qh) \qquad (27\,a)$$

$$\frac{2\pi r_c \lambda_s}{q^2} \ll K_0(q\alpha) + K_0(2qh) \qquad (27\,b)$$

to be fullfiled, i.e. the function multiplying the factor $K_0(qD)$, to be practically equal to the unit.

Let us compute the integrals J_1, *and* J_2.

Using the asymptotic form of K_0, we obtain:

$$J_1 = \ln\frac{\sqrt{2ah}}{D}\left\{\ln\frac{\gamma D}{2}\int_0^Q \frac{q^2\, dq}{\pi r_c \lambda_s - q^2\left(\ln\frac{\gamma\sqrt{2ah}}{2} + \ln q\right)} + \right.$$

$$\left. + \int_0^Q \frac{\ln q\, dq}{\frac{\pi r_c \lambda_s}{q^2} - \left(\ln\frac{\gamma\sqrt{2ah}}{2} + \ln q\right)}\right\} \qquad (28)$$

The first integral:

$$I_{11}=\int_0^Q \frac{q^2\,dq}{\pi r_c\,\lambda_s - q^2\left(\ln\frac{\gamma\sqrt{2ah}}{2}+\ln q\right)}$$

can be approximated [4] to the form:

$$J_{11}=\frac{1}{\pi\lambda_s}\int_0^Q \frac{q^2\,dq}{r_c+\Re\,q^2}$$

and after elementary treatment we find

$$J_{11}=\frac{1}{\pi\lambda_s\,\Re}\sqrt{\frac{r_c}{\Re}}\left[Q\sqrt{\frac{\Re}{r_c}}-\operatorname{arc\,tg}\left(Q\sqrt{\frac{\Re}{r_c}}\right)\right] \tag{29}$$

The second integral, can be approximated in the same way:

$$J_{12}=\int_0^Q \frac{\ln q\,dq}{\frac{\pi r_c\,\lambda_s}{q^2}-\left(\ln\frac{\gamma\sqrt{2ah}}{2}+\ln q\right)}\approx\int_0^Q \frac{q^2\ln q\,dq}{\pi r_e\,\lambda_s+\pi\,\Re\,\lambda_s\,q^2}=$$

$$=\frac{1}{\pi\,\Re\,\lambda_s}\int_0^Q \frac{q^2\ln q\,dq}{\frac{r_c}{\Re}+q^2}=\frac{1}{\pi\,\Re\,\lambda_s}\left\{\int_0^Q \ln q\cdot dq-\frac{r_c}{\Re}\int_0^Q \frac{\ln q\,dq}{\frac{r_c}{\Re}+q^2}\right\}$$

so that

$$J_{12}=\frac{1}{\pi\,\Re\,\lambda_s}\left\{Q\,(\ln Q-1)-\frac{r_e}{\Re}\int_0^Q \frac{\ln q\;dq}{\frac{r_c}{\Re}+q^2}\right\}$$

On the other hand:

$$\int_0^Q=\int_0^\infty-\int_Q^\infty$$

and because $\frac{r_c}{\Re}\ll q^2$ in the range $q>Q$, it follows:

$$J_{12}=\frac{1}{\pi\,\Re\,\lambda_s}\left\{Q\,(\ln Q-1)-\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{r_c}{\Re}}\ln\sqrt{\frac{r_c}{\Re}}+\frac{r_c}{\Re}\,\frac{1+\ln Q}{Q}\right\} \tag{30}$$

On account of (27a) and (27b), the integral J_2, has the value :

$$J_2 = \int_Q^\infty K_0(qD)\,dq = \frac{1}{D} K_{0i}(qD) \tag{31}$$

Combining (23) with (25), (26), (28), (29), (30) and (31 we obtain :

$$\boxed{r_{ac} = \frac{\varrho_s}{\pi^2}\left\{\frac{\varrho_s}{\Re}\ln\frac{\sqrt{2ah}}{D}\,M(r_c, \Re, D) + N(D)\right\}} \tag{32}$$

where :

$$M = \frac{1}{\pi}\ln\frac{\gamma D}{2}\sqrt{\frac{r_c}{\Re}}\left[Q\sqrt{\frac{\Re}{r_c}} - \text{arc tg}\left(Q\frac{\Re}{r_c}\right)\right] +$$

$$+\frac{1}{\pi}\left[Q(\ln Q - 1) - \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{r_c}{\Re}}\ln\sqrt{\frac{r_c}{\Re}} + \frac{r_c}{\Re}\frac{1+\ln Q}{Q}\right] \tag{33}$$

$$N = \frac{1}{D}\left[K_{0i}(qD) - \frac{\pi}{2}\right] \tag{34}$$

$\varrho_s = \dfrac{1}{\lambda_s}$, is the soil rezistivity.

The figures of M, for $r_c/\Re = 10^{-8}$, 10^{-9}, 10^{-10} *and* 10^{-11} and for values of D, comprises between 20 m and 300 m, are given in table 1. For $r_c/\Re$ larger than 10^{-8} no table of M is given, because the simultaneous validity of both conditions (γ) and ($\tilde{\sigma}$) excludes in this case the use for formula (32). For $r_c/\Re$ smaller values than 10^{-11}, M keeps practically the same figures as for $r_c/\Re = 10^{-11}$.

Figures of N versus D, are given in table 2.

Modern insulating coating performances enable in many cases, the use of condition $\Re\,\lambda_s \geqq 10^3$, instead of condition ($\tilde{\sigma}$), and thereby deriving a more simple formula as in (32). Indeed, in this case, we can make the approximation :

$$\ln\frac{\sqrt{2ah}}{D} = \frac{1}{2}\left[-\frac{2\pi\Re}{\varrho_s} + \ln a_0 + \ln 2 + \ln h - 2\ln D\right] \approx -\frac{\pi\Re}{p_s}$$

because even in the most unfavourable case, all the discarded terms represent only about 1% of the first term.

Hence

$$p_{ac} = \frac{\varrho_s}{\pi}\left[\frac{K_{0i}(qD)}{\pi D} - M\right] - \frac{\varrho_s}{2\pi D} \tag{35}$$

On the other hand, in the mentioned paper [4], it was pointed that for large values of $\Re$, the approximative expression :

$$p_c(x) = \frac{1}{2}\left(\sqrt{r_c \Re}\, e^{-\sqrt{\frac{r_c}{R}}x} + \frac{\varrho_s}{\pi D}\right)$$

proposed by Lunev and Ershov is quite satisfactory. Thence

$$p_c(o) = \frac{1}{2}\left(\sqrt{r_c \Re} + \frac{\varrho_s}{\pi D}\right) \tag{36}$$

Substituting (35) and (36) in (17) it results

$$\boxed{I = \frac{E_c^0 - E_A^0}{W_1 + W_{oA} + \sqrt{r_c \Re} + \varrho_s S}} \tag{37}$$

where :

$$S = \frac{1}{\pi}\left(\frac{K_{0i}(qD)}{\pi D} - M + \frac{1}{2D}\right) \tag{38}$$

The figures of S are intabulated in tabel 3.

Finally, the expresion of the potential along the structure is thereafter :

$$V_c(x) = -I\left[p_c(o)\, e^{-\sqrt{r_c/R}\,x} + \frac{\varrho_s}{2\pi D}\right] \tag{39}$$

I Physics Chair
Polytechnical Institute Bucharest

REFERENCES

1. *Rogers, W.* — Petrol Eng. *12* Nr. 3 (1940) 66—72 (engl.)

2. *Trifel, M. S.* — Korrozia metallokonstruktzia v more. Aznefteizdat (1954) (russ.)

3. *Lunev, A. F. and Ershov, I. M.* — Teoria i praktika protivokorrozionoi zashtchiti podzemnih soorujenii. Ed. Ac. S. URSS. Moskowa 1958. 36—46 (russ)

4. *Moisil, G.* — Buletinul Institutului politehnic Bucureşti *24* Nr. 4 (1962) 23—41 (franc.)

Table 1

$$M(r_c, \Re, D)$$
$$Q = 10^{-2}$$

D m	$\frac{r_c}{\Re} = 10^{-8}$	$\frac{r_c}{\Re} = 10^{-9}$	$\frac{r_c}{\Re} = 10^{-10}$	$\frac{r_c}{\Re} = 10^{-11}$
20	— 0,0²8360	— 0,0²8558	— 0,0²8632	— 0,0²8660
25	— 0,0²7660	— 0,0²7851	— 0,0²7923	— 0,0²7950
30	— 0,0²7089	— 0,0²7274	— 0,0²7343	— 0,0²7370
35	— 0,0²6606	— 0,0²6785	— 0,0²6853	— 0,0²6880
40	— 0,0²6188	— 0,0²6382	— 0,0²6429	— 0,0²6455
45	— 0,0²5819	— 0,0²5989	— 0,0²6055	— 0,0²6081
50	— 0,0²5489	— 0,0²5656	— 0,0²5720	— 0,0²5746
55	— 0,0²5190	— 0,0²5354	— 0,0²5417	— 0,0²5452
60	— 0,0²4917	— 0,0²5078	— 0,0²5140	— 0,0²5165
65	— 0,0²4667	— 0,0²4825	— 0,0²4886	— 0,0²4911
70	— 0,0²4435	— 0,0²4590	— 0,0²4651	— 0,0²4675
75	— 0,0²4218	— 0,0²4372	— 0,0²4431	— 0,0²4456
80	— 0,0²4016	— 0,0²4167	— 0,0²4226	— 0,0²4251
85	— 0,0²3826	— 0,0²3975	— 0,0²4033	— 0,0²4070
90	— 0,0²3648	— 0,0²3794	— 0,0²3852	— 0,0²3876
95	— 0,0²3478	— 0,0²3623	— 0,0²3680	— 0,0²3704
100	— 0,0²3317	— 0,0²3460	— 0,0²3517	— 0,0²3541
105	— 0,0²3164	— 0,0²3306	— 0,0²3362	— 0,0²3385
110	— 0,0²3019	— 0,0²3159	— 0,0²3214	— 0,0²3237
115	— 0,0²2879	— 0,0²3018	— 0,0²3073	— 0,0²3096
120	— 0,0²2746	— 0,0²2883	— 0,0²2938	— 0,0²2961
125	— 0,0²2618	— 0,0²2754	— 0,0²2808	— 0,0²2831
130	— 0,0²2495	— 0,0²2629	— 0,0²2683	— 0,0²2706
135	— 0,0²2377	— 0,0²2510	— 0,0²2563	— 0,0²2586
140	— 0,0²2263	— 0,0²2395	— 0,0²2448	— 0,0²2470
145	— 0,0²2153	— 0,0²2284	— 0,0²2336	— 0,0²2358
150	— 0,0²2047	— 0,0²2176	— 0,0²2228	— 0,0²2251
155	— 0,0²1944	— 0,0²2072	— 0,0²2124	— 0,0²2146
160	— 0,0²1845	— 0,0²1970	— 0,0²2023	— 0,0²2045
165	— 0,0²1748	— 0,0²1874	— 0,0²1926	— 0,0²1947
170	— 0,0²1655	— 0,0²1780	— 0,0²1831	— 0,0²1853
175	— 0,0²1564	— 0,0²1688	— 0,0²1739	— 0,0²1760
180	— 0,0²1475	— 0,0²1599	— 0,0²1649	— 0,0²1671
185	— 0,0²1390	— 0,0²1512	— 0,0²1562	— 0,0²1584
190	— 0,0²1306	— 0,0²1427	— 0,0²1477	— 0,0²1499
195	— 0,0²1239	— 0,0²1345	— 0,0²1395	— 0,0²1416
200	— 0,0²1146	— 0,0²1265	— 0,0²1314	— 0,0²1336
205	— 0,0²1068	— 0,0²1187	— 0,0²1236	— 0,0²1257
210	— 0,0³993	— 0,0²1111	— 0,0²1159	— 0,0²1181
215	— 0,0³919	— 0,0²1036	— 0,0²1084	— 0,0²1105
220	— 0,0³847	— 0,0³963	— 0,0²1011	— 0,0²1032
225	— 0,0³776	— 0,0³892	— 0,0³940	— 0,0³961
230	— 0,0³708	— 0,0³823	— 0,0³870	— 0,0³891
235	— 0,0³640	— 0,0³755	— 0,0³802	— 0,0³823
240	— 0,0³574	— 0,0³688	— 0,0³735	— 0,0³756
245	— 0,0³510	— 0,0³622	— 0,0³669	— 0,0³690
250	— 0,0³446	— 0,0³559	— 0,0³605	— 0,0³626

D m	$\frac{r_e}{\mathfrak{R}} = 10^{-8}$	$\frac{r_e}{\mathfrak{R}} = 10^{-9}$	$\frac{r_e}{\mathfrak{R}} = 10^{-10}$	$\frac{r_e}{\mathfrak{R}} = 10^{-11}$
255	$-0,0^{3}384$	$-0,0^{3}496$	$-0,0^{3}542$	$-0,0^{3}563$
260	$-0,0^{3}323$	$=0,0^{3}434$	$-0,0^{3}480$	$-0,0^{3}501$
265	$-0,0^{3}264$	$-0,0^{3}374$	$-0,0^{3}420$	$-0,0^{3}440$
270	$-0,0^{3}205$	$-0,0^{3}315$	$-0,0^{3}360$	$-0,0^{3}381$
275	$-0,0^{3}148$	$-0,0^{3}257$	$-0,0^{3}302$	$-0,0^{3}323$
280	$-0,0^{4}91$	$-0,0^{3}200$	$-0,0^{3}244$	$-0,0^{3}255$
285	$-0,0^{4}36$	$-0,0^{3}144$	$-0,0^{3}191$	$-0,0^{3}289$
290	$+0,0^{4}19$	$-0,0^{4}88$	$-0,0^{3}133$	$-0,0^{3}154$
295	$+0,0^{4}72$	$-0,0^{4}39$	$-0,0^{4}79$	$-0,0^{4}99$
300	$+0,0^{3}125$	$+0,0^{4}19$	$-0,0^{4}26$	$-0,0^{4}46$

Table 2

$N\,(D)$

$Q = 10^{-2}$

D m	N	D m	N	D m	N
20	$-0,02736$	115	$-0,01130$	210	$-0,0^{2}7069$
25	$-0,02517$	120	$-0,01097$	215	$-0,0^{2}6927$
30	$-0,02274$	125	$-0,01065$	220	$-0,0^{2}6791$
35	$-0,02192$	130	$-0,01035$	225	$-0,0^{2}6659$
40	$-0,02064$	135	$-0,01007$	230	$-0,0^{2}6532$
45	$-0,01953$	140	$-0,0^{2}9802$	235	$-0,0^{2}6409$
50	$-0,01854$	145	$-0,0^{2}9542$	240	$-0,0^{2}6291$
55	$-0,01766$	150	$-0,0^{2}9298$	245	$-0,0^{2}6176$
60	$-0,01687$	155	$-0,0^{2}9065$	250	$-0,0^{2}6066$
65	$-0,01614$	160	$-0,0^{2}8842$	255	$-0,0^{2}5958$
70	$-0,01548$	165	$-0,0^{2}8629$	260	$-0,0^{2}5855$
75	$-0,01487$	170	$-0,0^{2}8426$	265	$-0,0^{2}5754$
80	$-0,01431$	175	$-0,0^{2}8231$	270	$-0,0^{2}5654$
85	$-0,01379$	180	$-0,0^{2}8044$	275	$-0,0^{2}5563$
90	$-0,01330$	185	$-0,0^{2}7865$	280	$-0,0^{2}5472$
95	$-0,01285$	190	$-0,0^{2}7693$	285	$-0,0^{2}5383$
100	$-0,01243$	195	$-0,0^{2}7528$	290	$-0,0^{2}5291$
105	$-0,01203$	200	$-0,0^{2}7369$	295	$-0,0^{2}5214$
110	$-0,01165$	205	$-0,0^{2}7216$	300	$-0,0^{2}5133$

Table 3

$S(r_c, \mathfrak{R}, D)$

D m	$\frac{r_c}{\mathfrak{R}} = 10^{-8}$	$\frac{r_c}{\mathfrak{R}} = 10^{-9}$	$\frac{r_c}{\mathfrak{R}} = 10^{-10}$	$\frac{r_c}{\mathfrak{R}} = 10^{-11}$
20	0,01580	0,01587	0,01589	0,01590
25	0,01262	0,01268	0,01270	0,01271
30	0,01050	0,01055	0,01058	0,01059
35	0,0²8977	0,0²9034	0,0²9056	0,0²9064
40	0,0²7836	0,0²7891	0,0²7913	0,0²7921
45	0,0²6947	0,0²7001	0,0²7022	0,0²7030
50	0,0²6235	0,0²6289	0,0²6308	0,0²6316
55	0,0²5650	0,0²5702	0,0²5722	0,0²5733
60	0,0²5161	0,0²5213	0,0²5232	0,0²5240
65	0,0²4747	0,0²4797	0,0²4817	0,0²4825
70	0,0²4390	0,0²4398	0,0²4459	0,0²4464
75	0,0²4080	0,0²4129	0,0²4148	0,0²4156
80	0,0²3807	0,0²3855	0,0²3874	0,0²3882
85	0,0²3566	0,0²3613	0,0²3631	0,0²3643
90	0,0²3350	0,0²3396	0,0²3415	0,0²3423
95	0,0²3156	0,0²3202	0,0²3220	0,0²3228
100	0,0²2980	0,0²3025	0,0²3044	0,0²3051
105	0,0²2820	0,0²2865	0,0²2883	0,0²2890
110	0,0²2674	0,0²2718	0,0²2736	0,0²2737
115	0,0²2539	0,0²2584	0,0²2601	0,0²2608
120	0,0²2416	0,0²2459	0,0²2477	0,0²2484
125	0,0²2301	0,0²2344	0,0²2361	0,0²2368
130	0,0²2194	0,0²2236	0,0²2254	0,0²2261
135	0,0²2094	0,0²2136	0,0²2153	0,0²2161
140	0,0²2001	0,0²2043	0,0²2060	0,0²2067
145	0,0²1914	0,0²1955	0,0²1972	0,0²1979
150	0,0²1832	0,0²1873	0,0²1889	0,0²1896
155	0,0²1754	0,0²1795	0,0²1811	0,0²1818
160	0,0²1681	0,0²1720	0,0²1737	0,0²1744
165	0,0²1611	0,0²1651	0,0²1668	0,0²1675
170	0,0²1546	0,0²1585	0,0²1602	0,0²1609
175	0,0²1483	0,0²1522	0,0²1538	0,0²1545
180	0,0²1423	0,0²1462	0,0²1478	0,0²1485
185	0,0²1366	0,0²1405	0,0²1421	0,0²1428
190	0,0²1311	0,0²1350	0,0²1366	0,0²1373
195	0,0²1264	0,0²1298	0,0²1314	0,0²1320
200	0,0²1210	0,0²1248	0,0²1263	0,0²1270
205	0,0²1162	0,0²1199	0,0²1215	0,0²1222
210	0,0²1116	0,0²1153	0,0²1168	0,0²1175
215	0,0²1071	0,0²1108	0,0²1124	0,0²1130
220	0,0²1028	0,0²1065	0,0²1081	0,0²1087
225	0,0³9870	0,0 1024	0,0²1039	0,0²1046
230	0,0³9475	0,0³9841	0,0³9991	0,0²1006
235	0,0³9088	0,0³9404	0,0³9604	0,0³9670
240	0,0³8715	0,0³9078	0,0³9228	0,0³9295
245	0,0³8358	0,0³8714	0,0³8864	0,0³8931
250	0,0³8009	0,0³8365	0,0³8511	0,0³8578
255	0,0³7668	0,0³8024	0,0³8171	0,0³8238

D m	$\frac{r_c}{\mathfrak{R}} = 10^{-8}$	$\frac{r_c}{\mathfrak{R}} = 10^{-9}$	$\frac{r_c}{\mathfrak{R}} = 10^{-10}$	$\frac{r_c}{\mathfrak{R}} = 10^{-11}$
260	$0{,}0^{3}7337$	$0{,}0^{3}7690$	$0{,}0^{3}7837$	$0.0^{3}7904$
265	$0{,}0^{3}7022$	$0{,}0^{3}7372$	$0{,}0^{3}7518$	$0{,}0^{3}7582$
270	$0{,}0^{3}6709$	$0{,}0^{3}7059$	$0{,}0^{3}7203$	$0{,}0^{3}7270$
275	$0{,}0^{3}6409$	$0{,}0^{3}6756$	$0{,}0^{3}6900$	$0{,}0^{3}6967$
280	$0{,}0^{3}6113$	$0{,}0^{3}6460$	$0{,}0^{3}6600$	$0{,}0^{3}6635$
285	$0{,}0^{3}5829$	$0{,}0^{3}6173$	$0{,}0^{3}6322$	$0{,}0^{3}6380$
290	$0{,}0^{3}5548$	$0{,}0^{3}5888$	$0{,}0^{3}6032$	$0{,}0^{3}6098$
295	$0{,}0^{3}5278$	$0{,}0^{3}5615$	$0{,}0^{3}5759$	$0{,}0^{3}5822$
300	$0{,}0^{3}5015$	$0{,}0^{3}5348$	$0{,}0^{3}5492$	$0{,}0^{3}5554$

Appendix I.

$$A_1(q) = \frac{1}{\Delta}\left\{\left[K_0(qa_2) + 2\frac{\lambda_i}{\lambda_s}K_0(qD)\right]\left[K_1(qa_2)I_0(qa_1) + \frac{a_2}{2h}K_1(2qh)\right] - \right.$$

$$\left. - \frac{\lambda_i}{\lambda_s}I_0(qa_2)[K_0(qa_2) + K_0(2qh)]\left[K_1(qa_2) + \frac{2a_2}{D}K_1(qD)\right]\right\} \quad \text{(A—1)}$$

$$B_1(q) = \frac{1}{\Delta}\left\{\frac{\lambda_i}{\lambda_s}K_1(qa_2)I_0(qa_1)I_0(qa_2)[K_0(qa_2) + K_0(2qh)] - \right.$$

$$\left. - K_0(qa_2)I_0(qa_1)\left[K_1(qa_2)I_0(qa_1) + \frac{a_2}{2h}K_1(2qh)\right]\right\} \quad \text{(A—2)}$$

$$A_2(q) = -\frac{1}{\Delta}\left\{K_0(qa_2)I_0(qa_2)\left[K_1(qa_2) + \frac{2a_2}{D}K_1(qD)\right] + \right.$$

$$\left. + K_0(qa_2)I_1(qa_2)\left[K_0(qa_2) + 2\frac{\lambda_i}{\lambda_s}K_0(qD)\right]\right\} \quad \text{(A—3)}$$

$$B_2(q) = \frac{1}{\Delta}[K^0(qa_2)I_0^2(qa_1)K_1(qa_1) + K_0^2(qa_2)I^0(qa_2)I_1(qa_2)] \quad \text{(A—4)}$$

$$\Delta = K_0(qa_2)I_0(qa_2)\left\{K_1(qa_2)I_0(qa_1) + \frac{a_2}{2h}K_1(2qh) + \right.$$

$$\left. + \frac{\lambda_i}{\lambda_s}I_1(qa_2)[K_0(qa_2) + K_0(2qh)]\right\} \quad \text{(A—5)}$$

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC BUCUREȘTI
Tomul XXVI — 1964, Fascicola 6

REZISTENȚA MATERIALELOR

C.Z. 620.1

FLAMBAJUL LATERAL AL GRINZILOR PENDULARE CONTINUE SUB SARCINI TRANSVERSALE UNIFORM REPARTIZATE *)

VICTOR DROBOTĂ

A. Grinda suspendată pe două reazime

1. *Ecuațiile de deformație la încovoiere și răsucire*

Problema propusă spre rezolvare se referă la o grindă de rigiditate transversală mică, susținută pe două reazime așezate la distanța $\frac{h}{2}$ de axa grinzii, care permit rotirea acesteia în orice direcție. Grinda este încărcată cu o sarcină transversală uniform distribuită aplicată la înălțimea fibrei medii a grinzii (fig. 1). Atît punctele de rezemare cît și cele de aplicarea sarcinii se găsesc pe axa principală de inerție a secțiunii transversale a grinzii inițial în plan vertical.

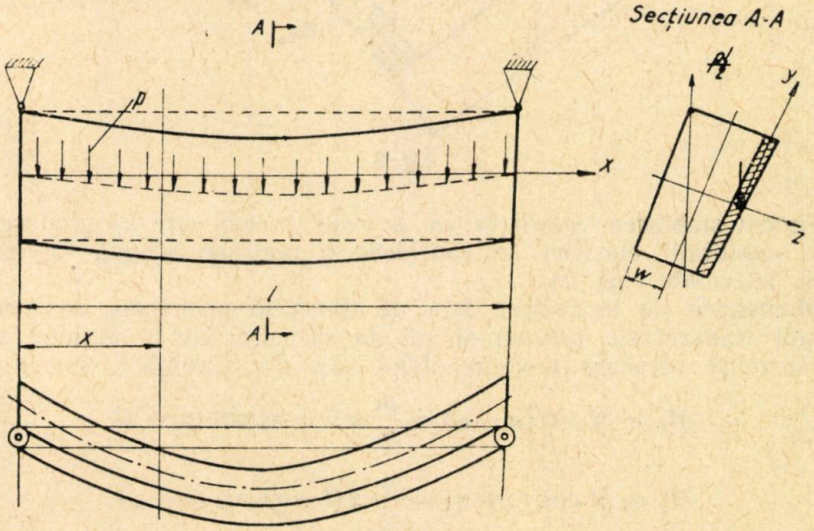


Fig. 1

*) Lucrare predată la redacție 31.X.964.

Grinda rămîne în acest plan atîta timp cît sarcina p are o valoare mică. Făcînd să crească continuu sarcina p, la un moment dat, grinda părăsește această poziție stabilă și ia o nouă poziție rotită în jurul axei ei și încovoiată lateral ca în figura 1.

Pentru valori mai mari ale forței p, deformațiile și unghiul de rotire cresc mult și sistemul redevine stabil.

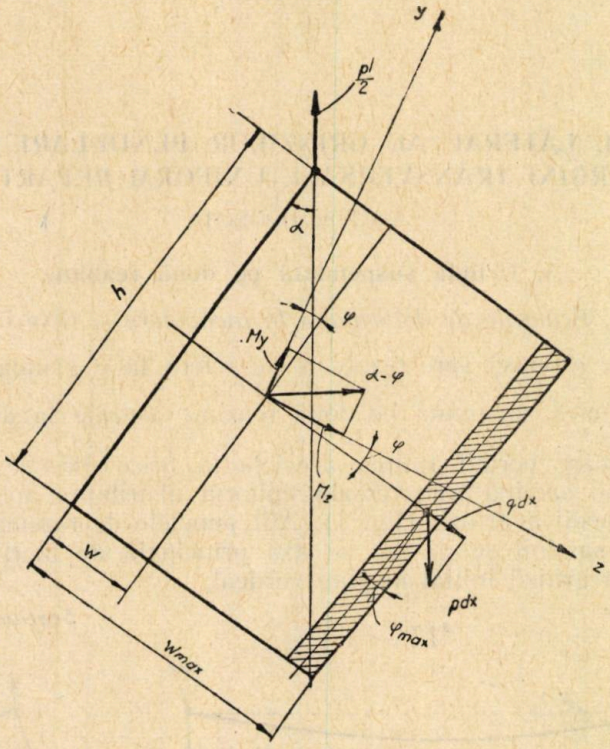


Fig. 2

Pentru stabilirea valorii critice a forței p sub care se produce pierderea stabilității elastice, se consideră o secțiune situată la mijlocul grinzii deformate (fig. 2).

Momentele de încovoiere față de direcțiile principale de inerție a secțiunii transversale precum și cel de răsucire într-o secțiune situată la o distanță oarecare x de reazimul ales drept origină, sînt date de

$$M_y = M \sin(\alpha - \varphi) = \frac{p}{2} x(l-x) \sin(\alpha - \varphi)$$

$$M_z = M \cos(\alpha - \varphi) = \frac{p}{2} x(l-x) \cos(\alpha - \varphi) \qquad (1)$$

$$M_t = \frac{pl}{2}\left(\frac{h}{2}\sin\alpha - w\cos\alpha\right) + \frac{px}{2} w \cos\alpha$$

În aceste relații s-a notat cu w deplasarea datorită încovoierii laterale a grinzii și cu φ deformația de răsucire a acesteia.

Se consideră de asemenea deformațiile produse datorită componentei M_z ca fiind neglijabile, dată fiind rigiditatea mare la încovoiere a grinzii față de axa z în raport cu cea față de axa y.

Ecuațiile de deformație la încovoiere și la răsucire vor fi

$$EI_y \frac{d^2 w}{dx^2} = -\frac{px}{2}(l-x)\sin(\alpha-\varphi)$$

$$GI_d \frac{d\varphi}{dx} = \frac{pl}{2}\left(\frac{h}{2}\sin\alpha - w\cos\alpha\right) + \frac{px}{2} w\cos\alpha . \qquad (2)$$

Se consideră într-o primă aproximație că valoarea unghiului de răsucire φ este mică față de valoarea unghiului de rotire α. Cu aceasta ecuația diferențială de încovoiere devine.

$$EI_y \frac{d^2 w}{dx^2} = -\frac{px}{2}(l-x)\sin\alpha . \qquad (3)$$

Integrînd-o de două ori se obține succesiv

$$EI_y \frac{dw}{dx} = -\frac{px^2}{12}(3l-2x)\sin\alpha + C_1$$

$$EI_y w = -\frac{px^3}{24}(2l-x)\sin\alpha + C_1 x + C_2 . \qquad (4)$$

Determinarea constantelor se face punînd următoarele condiții la limită

$$x = 0 \; ; \quad w = 0$$

$$x = \frac{l}{2} \; ; \quad w' = 0$$

de unde rezultă

$$C_2 = 0 \; ; \quad C_1 = \frac{pl^3}{24}\sin\alpha .$$

Cu acestea ecuațiile (4) se vor scrie

$$EI_y \frac{dw}{dx} = -\frac{px^2}{12}(3l-2x)\sin\alpha + \frac{pl^3}{24}\sin\alpha$$

$$EI_y w = -\frac{px^3}{24}(2l-x)\sin\alpha + \frac{pl^3 x}{24}\sin\alpha . \qquad (5)$$

În cele ce urmează se studiază în ce măsură este valabilă ipoteza făcută, că unghiul de răsucire φ este neglijabil față de unghiul de rotire α.

Pentru aceasta se folosește ecuația a 2-a a sistemului (2), în care se înlocuiește valoarea lui ω cu cea din relația (5).

Se obține astfel

$$GI_d \frac{d\varphi}{dx} = \frac{p^2 \sin 2\alpha}{48 EI_y}\left(\frac{x^5}{2} - \frac{3lx^4}{2} + l^2x^3 + \frac{l^3x^2}{2}\right) - \frac{p^2 l^4 \sin 2x}{96 EI_y} + \frac{phl}{4}\sin\alpha$$

$$GI_d\varphi = \frac{p^2 \sin 2\alpha}{48 EI_y}\left(\frac{x^6}{12} - \frac{3lx^5}{10} + \frac{l^2x^4}{4} + \frac{l^3x^3}{6}\right) - \frac{p^2 l^4 x^2 \sin 2\alpha}{192 EI_y} + \frac{phlx}{4}\sin\alpha + D_1. \quad (6)$$

Determinarea constantei D_1 se face punînd următoarea condiție limită

$$x = 0 \; ; \quad \varphi = 0$$

Rezultă $D_1 = 0$.

Valoarea maximă a unghiului φ se obține pentru cazul studiat, făcînd în relația (6) $x = \frac{l}{2}$.

Rezultă

$$GI_d \varphi_{max} = -\frac{131}{2^{12} \times 3^2 \times 5} \frac{p^2 l^6 \sin 2\alpha}{EI_y} + \frac{phl^2}{8}\sin\alpha.$$

Pentru obținerea acestui unghi funcție numai de valoarea unghiului α, se elimină între această expresie și relația (8) dedusă mai departe, valoarea forței $(pl)_f$.

Rezultă astfel

$$\varphi_{max} = \left(-\frac{131 \times 5}{2^7} + \frac{15}{2}\right)\frac{EI_y}{GI_d}\alpha\frac{h^2}{l^2}$$

Admițînd că bara este din oțel și că are o secțiune dreptunghiulară îngustă de lățime b și înălțime h atunci raportul

$$\frac{I_y}{I_d} = \frac{1}{4} \quad \text{și} \quad \frac{E}{G} = 2(1+\mu) = 2{,}6.$$

Înlocuind aceste valori în relația de mai sus în care se presupune de asemenea că $\frac{h}{l} = \frac{1}{10}$ se obține

$$\varphi_{max} = 0{,}0153\,\alpha. \quad (7)$$

Neglijînd deci valoarea unghiului φ într-o secțiune oarecare a grinzii în raport cu unghiul de rotire al secțiunii α, eroarea ce se face este sub 2%, acceptabilă din punct de vedere tehnic.

2. *Calculul sarcinii critice*

Pentru calculul sarcinii critice se va aplica metoda energetică. În acest caz lucrul mecanic de deformație va fi cel dat numai de momentul de încovoiere M_y, cel dat de M_z și M_t putînd fi neglijate în virtutea ipotezelor făcute

$$L_i = \frac{1}{2EI_y}\int_0^l M_y^2\,dx = \frac{1}{2EI_y}\int_0^l \left[\frac{px}{2}(l-x)\alpha\right]^2 dx = \frac{p^2\alpha^2 l^5}{240\,EI_y}.$$

Lucrul mecanic exterior va fi cel dat de deplasarea pe verticală a sarcinei uniform repartizate sub acțiunea lui M_y și este

$$L_{p_1} = \int_0^l p\,y\,dx = \int_0^l \alpha p\,w\,dx = \frac{p^2\alpha^2}{24\,EI_y}\int_0^l (x^4 - 2lx^3 + l^3x)\,dx = \frac{1}{120}\,\frac{p^2\alpha^2 l^5}{EI_y}.$$

Lucrul mecanic exterior se datorește și faptului că sarcina p se rotește în raport cu reazimele situate la distanța $\frac{h}{2}$ de axă. În consecință deoarece sarcinile p sînt situate sub axa de rotație, acest lucru mecanic suplimentar are valoarea

$$L_{p_2} = -\frac{h\alpha^2}{4}\int_0^l p\,dx.$$

Egalînd cele două energii se obține

$$\frac{p^2\alpha^2 l^5}{240\,EI_y} = \frac{p^2\alpha^2 l^5}{120\,EI_y} - \frac{ph\alpha^2 l}{4}.$$

Făcînd simplificările necesare se obține valoarea sarcinii critice

$$(pl)_f = 60\,\frac{EI_y h}{l^3}. \tag{8}$$

B. Grinda suspendată pe mai multe reazime

În ipoteza că grinda flambează avînd fibra medie deformată de aceiași parte a liniei care unește reazimile (flambaj simetric), sarcina critică se poate calcula pe aceiași cale și pentru grinzi pe mai multe reazime, scriind egalitatea energiei de deformație cu cea exterioară, pentru întreaga lungime a grinzii.

$$\frac{1}{2EI_y}\int M_y^2\,dx = \int p\,\alpha\,w\,dx - \frac{n\,p\,h\,l\,\alpha^2}{4}$$

unde n este numărul intervalelor dintre reazime.

Valoarea w se poate calcula prin una din metodele cunoscute de calcul al deformațiilor barelor drepte solicitate la încovoiere.

Astfel pentru o grindă suspendată pe trei reazime echidistante (fig. 3), calculul sarcinii critice se face după cum urmează

Valoarea momentului pe reazimul intermediar rezultă din ecuația lui CLAPEYRON și are valoarea

$$M_2 = -\frac{q\,l^2}{8}\ ;\ \text{uude}\ q = \alpha p\,.$$

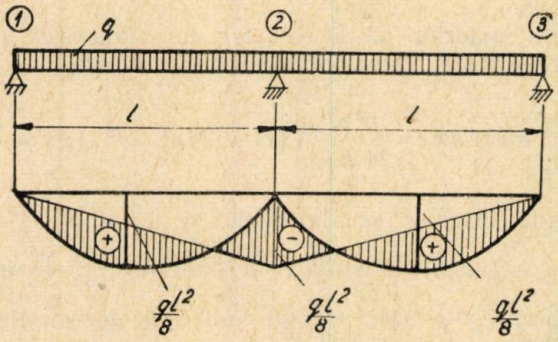


Fig. 3

Expresia momentelor M_y pe cele două intervale ale grinzii sînt

$$M_{12} = M_{23} = \frac{3}{8}\,q\,l\,x - \frac{q\,x^2}{2}\ ;$$

Valoarea săgeții w pe cele două intervale este

$$w_{12} = w_{23} = \frac{q}{48\,EI_y}\,(2\,x^4 - 2\,l\,x^3 + l^3\,x)\,.$$

Lucrul mecanic de deformație al forțelor interioare va fi

$$L_i = \frac{1}{2\,EI_y}\int M_y^2\,dx = \frac{2\,q^2}{2\,EI_y}\int_0^l \frac{1}{4}\left(\frac{3}{4}\,l\,x - x^2\right)^2 dx = \frac{q^2\,l^5}{320\,EI_y}\,.$$

Lucrul mecanic al forțelor exterioare datorită deplasării pe verticală a sarcinii p este

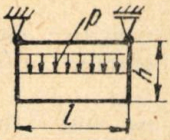
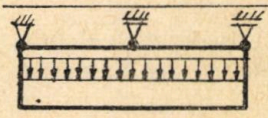
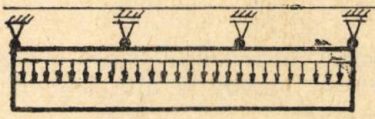
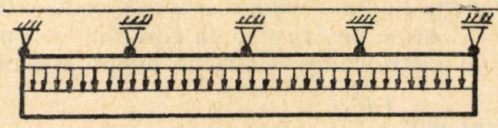
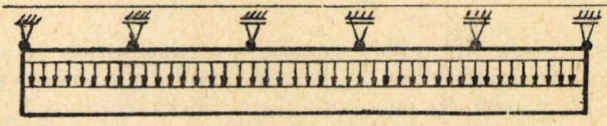
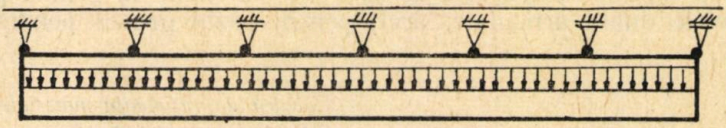
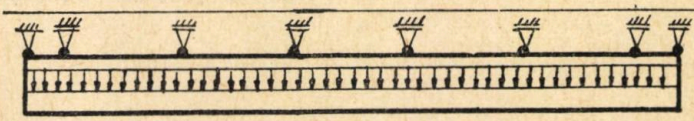
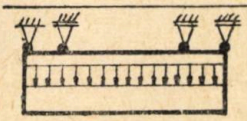
$$L_{p_1} = \int p\,y\,dx = \int q\,w\,dx = \frac{2\,q^2}{48\,EI_y}\int_0^l (2\,x^4 - 3\,l\,x^3 + l^3\,x)\,dx = \frac{2\,q^2\,l^5}{320\,EI_y}\,.$$

Lucrul mecanic datorită rotirii sarcinii p în jurul axei barei este

$$L_{p_2} = -\frac{h\,\alpha^2}{4}\int p\,dx = -\frac{2}{4}\,phl\alpha^2 = -\frac{phl\alpha^2}{2}\,.$$

Tabela 1

Valoarea sarcinii critice de flambaj pentru grinzi pendulare pe reazime echidistante sub sarcină uniform repartizată

Nr. crt.	Cazul studiat	Valoarea sarcinii critice $(pl)_f$
1		$60 \frac{EI_y h}{l^3}$
2		$160 \frac{EI_y h}{l^3}$
3		$180 \frac{EI_y h}{l^3}$
4		$210{,}08 \frac{EI_y h}{l^3}$
5		$217{,}31 \frac{EI_y h}{l^3}$
6		$243{,}15 \frac{EI_y h}{l^3}$
7		$360 \frac{EI_y h}{l^3}$
8		$360 \frac{EI_y h}{l^3}$

Egalînd cele două lucruri mecanice obținem

$$\frac{1}{320}\,\frac{q^2 l^5}{EI_y}\,[1-2] = -\frac{phl\alpha^2}{2}$$

și deoarece $q = \alpha p$ rezultă că

$$(pl)_f = 160\,\frac{EI_y h}{l^3}. \tag{9}$$

Procedînd în mod analog se obțin valorile forțelor critice pentru grinzi pe mai multe reazime echidistante încărcate cu sarcină uniform repartizată pe toată lungimea lor.

Rezultatele obținute pentru o serie de cazuri studiate sînt date în tabela 1.

Se observă din această tabelă că sarcina critică cu valoarea cea mai mică se obține în cazul barei pe două reazime și are valoarea

$$(pl)_f = 60\,\frac{EI_y h}{l^3}.$$

Valoarea forței critice crește cu numărul de reazime și are o lege de variație pentru grinzile cu număr de reazim impar, și altă lege de variație pentru grinzile cu număr de reazime par.

Atît pentru un caz cît și pentru celălalt valoarea forței critice tinde către valoarea sarcinei critice ce se obține pentru grinda continuă rezemată pe un număr infinit de reazime avînd reazimile extreme dublu articulate.

$$(pl)_f = 360\,\frac{EI_y h}{l^3}.$$

Comparînd cazurile 1 și 8 din tabelă rezultă avantajul net pe care îl prezintă sub aspectul stabilității elastice, grinda pendulară dublu articulată la ambele capete în raport cu cea pendulară liberă rezemată. Din tabelă rezultă că sarcina critică este de șase ori mai mare la grinda pendulară cu capetele dublu articulate, decît pentru cazul grinzii pendulare liber rezemate.

Catedra de rezistența materialelor
Institutul politehnic București

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC BUCUREȘTI
Tomul XXVI — 1964, Fascicola 6

CENTRALE ELECTRICE

C.Z.: 621.315 : 621.3.027.3

LA COORDINATION DE L'ISOLEMENT DES INSTALLATIONS ÉLECTROÉNERGÉTIQUES HAUTE TENSION *)

C. DINCULESCU, G. DRĂGAN, I. ADĂMUȚ

Le développement toujour croissant des installations électroénergétiques, ainsi que l'emploi des tensions de plus en plus élevées rendent particullièrement nécessaire l'étude du problème de la coordination de l'isolement.

Dans un sens restreint de cette notion, on entend par coordination de l'isolement la corrélation entre le niveau de protection et celui de l'isolation de l'outillage à protéger [1], [2]. Dans un sens plus large, le problème de la coordination de l'isolement présente des aspects plus complexes, car pour le résoudre il est nécessaire d'établir des tensions maxima pour le fonctionnement prolongé de l'outillage et des tensions d'essai pour les appareils de haute tensions, de connaître les caractéristique des surtensions atmosphériques et internes, de réduire le niveau d'isolation, etc.

On sait que le principal facteur déterminant la capacité de fonctionnement de l'isolement est la tension maximum prolongée. Le choix de certains degrés convenables pour la tension maximum a été l'une des préoccupations permanentes de la CEI et des comités nationaux, comme l'attestent les normes élaborées à cette fin. L'analyse de ces normes, de même que celle des recommandations de la CEI démontrent l'existence en ce moment d'un nombre exagéré de degrés de tensions maxima. D'autre part, il n'y a pas un point de vue unitaire concernant les degrés de tensions maxima à partir de la tension de 123 kV. Il est nécessaire donc d'uniformiser les degrés de tensions maxima et en même temps de les réduire. Parallelement, le problème du rapport entre la tension nominale et la tension maximum doit aussi être résolu.

Une grande diversité existe également en ce qui concerne les valeurs des niveaux d'isolation et de protection prévues dans différentes normes nationales. Bien que le Comité technique nr. 28 „La Coordination de l'isolement" de la CEI ait uniformisé en partie les niveaux d'isolation, il

---

* Communiquée à la session scientifique des cadres didactiques de L'institut politechnique de Bucarest le 22—23 fevrier 1964.

existe encore un grand nombre de degrés. D'autre part, la nécessité de réduire le nombre des degrés et les valeurs des niveaux d'isolation et de protection est déterminée aussi par l'amélioration continue des performances des moyens de protection contre les surtensions.

Dans ce qui suit, en partant de la comparaison des données contenues dans les recommandations de la CEI, des différentes normes nationales, ainsi que des travaux effectués par les auteurs, on fait l'analyse des problèmes mentionnés ci-dessus, en déduisant une serie de conclusions, on formule des recommandations et on aborde certains questions concernant les perspectives de la coordination de l'isolement.

1. La comparaison des niveaux d'isolation et de protection selon differentes normes

Le niveau d'isolation et le niveau de protection représentent les éléments fondamentaux pour la solution du problème de la coordination de l'isolement. Pour les determiner et pour établir leur position relative il est nécessaire de préciser certaines grandeurs prises en considération dans l'étude de la coordination de l'isolement (tensions nominales, tensions maxima etc). En même temps, il est utile d'analyser comparativement les previsions des diverses normes concernant les valeurs du niveau d'isolation, de protection, les tensions nominales et les tensions maxime.

1.1. *Tensions nominales et tensions maxima*

Dans l'élaboration des projets et dans l'exploitation des systèmes électriques, afin de caractériser le niveau d'isolation d'un equipement ou d'une installation électroénergétique, on utilise sur large echelle la tension nominale (U_n) et la tension maximum (U_m) définies dans [2], [3], [4], [5], [6], [7], [8], ainsi que dans d'autres normes similaires.

La tension nominale, utilisée dans la pratique de l'exploitation pour caractériser les différents degrés de tension [9], fait, derniérement, l'objet des discussions sur l'utilité de la maintenir [10], [11], [12], [13], compte tenu du fait qu'elle n'a pas de correspondance physique réelle. Les tentatives de lui attribuer une réalité physique, au moins pour les tensions basses et moyennes, à savoir la valeur moyenne de la tension variable selon le lieu et le temps [14], sont d'aprés [9] incorrectes, car ceci conduirait à une gamme de valeurs autres que celle indiquées comme tensions nominales.

Il en résulte la nécessité de remplacer la tension nominale par la grandeur tension maximum, représentant la valeur de la tension à laquelle un équipement électrique peut fonctionner indéfiniment. Etant donné que la tension maximum possède un sens physique determiné, les auteurs estiment qu'il est necesaire de considérer cette grandeur comme tension de réfèrence.

En utilisant la tension maximum comme grandeur de référence dans les systèmes électriques, l'on pourra rennoncer simultanément à la tension nominale, à la tension de serie employée dans les normes allemendes [2],

ainsi qu'à la tension de service ou de régime utilisée à présent dans certaines normes [2], [3], [6]. En même temps, il faudrait unifier et réduire les degrés de tensions maxima, pour le moment plus nombreuses que celles qui corespondent aux tensions nominales : pour les tensions jusqu'à $U_m = 72{,}5$ kV il y a, selon 9 normes de différents pays, 32 degrés pour les tensions maxima, 26 degrés pour les tensions nominales et 22 degrés pour les tensions de tenue à choc [11] et pour toute la gamme de tensions employées jusqu'à présent, il y a conformément à 9 normes, 63 degrés pour les tensions maxima et 53 degrés pour les tensions nominales.

Il est nécessaire, à notre avis, que la tension minimum définie et indiquée dans les normes anglaises [7], soit introduite également dans les normes où celle-ci n'existe pas, respectivement dans les recommandation de la CEI, soit avec des valeurs individuelles pour chaque degré de tension maximum, soit mieux encore, sous forme de rapport $U_{min} = KU_{max}$ ($k<1$), où la valeur du coéfficient K va être établi pour certaines gammes de tensions maxima.

Ainsi l'on assurerait des conditions normales de fonctionnement pour l'équipement des installations électroénergétiques, y compris celui des recepteurs électriques.

1.2. *Les tensions nominales et les tensions maxima utilisées dans certaines normes en vigueur*

Dans le tableau no. 1 l'on spécifie les tensions maxima (U_m) et les tensions nominales (U_n) d'après les recommandations de la CEI et d'après certaines normes nationales. Sur la base de ces valeurs on a tracé les courbes $U_n = f(U_m)$ indiquées dans la figure 1.

Rëmarques au tableau no. 1

1. Pour les tensions maxima $72{,}5 \leqslant U_m \leqslant 252$ kV les valeurs du numérateur sont données pour l'isolation pleine, tandis que celles du dénominateur, pour l'isolation réduite de 1-2-3 degrés. Pour $U_m \geqslant 300$ kV le manque de nombre au numérateur indique l'absence d'installation à pleine isolation.

2. Pour les tensions jusqu'à $U_m = 15{,}5$ kV le numérateur représente les tensions d'essai pour les transformateurs ayant $P \leqslant 500$ kVA, et le dénominateur pour $P > 500$ kVA.

3. Pour $U_m \leqslant 15{,}5$ kV les valeurs d'en haut sont pour les transformateurs des réseaux de distribution, et celle d'en bas pour les transformateurs des sous-stations et des centrales.

4. Les niveaux de protection pour les normes de la CEI, de l'URSS et des USA sont considérés égaux aux tensions résiduelles à $I = 5$ kVA de [1], [21], [22].

Pour les tensions $U_m > 100$ kV, les tensions nominales des parafoudres pour les niveaux d'isolation réduite ont été considérées égales à $(0{,}75 - 0{,}8)\ U_m$.

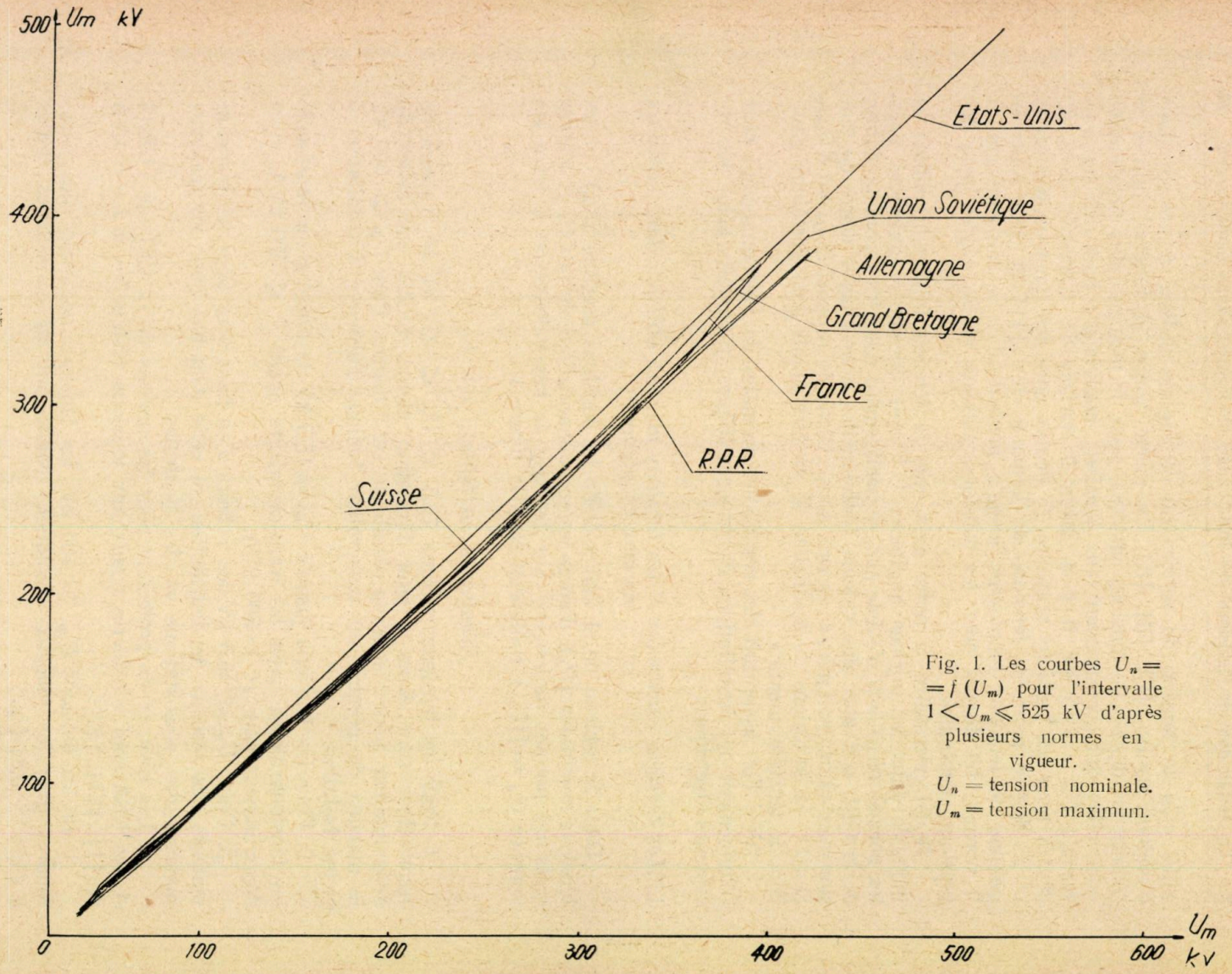


Fig. 1. Les courbes $U_n = f(U_m)$ pour l'intervalle $1 < U_m \leqslant 525$ kV d'après plusieurs normes en vigueur.
U_n = tension nominale.
U_m = tension maximum.

TABLEAU 1. — **Tensions maxima (U_m) et tensions nominales (U_n)**

	Tensions maxima (U_m) KV_{ef}												Tensions nominales (U_n) KV_{ef}										
No.	CEI I	CEI II	R. P. R.	Suisse	Tschechoslovaquie	Union Sovietique	Allemagne	France	Italie	Hongrie	Grand Bretagne	Etats Unis	No.	R. P. R.	Suisse	Tschechoslovaquie	Union Sovietique	Allemagne	France	Italie	Hongrie	Grand Bretagne	Etats Unis
1											1,1		1									1	
2							1,15											1					
3			1,25									1,25	2	1									1,2
4		2,75										2,75	3										2,5
5						3,5	3,5	3,5					4				3	3	3		3		
6	3,6		3,6	3,6	3,6						3,6		5	3	3	3						3,3	
7		5,5										5,5	6										5
8						6,9							7				6						
9							7	7										6	6		6		
10	7,2		7,2	(7,2)	7,2						7,2		8	6	(6)	6						6,6	
11		9,52										9,52	9										(7,5) 8,7
12						11,5	11,5	11,5					10				10	10	10				
13	12		12	12	12									10	10	10					10		
14											12,5		11									11	
15		15,5										15,5	12										15
16											16,5											15	
17	17,5		17,5	(17,5)		17,5	17,5	17,5						15	(15)		15	15	15				
18						23	23	23					13				20	20	20		20		
19	24		24	24							24		14	20								22	
20					25										20								
21		25,8										25,8	15			22							23
22							27,5						16					25					
23			30											25									
24							35						17					30			30		
25	36			36							36		18		30							33	
26					37			37					19			35			30				
27		38										38	20										34,5
28						40,5											35						
29			42											35									
30		48,3										48,3	21										46
31											49		22									44	
32								50					23						45				
33	52			52			(52)								45			(45)					
34											61		24									55	
35							70						25					60					
36								72					26						63				
37	72,5		72,5	72,5							72,5		27	60	60							66	
38												73	28										69
39	100							100			100	100	29						90			88	92
													30										
													31										
40												121	32										115
41	123		123	123	123			123			123		33	110	110	110			110			110	
42							125											110					
43						126											110						
44	145							145	145		145	145	34						130	130		132	138
													35										
													36										
45												169	37										161
46	170		170			170	170	170			170		38		154			150	150			150	
													39										
47					172												150						
48												205	40										196
49												242	41										230
50	245	245	245	245				245			245		42	220	220	220				220		220	
51							246						43						225				
52						250												220					
53					252												220						
54	300		(300)				300				300	300	44, 45		(275)				275			275	287
55						330							46					300					
56												345	47										330
57											360											330	
58	362											362	48										345
59							400						49						380				
60	420	420	420	420		420					420		50	380		380	400	380				380	
61												483	51										460
62	525											525	52										500
63	> 700																						

De cette analyse il en résulte :

a) Le nombre des tensions maxima employées plus souvent est de 63 et celui des tensions nominales de 53. Ces nombres s'élèvent à 73 et respectivement 63 si l'on y ajoute certains degrés de tensions des autres pays [15], [16], ainsi que ceux de plusieurs tensions moins usuelles en Amérique [17], mentionnées dans le tableau no. 1.

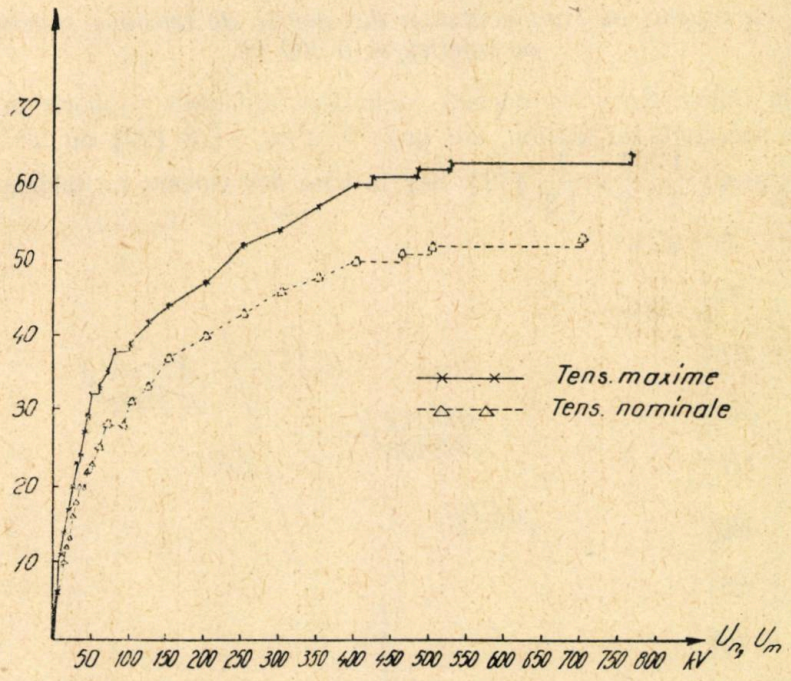


Fig. 2. La courbe classée du nombre de degrès de tensions maxima et nominales en fonction de U_m (tensions maxima).

b) Dans l'ensemble des degrés de tensions maxima 60% (38) environ sont situés dans l'intervalle $U_m < 100$ kV et 40% (25) dans l'intervalle $100 \div 787{,}5$ kV, tandis que pour les tensions nominales, ces valeurs sont 53% (28) respectivement 47% (25). La figure 2 indique la courbe classé du nombre de degrés de tensions maxima et nominales en fonction de U_m. On observe que :

— la pente descend rapidement jusqu'à la tension de 50 kV ;
— les courbes de fréquence rélative et absolue de la tension nominale ont une pente plus petite que celle des tensions maxima.

c) Dans le domaine des tensions dépassant 100 kV les tensions maxima sont moins nombreuses que les tensions nominales.

d) Les normes anglaises et américaines possèdent le plus grand nombre de degrés de tension 18 réspéctivement 20 [1], [18], ou 19 réspéctivement 27 degrés si l'on ajoute également les degrés moins

usités conformément au point a ; en même temps, les normes tchécoslovaques n'en contiennent que 8 [19].

e) La pente minimum des courbes $U_n = f\ (U_m)$ appartient aus normes roumaines, suisses et tchecoslovaques, tandis que les normes américaines et anglaises ont la pente maximum.

f) L'allure des courbes $U_n = f\ (U_m)$ est relativement irrégulière.

1.3. *Le rapport de l'augmentation des degrés de tensions supérieures ou inférieures à 100 kV*

On utilise dans les normes nationales différents rapports entre les degrés successifs de tension, tels que : 3, 2 ou $\sqrt{3}$ [20] ou les valeurs réciproques : $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{\sqrt{3}}$ [12]. Sur la base des valeurs du tableau no. 1,

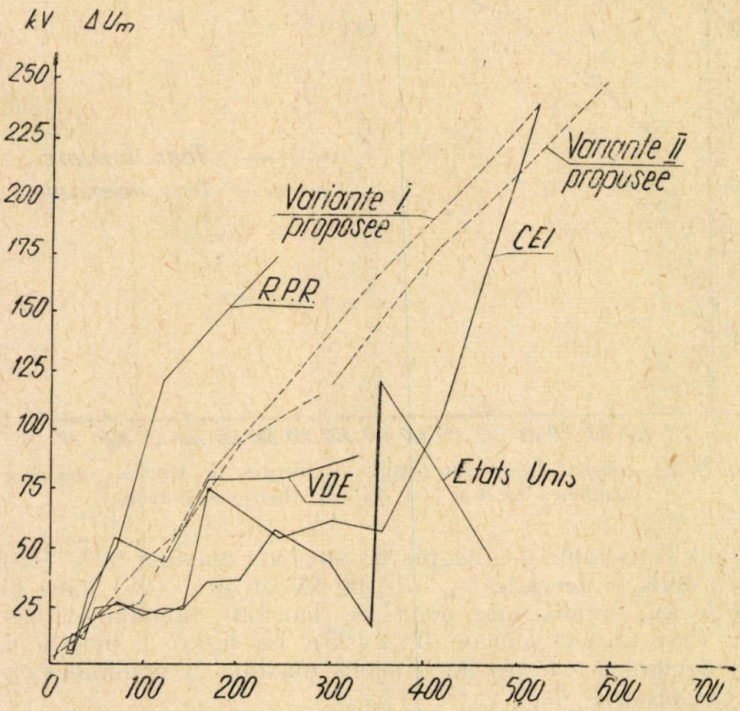


Fig. 3. La variation des rapports entre les differents degrès de tensions succesives pour plusieurs normes.

on a analysé la variation des diverses augmentation absolues ainsi que les rapports entre les différents degrés de tension successives selon les normes de la CEI, du VDE, de Roumanie et des USA (fig. 3).

Il est à rémarquer que les courbes ne respectent pas la régle de l'augmentation permanente et proportionelle en même temps que l'augmentation de la tension. Il en résulte que certains degrés de tension

T A B L E A U 2

No. crt.	Variante I basée sur les recommandations C E I					Variante II basée sur le poids des instalations existantes à tensions approchés					Observations
	U_{mk} kV	ΔU_k kV	a kV	a %	Normes nationales où sont mentionnés	U_{km} kV	ΔU_k kV	a kV	a %	Normes nationales où sont mentionnés	
1	1,15*	—			Allemagne	1,15		—	—	Allemagne	*) Tension VDE
2	3,6	2,45			Suisse, C.S.R., Angleterre	3,50	2,35			U.R.S.S., Allemagne, France, R.P. Hongrie	**) Les valeurs compris en paranthèses correspondent à la tension de 100 kV.
3	7,2	3,6	+ 0,16	+ 2,22	R.P.R., Suisse, C.S.R., Anglet.	7,0	3,5	+ 0,2	+ 2,86	U.R.S.S., Allemagne, France	
4	12	4,8	— 0,25	— 2,08	R.P.R., Suisse C.S.R., Hongrie	11,5	4,5	— 0,4	— 3,48	Allemagne, France, R.P. Hongrie	
5	17,5	5,5	— 1,22	— 6,97	R.P.R., Suisse, U.R.S.S., Allemagne, France	17,5	6,0	— 0,32	— 1,72	R.P.R., Suisse, Allemagne, France	
6	24	6,5	— 1,2	— 5,00	R.P.R., Suisse, Angleterre	25,8	8,3	— 0,1	— 0,39	S.U.A.	
7	36	12	+ 2,9	— 8,05	Suisse, Angleterre	37,0	11,2	— 0,4	+ 1,08	C.S.R., France	
8	52	16	— 0,8	— 11,54	Suisse, Allemagne	52	15	+ 0,9	+ 1,73	Suisse, Allemagne	
9	72,5	20,5	— 1,9	— 2,62	R.P.R., Suisse, Angleterre	72,5	20,5	— 0,5	— 0,69	R.P.R., Suisse, Angleterre	
10	96 (100)	23 3 (27,5)	— 5,7 (— 1,7)	— 5,93 — 4,87	**) (France, Angleterre, S.U.A.)	100	27,5	— 1,1	— 1,100	France, Angleterre, S.U.A.	
11	123	27 (23)	— 6 (— 15,5)	4,87 (— 12,6)	R.P.R., Suisse, C.S.R., France, Angleterre	145	45	+ 6,5	+ 4,48	France, Italie, Angleterre, S.U.A.	
12	170	47	+ 9,2	+ 5,41	Suisse, Allemagne, France, Angleterre	205	60	— 3	— 1,46	S.U.A.	
13	245	75	+ 9,2	+ 3,76	R.P.R., Suisse, C.S.R., Italie, Angleterre	300	95	+ 11	+ 3,67	Suisse, France, Angleterre	
14	362	117	+ 12	+ 3,32	(C.E.I.)	420	120	— 13	— 3,10	R.P.R., Suisse, C.S.R., Allemagne, U.R.S.S., Angleterre	
15	525	163	— 1	+ 0,19	(C.E.I.)	600	180	+ 12	+ 2,0	—	
16	765	240	+ 12	+ 1,57		950	250	— 2	— 0,24	—	
17	1100	335	— 1	— 0,09	—	1200	350	0	0		Tensions pour l'avenir
18	1600	500	— 30	— 1,88	—	1700	500	+ 10	+ 0,59	Total 41 pays: 11 petits, 30 grands öù S.U.A. est inclus 4 fois.	
				$\lvert \Sigma a\ \% \rvert = 55,5$					$\lvert \Sigma a\ \% \rvert = 28,59$		

n'ont pas été judicieusement choisis. Le fait de les maintenir encore s'explique par l'existence des installations pour ces tensions et surtout par l'existence de l'industrie électrotechnique possedant de l'équipement à cette tension.

La courbe la plus régulière est celle des tensions du standard roumain, tandis que la plus irrégulière appartient aux normes américaines. La courbe du VDE est un peu plus ordonnée, tandis que la courbe de la CEI, coincidant en fait avec celle des normes anglaises, occupe une position intermédiaire.

En partant de ces constatations, des ronnées d'exploitation et de la littérature de specialité on propose une formule de recurence pour déterminer les degrés de tension en vue d'obtenir une courbe $\Delta U = f(U_m)$ ayant une pente rélativement constante :

$$U_{k+1} = U_k + 1{,}4\,\Delta U_k + a \qquad (1)$$

où

$$\Delta U_k = U_k - U_{k-1}$$

a = facteur de correction affin d'assurer à des valeurs arrondis pour les tensions.

Sur la base de cette formule, il est possible d'établir deux variantes d'échelles de tensions maxima (Tableau no. 2).

a) La première variante est greffée présque totalement sur les récomandations de la CEI : 1,15 ; 3,6 ; 7,2 ; 12 ; 17,5 ; 24 ; 36 ; 52 ; 72,5 96 ; 123 ; 170 ; 245 ; 362 ; 525 ; 765 ; 1100 ; 1600 kV. On observe que seulement la valeur 96 kV resulte différente de 100 kV affin de permettre l'encadrement dans l'échelle proposée pour les degrés de tensions superieures à 100 kV, avec des petites déviation „a". Les deux derniers degrés sont des perspective pour l'avenir.

b) La deuxième variante est greffée sur des degrés de tension en vigueur dans plusieurs pays industrialisés, de manière que l'on puisse grouper une gamme plus large de normes avec des tensions aux moindres déviations „a" posibles : 1,15 ; 3,5 ; 7 ; 11,5 ; 17,5 ; 25 ; 35 ; 50 ; 70 ; 100 ; 300 ; 600 ; 850 ; 1200 ; 1700 kV.

En analysant le tableau no. 2, on observe que la deuxième variante de tensions maxima proposées est plus avantageuse que la première variante, et cela pour les raisons suivantes ;

a) Les tensions respectives sont plus largement utilisées dans 30 pays contre 17 (respectivement 20, y compris la tension de 100 kV au lieu de 96 kV dans la première variante) ;

b) La deuxième variante contient aussi des tensions américaines (4 degrés) ce qui crée ainsi la premise de l'unification totale des degrés de tensions ;;

c) Elle est plus uniforme parce qu'elle est plus rapprochée des valeurs résultant de la formule proposée, à savoir :

— la deviation moyenne carrée est $\sigma_{II} = 2{,}37\%$ contre $\sigma_I = 4{,}42\%$ (ou $\sigma_I = 5{,}17\%$ si l'on inclut la tension de 100 kV au lieu de 96 kV) ;

— le module de la somme des déviations est 28,59 contre 55,50 ;

— le module de la déviation moyenne arithmétique par degré de tension est 1,78% contre 3,46‰ ;

— l'amplitude de la dispersion des valeurs varie de — 3,48 à + 4,48 contre — 6,97 (—12,6) à + 8,05.

d) Les valeurs corespondantes des degrés de tension sont plus grandes (145 kV contre 123 kV, 205 kV contre 170 kV etc.).

e) Tous les degrés de tension sont utilisés sur une large échelle au moins dans un ou deux pays, n'ayant pas de valeurs telles que 362 kV et 525 kV, utilisées beaucoup moins et adoptées dans les recommandations du CEI seulement depuis 1962.

Il en résulte de l'analyse des tableaux no 1 et 2 que l'actuel labyrinthe de degrés de tensions peut être réduit de 63 (respectivement 73) degrés à 16 degrés de tension.

1.4. *Les niveaux d'isolation et de protection à choc*

En analysant les normes nationales de différents pays, ainsi que les recommandations du CEI l'on constate la variété particulièrement grande des niveaux d'isolations et de protection [2].

Dans le tableau no 3 l'on indique les valeurs du niveau d'isolation et de protection, la distance entre les éléments sous tension et la terre, ainsi que celle entre les éclateurs de protection, nécessaires pour assurer ce niveaux.

Sur la base des résultats indiquées dans le tableau no. 3 on a tracé les courbes de la figure 4.

Les normes existantes dans plusieurs pays différrent non seulement comme valeurs, mais aussi du point de vue de la manière d'aborder le problème. C'est ainsi que les normes VDE [2], GOST [5] et Américaines [1], [18], [23] donnent les tensions d'essai pour certains équipements tels que : transformateurs, appareillage de comutation, isolateurs, séparateurs etc. D'autres normes telles que celles de Roumanie [3]), de Suisse [6], de CSR [19], de même que les récommandations de CEI [4], [24], indiquent directément les valeurs du niveau d'isolation à choc dans le cadre des normes de coordination de l'isolement, ces valeurs étant valables pour tous les équipements de la soustation.

Les valeurs de la tension d'isolation sont indiquées aussi dans les standards des équipements réspectifs, tant dans les pays possédant déjà des standards de coordination de l'isolation [25], [26], que dans les pays que n'ont pas encore de tels standards [27], [28].

Plusieurs valeurs figurant dans le tableau no 3 ont été adoptées d'après des travaux de spécialité parus dans le pays dont il s'agit [29], [30], [31], [32]. Par consequant, le tableau no. 3 ne renferme que les valeurs du niveau d'isolation pour les transformateurs et l'appareillage à l'huile, afin d'avoir un critérium unique pour comparer ces valeurs. Ce choix est déterminé aussi par le fait que la coordination de l'isolement, dans le sens de la définition comme corrélation des niveaux d'isolation et du niveau de protection concèrne à l'ordinaire le transformateur.

TABLEAU 3. — **Coordination de l'isolement au choc pour les transformateurs et l'appareillage electrique**

Tension de tenue á choc														Niveau de protection avec parafoudres àresistence variable							Niveau de protection avec éclateur			La distance d'éclatement			Tension de tenue à frequence industrielle											
Nr. crt.	Um Vef	C E I		Roumanie	Suisse	Tchecoslovaquie	Union Sovietique	Allemagne	France	Italie	Hongrie	Grande Bretagne	Etats Unis	C E I		Roumanie	Suisse	Tchecoslovaquie	Union Sovietique	Allemagne	Grande Bretagne	Allemagne	Grande Bretagne		Allemagne	Grande Bretagne		C E I		Roumanie	Suisse	Tchecoslovaquie	Union Sovietique	Allemagne	France	Italie	Hongrie	Grande Bretagne	Etats Unis
		I	II											I	II													I	II										
1	1,1																																				
2	1,15							23												5													3,5				
3	1,25												30 45																								
4	2,75		45 60										45 60								9								15								15
5	3,5						42	52	45		40								20	13													18	10	16			
6	3.6	45		45	45	45						50		21		21	26	30						50		5,0	4,5	16		16	16	16					16	
7	5,5		60 75										60 75								18								19								19
8	6,9						57												30													25				
9	7,0							70	60		60									26		63	67		6,0								20	22			
10	7,2	60		60	60	60						75		37		35	38	40						75		9,0	7,0	22		22	22	22					22	
11	9,52		75 95										75 95								36								26								26
12	11,5						5	85	80										45	40		79	83		8,6							35	30	28			
13	12	75		75	75	75					80			47		50	55	55										28		28	28	28					
14	12,5											95												95		11,5	9,0										28	
15	15,5		95 110										95 110								58								34								34
16	16,5											110												110		14,0	11,5										38	
17	17,5	95		95	95		100	110	100					69		70	75		70	60		100	105		11,5			38		38	38		45	40	38			
18	23						120	145	125		125							85	80			132	140		15,5								55	50	48			
19	24	125		125	125							150		94		85	95							150		20,5	16,5	50		50	50						50	
20	25					125												95															50				
21	16,5		150										150								88								50								50
22	17,5							170												100		145	160		18,0								60				
23	30			150												107														60							
24	30							195			170									120		165	190		22,0								70				
25	36	170			170							200		133			125							200		28,0	23,0	70			70						70	
26	37					180			180									145															75			70		
27	38		200										200								115								70								70
28	40,5						185				190								130													85						
29	42			195												145														80							
30	48,3		250										250								141								95								95
31	49											250												250		38,0	29,0										95	
32	50								235																								95					
33	52	250			250			290						180			185		175			220	250		30,5			95			95		90					
34	61											300												300		47,0	37,0										115	
35	70							375												235		280	335		40,0								120					
36	72								325																								140					
37	72,5	325	350	325	325							350 300		263		240	245							350 300		55,0 47,7	43,0 32,0	140		140	140						140 115	
38	73												350								210																140	
39	100	450/380							450 350			450 380	450	288							280			450 380		71,0 60,0	58,5 48,6	185 150						180 150			185 150	185
40	121												550 450								351 280																	230
41	123	550/450		550 450	550 450	550 450			550 450			550 450		350		370	410 455	450 370						550 450		88,0 71,0	72,5 58,5	230 185		230 185	230 185	230 195			220 180		250 185	
42	125							630 520												405 330		383 430	560 500		75,0 65,0								220 175					
43	126						460						405																				200					
44	145	650/550 450							650 550	650		650 550	650 550	393							420 351			650 550		105,0 88,0	89,0 72,5	275/230 185						260 220	275		275 230	275
45	169												750 650								495 420																	325
46	170	750/650 550			750 650			860 750	750 650			750 650		522			560 490			565 450		630 535	720 610	750 650	100,0 83,0	122,0 103,0	103,0 89,0	325/275 230		325 275			300 240	305 260			325 275	
47	172						630						465																			275						
48	205												900								568 495																	395
49	242												1030 900								700 563																	460
50	245	1030/900 825/725		1050 900 825	1050 900	1050 900				900		1050 900		662		680	800 680	885 720						1050 900		175,0 143,0	152,0 127,0	460/ 325 360/ 395		460 395 360	460 395	460 395				395	460 395	
51	246								1050 910																									442 380				
52	250							1200 1040												825 660		885 750	1010 850		145,0 121,0								440 355					
53	252						900						670																				400					
54	300	—/1175/1050 900			—/1050				—/ 1050			—/ 1050		755			—/800			—/875				1650		175,0	152,0	—510/460 395		—/ 460							—/ 460	
55	330							—/ 1320														—/975	—/ 1110		—/ 160,0								—/ 480				
56	345												1175								—/765																	525
57	360											—/ 1250												1250		211,0	185,0										—/ 550	
58	362	—/1300/1175																										—/570 510										
59	400																																					
60	720 420	—/1550/1425 1300		—/1550 1426	—/ 1425	—/ 1450		—/ 1640				—/ 1425				1000	—/ 1400	—/ 1210			—/ 1110		—/ 1375	—/ 1570	1425	—/ 230,0	240,0	213,0	—/680 630 570		—/680 630	—/ 630	—/ 630		—/ 640			—/ 630	
61	483																																					
62	525	—/1675/1550																																				
63	787,5																																					

Dans certaines normes, à savoir les normes roumaines, suisses, chécoslovaques et allemandes le niveau de protection est donné directement, tandis que dans les recommandations du CEI [21] ou dans les normes de l'URSS [21], des USA [1], de l'Italie [20] ce niveau est indiqué comme la valeur de la tension residuelle des parafoudres.

On a mentionné également les distances de protection des éclateurs de protection, ainsi que les tensions respectives d'amorçage spécifiées dans plusieurs normes nationales, ce qui offre la possibilité de comparer les resultats obtenus.

De l'analyse des valeurs du tableau no. 3 de la figure 4 il en résulte :

a) Le nombre des degrés de tensions de tenue à choc et à fréquence industrielle est pratiquement égal au nombre des degrés de tensions maxima, à savoir 61 et respectivement 64, contre 63.

b) On observe que les normes américaines sont plus rigoureuses que les normes européennes pour des tensions $U_m \leqslant 73$ kV, ce fait étant dû en grande partie aux indices kéraunics plus élevés (7—50 en USA contre 5—30 en Europe) [33] ; pour des tensions plus élevées, les niveaux d'isolation sont pratiquement les mèmes.

c) Pour les tensions supérieures à 72,5 kV on emploie les niveaux d'isolation réduits dans les normes de tous les pays ; on observe la tendance de les réduire de 2, voire mème de 3 degrés, en fonction du coéfficient de mise à la terre du neutre et des performances des parafoudres.

d) L'écart maximum entre les niveaux d'isolation à choc et les niveaux de protection (qui définit le coefficient de protection) a lieu dans le cas des normes américaines.

Il est à remarquer qu'à présent les discussions envisagent de plus en nécesité d'établir pour les très hautes tensions des niveaux d'isolation différentes entre phase-phase et phase-terre [10] ; c'est ainsi qu'en Grande — Bretagne on a prévu pour le projet du systéme de 400 kV U_i = 1425 kV pour la phase-terre et 1640 kV pour phase-phase [34]. Des études similaires sur ce sujet ont été effectués en URSS [20] et en Tchécoslovaquie [35].

Les auteurs estiment qu'il est necessaire de faire une différence entre les deux niveaux d'isolation, aussi bien dans les recommandations du CEI que dans les normes nationales. Dans ce but, il est nécessaire de coordonner les études et l'expérience acquises déja dans différents pays, en vue de préciser la tension à laquelle il faudra appliquer des niveaux d'isolation differenciés entre phase-phase et phase-terre, ainsi que le rapport entre ces deux valeurs.

2. Les niveaux de protection et la réduction des niveaux d'isolation

2.1. Le niveau de protection dépend des caractéristiques fonctionnelles des parafoudres à résistance variable, de la manière de traiter le neutre du réseau électrique, du schéma de protection à l'entrée des lignes dans les stations, ainsi que de la position des parafoudres (la distance vis-à-vis de l'objet à proteger, les caractéristiques du circuit etc.). Etant

donné que le transformateur représente l'outillage le plus cher d'une station, outillage dont l'isolation est plus réduite, la coordination de l'isolement vise particulièrement l'isolation des transformateurs et ce fait détermine la position des parafoudres.

Les progrè réalisés dans le domaine des caractéristiques fonctionelles des parafoudres à résistance variable ont permis de réduire en premier lieu les niveaux d'isolation à choc et ensuite aux tensions de fréquence industrielle.

Le tableau no. 4, indique la variation avec le temps des niveaux d'isolation et de protection selon les normes du VDE.

Tableau no. 4

La variation avec le temps des nixeaux d'solation et de protection selon les normes du VDE

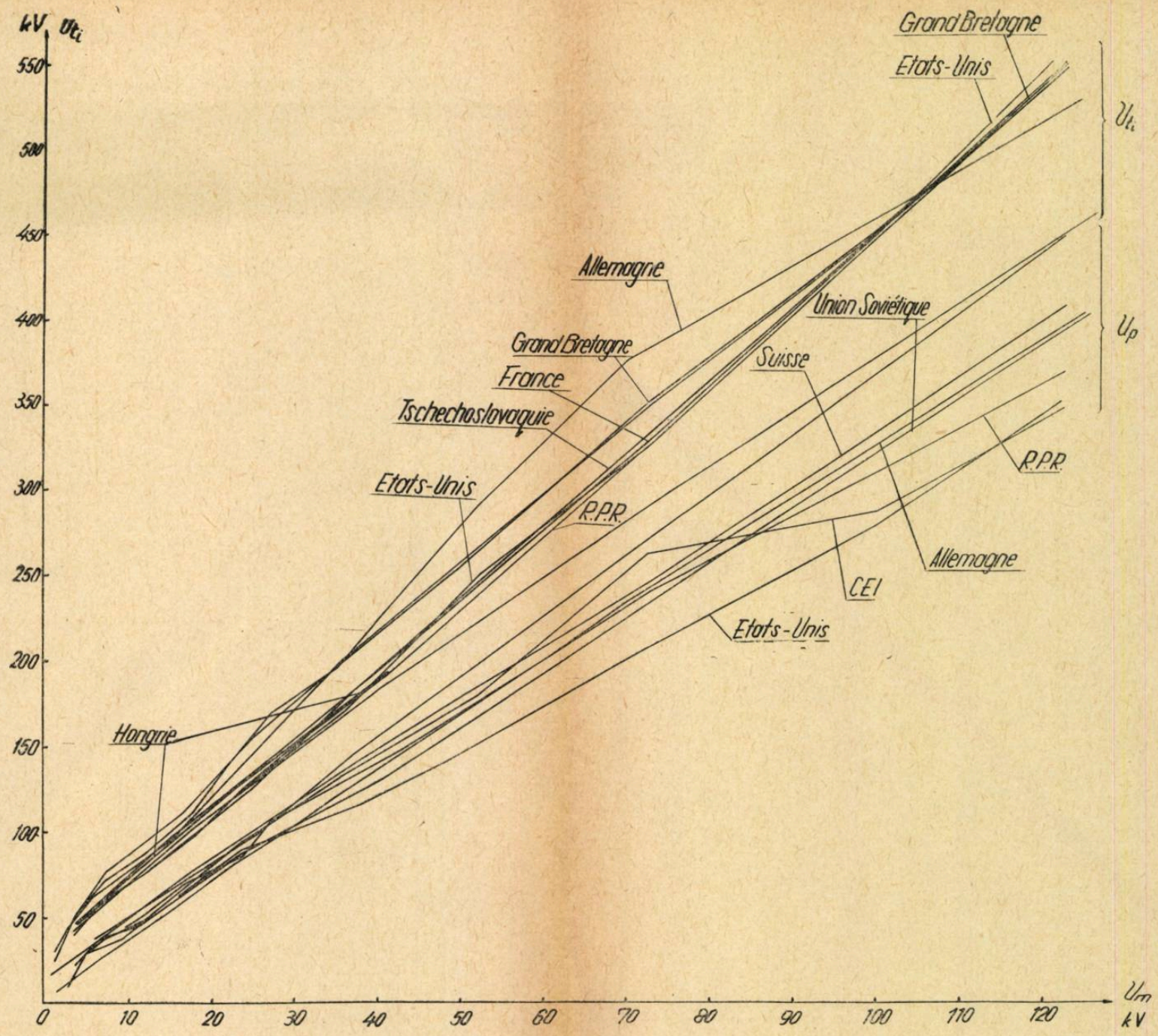
U_{max} kV	Niveau de protection kV			Niveau d'isolation à choc kV			Niveau d'isolation à frequence industrielle kV_{ef}		
	1953	1958	1961	1953	1958	1961	1953	1958	1961
1,15	5	5	5	25	23	23	3,5	3,5	3,5
3,5	13	13	13	50	52	52	10	10	10
7	26	26	26	75	70	70	20	20	20
11,5	44	40	40	100	85	85	30	30	30
17,5	60	60	60	125	110	110	40	40	40
23	80	80	80	155	145	145	50	50	50
27,5	—	—	100	—	—	170	—	—	60
35	125	120	120	215	195	195	70	70	70
52	185	175	175	295	295	290	90	90	90
70	245	235	234	375	375	375	120	120	120
125	415/ 370	415/ 330	415/ 330	630/ 540	630/ 520	630/ 520	220/ 175	220/ 175	220/ 175
170	570 485	565 450	565 450	810/ 690	860/ 750	860/ 750	300/ 240	300/ 240	300/ 240
250	850/ 725	825/ 660	825/ 660	1140/ 980	1150/ 1040	1200/ 1040	440/ 355	440/ 355	440/ 355
300	—/ 930	—/ 875	—/ 875	—/ 1250	—/ 1320	—/ 1320	—/ 480	—/ 480	—/ 480
380	—/ 1380	—/ 1170	—/ 1110	—/ 1800	—/ 1640	—/ 1640	—/ 640	—/ 640	—/ 640

Sur la base des valeurs du tableau no. 4 on a tracé les courbes spécifiées dans la figure 5.

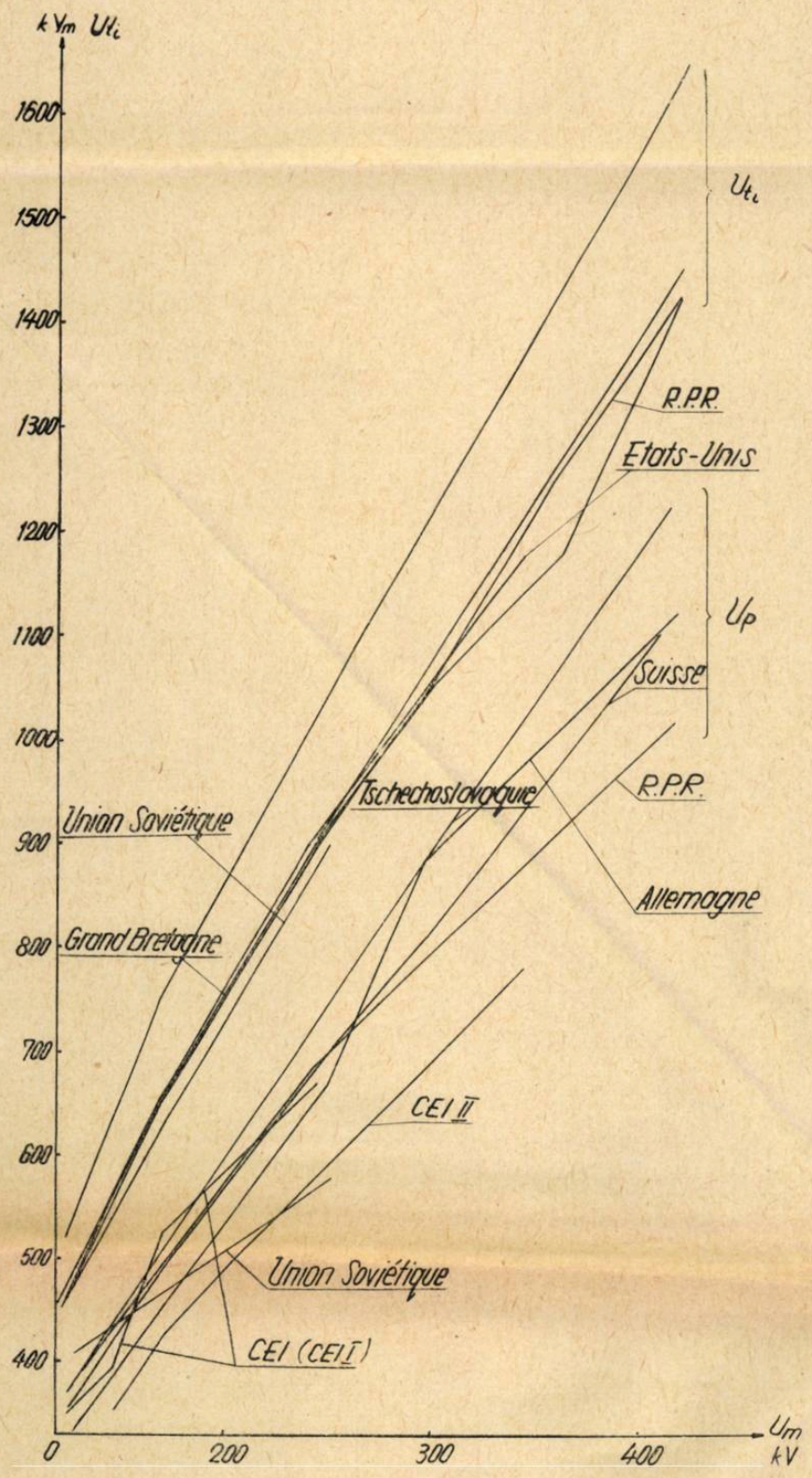
De l'analyse de celles-ci il résulte que :

a) Le niveau d'isolation à frequence industrielle ne présente pas des modifications dans la période analysée.

b) Le niveau d'isolation à choc marque une allure descendante sauf quelques exceptions représentant des mises au point sur la base de



a_1) pour $1 < U_m < 123$ kV



a_2) pour $123 < U_m < 420$ kV

Fig. 4 a. Les courbes de variation de la tension de tenue à choc (U_{ti}), en comparaison avec le niveau de protection (U_p), en fonction de la tension maxima (U_m) pour les transformateurs de force d'après plusieurs normes.

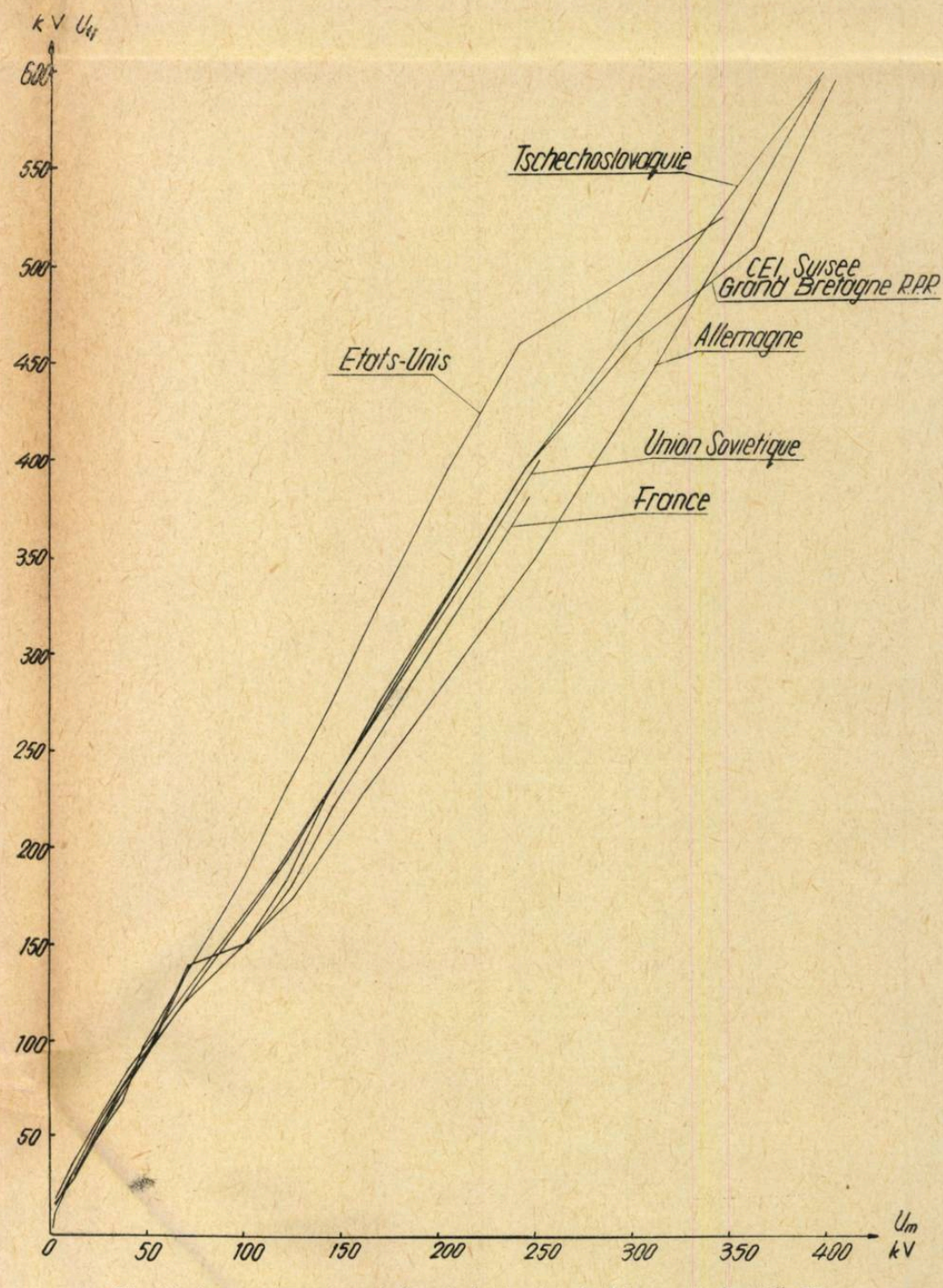


Fig. 4 b. Les courbes de variation de la tension de fréquence industrielle U_{tf} en fonction de la tension maximum (U_m) pour les transformateurs. dans le domaine $1 < U_m < 420$ kV.

l'expérience d'exploitation [36]. On constate également une réduction du niveau d'isolation pour d'autres normes nationales, comme par exemple dans l'U.S.A. [1].

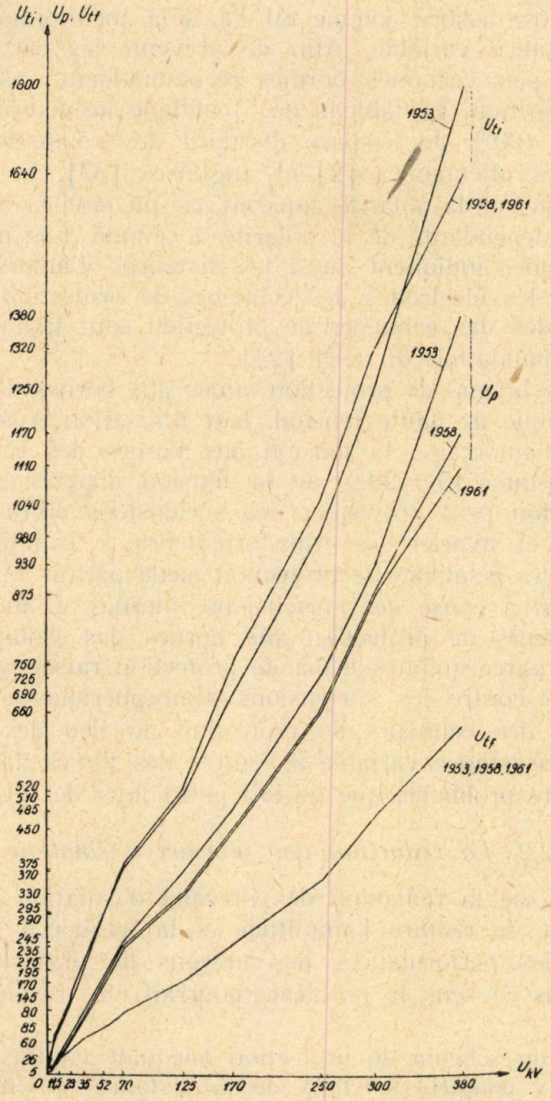


Fig. 5. La variation des niveaux d'isolation à choc (U_{ti}) à frequence industrielle (U_{tf}) et des niveaux de protection (U_p) selon les normes VDE dans la periode 1953—1961.

La stabilité du niveau d'isolation à fréquence industrielle s'explique en partie par le fait que le probleme du comportement des parafoudres à resistance variable aux surtensions internes a été moins étudié et

l'amélioration des caractéristiques des parafoudres sous l'action de ces surtensions a enrégistré des progrès peu importants.

Le niveau de la protection fondamentale pour le cas des surtensions atmosphériques est assuré comme on l'a déja mentionné par les parafoudres à résistance variable. Afin de prévenir les cas où ceux-ci ne fonctionneraient pas, certaines normes recommandent aussi l'emploi des éclateurs de protection. Le tableau no. 3 indique les tensions de tenue et de décharge de 100% de l'espace disruptif des éclateurs de protection selon les normes allemandes [2] et anglaises [37]. Le champ n'étant pas uniforme l'effet de la polarité apparaît, ce qui rend la tension de tenue ou de décharge dépendante de la polarité de l'onde. Les normes que l'on vient de mentionner indiquent aussi les distances d'amorsage auxquelles il faut emplacer les électrodes des éclateurs de protection. Les distances entre les électrodes des éclateurs de protection sont indiquées également dans les recommandation du CEI [24].

Quant aux éclateurs de protection située aux bornes des isolateurs de l'outillage électrique de haute tension, leur utilisation n'est pas à recommander. Après l'amorçage, la tension aux bornes des éclateurs de protection tombe jusqu'à $15 \div 20\%$ de la tension d'amorçage. Cette chute brusque de tension peut provoquer des surtensions entre les spires des transformateurs et avarier les transformateurs à isolation réduite. Le fonctionnement des éclateurs de protection mène parfois à la détérioration des interrupteurs, à cause des surtensions internes. D'autre part, l'utilisation des éclateurs de protection aux bornes des isolateurs n'est pas à recommander, parce qu'un schéma de protection raisonnable assure une bonne protection contre les surtensions atmosphériques.

L'utilisation des éclateurs de protection au lieu des parafoudres à expulsion ou à résistance variable à l'entrée des lignes dans les stations, constitue un autre problème, que ne fait pas l'objet de cet article.

2.2. *La réduction des niveaux d'isolation*

Le problème de la réduction des niveaux d'isolation est conditionné par la possibilité de réduire l'amplitude et la fréquence des surtensions, ainsi que par les performances des moyens de protection contre ces surtensions. Dans ce sens le problème pourrait être résolu de plusieures manières :

1) Adopter un schéma de protection adéquate contre les surtensions atmosphériques, y compris le choix de la distance maximum admissible entre le parafoudre à résistance variable et l'outillage à proteger.

2) Réduire la possibilité de l'apparition ou réduire l'amplitude des surtensions internes par l'utilisation des interrupteurs aux caractéristiques correspondantes, l'employe des schéma opératifs menant à la réduction de l'amplitude des surtensions, le maintient de plusieurs lignes connectées aux bornes de la soustation, etc.

c) Améliorer les caractéristiques des parafoudres pour qu'ils ne permettent pas à la tension de monter au-dessus d'une certaine valeur établie par le constructeur ; cette condition nécessite la possibilité de fabriquer des parafoudres utilisables aussi pour les surtension internes.

d) Etablir la valeur précise du niveau d'isolation de l'isolement externe, compte tenu de la pollution ; réduire les effets de la contamination de l'isolement.

On construit à présent des parafoudres dont les caractéristique fonctionnelles sont bonnes dans le cas des surtensions atmosphériques ; malgré les progrès importants réalisés dernièrement dans la fabrication des parafoudres pour les surtensions internes [1], [34], parafoudres dont quelques-uns réalisent des performances tout à fait remarquables [38], ils n'assurent pas encore une bonne protection, particulièrement lorsqu'ils s'agit des surtensions internes ayant une durée relativement longue.

On recommande de réduire le niveau d'isolation en premier lieu en fabriquant des parafoudres aux performances superieures, ce qui permettrait de limiter le niveau des surtensions atmosphériques et internes [35]. La réduction, à cette fin, de l'amplitude des surtensions internes proposée dans [39], ou le maintien de la qualité de l'isolation ne résout que certains aspects du problème.

Parallèlement, il est nécessaire de connaître les caractéristiques de l'isolation à protéger. Des recherches laborieuses ont été effectuées en Roumanie afin de déterminer le niveu d'isolation des isolateurs pour les lignes aériennes de 6-110 kV [40], [41], ainsi que des isolateurs pour les stations intérieures de 6-35 kV [42]. Ces recherches ont fait ressortir une importante réserve de l'isolation par rapport aux valeurs actuelles normées de niveau d'isolation.

La réduction du niveau d'isolation pour des tensions dépassant 100 kV présente une grande importance, ce qui explique la dynamique de la variation des niveaux d'isolation dans les différentes prescriptions pour toutes ces tensions. En même temps on constate la tendance de réduire aussi les niveaux d'isolation pour les tensions de 1-100 kV, étant donnée la réserve d'isolation existante. On étudie ce problème au CEI [10] et l'on cite quelques réalisation obtenues dans ce sens en France, où le niveau de la tension de choc a été réduit de 120 kV à 95 kV lorsqu'il s'agit de tensions maxima de 23 kV à 50 Hz ; dans l'USA il y a également deux niveaux d'isolation dans les cas de la tension maxima de 15 kV [43]. Les recherches effectuées à l'Institut d'Energétique de l'Académie de la Republique Populaire Roumaine ont démontré l'existance d'importantes réserves d'isolation tant aux isolateurs pour des tensions nominales de 35 kV [42], qu'aux isolateurs pour tensions nominales de 60 respectivement 110 kV [13].

Au sujet de la réduction du niveau d'isolation, un autre problème se pose encore : celui du passage d'une tension déjà existente à une tension de fonctionnement supérieure [43], [44], qui présenterait parfois des avantages économiques. Différent aspects de ce problème sont mentionnés dans les travaux [10], [11], [12],]13[, [42].

3. Quelques considérations sur les perspectives de la coordination de l'isolement

3.1. *Les niveaux d'isolation des différents outillages*

La coordination de l'isolement définie dans les recommandations du CEI [24] ou dans les normes nationales [1], [2], [3], [6], suppose-comme nous l'avons déjà mentionné, la corrélation du niveau de protection et du niveau d'isolation, déterminé principalement par le transformateur. En réalité, le niveau d'isolation de l'appareillage des stations électriques n'est pas le même que celui du transformateur. Et ceci parce qu'il est impossible que les parafoudres assurent le même niveau de protection pour le outilages de la station, celui-ci étant fonction de la distance entre le parafoudre et l'outillage respectif ainsi que des caractéristiques de celui-ci (la capacité équivalente). D'autre part, pour toute une série d'outillages (isolateurs des barres, séparateurs) l'obtention d'une niveau d'isolation plus élevé peut être plus facilement realisée du point de vue économique, par rapport aux transformateurs ou aux interrupteurs. La situation ci-dessus se reflète d'ailleurs dans la plupart des normes nationales. Ainsi, dans les normes roumaines [3] et suisses [6] on prévoit des valeurs différentes pour le tension de tenue à choc pour l'appareillage par rapport aux distance isolantes en cas des séparateurs ; à la fréquence industrielle ces normes indiquent des valeurs différentes par rapport aux normes VDE, soviétiques, américaines etc, où l'on prévoit plusieurs niveaux d'isolation.

Une autre problème qui se pose parallèlement est celui de la coordination de l'isolation entre phase-phase et entre phase-terre [10], [35], [45], [46], ce qui est important surtout dans le cas des tensions élevées. Il y a dans ce domaine des préoccupations et certaines propositions [10], [46], exprimées en partie dans le tableau no. 3. Les catalogues anglaise concernant les appareils de commutation montés à l'extérieur [31] prévoient deux distances minima nécessaires, à savoir pour la distance phase-terre et pour la distance entre les phases.

Des propositions intéressantes concernant la différenciation des niveaux d'isolation mentionés ci dessus se trouvent dans [45].

Le problème de l'établissement d'un raport entre les niveaux d'isolation pour le cas phase-terre et le cas phase-phase n'étant pas encore entièrement résolu, il est nécessaire d'effecteur des études en vue d'établir le rapport entre les deux valeurs, pour différentes degrés de la tension maximum.

Enfin le problème se pose de réaliser la coordination de l'isolement entre l'isolation de la station et celle de la ligne électrique. Les normes nationales [3], [4], [6], prévoient pour les lignes un niveau d'isolation plus réduit que celui de la station. Dans la tableau no. 5 on indique les valeurs des niveaux d'isolation pour lignes d'après les normes suises [47].

Tableau no. 5

Niveaux d'isolation pour les lignes

U_m kV$_{ef}$	U_{ti}		kV$_m$		U kV$_{ef}$			
	Isolation entière		Isolation réduite		Isolation entière		Isolation réduite	
	Lignes	Stations	Lignes	Stations	Lignes	Stations	Lignes	Stations
12	250	95	—		35	35	—	
24	250	165	—		55	55	—	
36	250	230	—		75	75	—	
52	250	340	—		105	105	—	
72,5	325	450	—		140	140	185	185
123	550	760	450	620	230	230		
170	750	1040	650	880	325	325	275	275
245	1050	1460	900	1230	460	460	395	395
300	—	—	1050	1460	—	—	460	460
420	—	—	1425	2000	—	—	630	630

On observe que l'isolation au choc des lignes aériennes est plus élevée que celle des stations, pour les tensions inférieures à 35 kV ; pour les tensions supérieures, ces valeur sont égales pour les appareils et plus grandes pour les distances de séparation. A la fréquence industrielle ces valeurs sont égales lorsque les isolateurs sont secs et propres, mais en raison de la pollution ces isolateurs ont en réalité un niveau d'isolation plus petit.

En vue d'une coordination raisonable, il est nécessaire d'établir les valeurs des coefficients entre les niveaux d'isolation et le niveau de protection pour les différentes tensions maxima, des coefficients se référant à la gradation des niveaux d'isolation d'une station, à la différenciation du niveau d'isolation phase-terre et phase-phase, ainsi qu'à la differenciation entre le niveau d'isolation de la sous-station et des lignes aériennes.

3.2. *L'influence du caractère aléatoire des phénomènes*

L'apparition des surtensions d'une amplitude définie a un caractère aléatoire. Le perçement ou le contournement d'une isolation suivent aussi des lois statistiques. Pour celà, la détermination des criterium rationnels pour le choix du niveau d'isolation doit considérer le caractère aleatoire des phénomènes mentionnés.

Le niveau d'isolation d'une installation haute tension (ligne, station) doit être choisi de façon que la probabilité du son contournement soit plus petite qu'une limite donnée.

Le nombre réduit des données obtenues et leur insuffisante analyse, surtout pour les surtensions internes, ne permettent pas d'établir une loi de répartition des surtensions. Pour une première approximation on peut considérer que les surtensions suivent une loi de répartition normale [48]. La probabilité du contournement de l'isolation ou du perçement d'un intervalle d'air suit une loi de répartition normale. Simultanément avec

la loi de répartition il faut connaître les écarts moyens carrés. En ce cas on peut établir la probalité du contournement ou de perçement d'une isolation, si la tension monte, dans l'hypotèse qu'on connait la répartition de la densité probabilistique de la surtension (autrement dit, la probabilité de l'apparition d'une surtension d'amplitude variant de U à $U + \triangle U$), ainsi que la dépendance entre la probabilité du contournement au perçement de l'isolation et l'amplitude de la tension qui lui est appliquée. G. N. Alexandrov [48] a calculé la probabilité du contournement de l'isolation en considérant les principes ci-dessus mentionnés, comme fonction du dégré de l'isolation défini par la relation :

$$t_0 = \frac{\Delta U}{\sigma_s + \sigma_c}$$

où $\triangle U$ représente dans le cas des surtensions internes la difference entre la tension de contournement 50% de l'isolation de la ligne et la valeur la plus probable de la surtension respective ; σ_s et σ_c sont les écarts moyens carrés de ces deux grandeurs aléatoires.

Mais parce que la coordination de l'isolement doit considérer le caractère aléatoire des phénomènes, il faut effectuer des études afin d'établir les paramètres nécessaires pour l'application d'un critère scientifique pour le choix du niveau d'isolation fondé sur le calcul statistique.

3.3. *Les coeficients de correction pour les essais de laboratoire*

Les tensions de contournement et de perçement d'une isolation sont determinées par les essais effectués dans les laboratoires de haute tension. Mais les conditions réelles auxquelles l'isolement est soumise en exploitation sont differentes par rapport à celles de laboratoire. Les paramètres les plus importants qui doivent être considérés sont : la forme de la tension d'essai et la pollution de l'isolement.

Pour les essais à choc correspondants aux sollicitations engendrées par les surtensions atmosphériques, il n'y a pas de problèmes spéciaux, parce que la forme de l'onde et les conditions d'éssais sont assez précisément établies.

Il y a seulement une question speciale en ce qui concerne la détermination de la phénomènologie et la valeur de la tension de déchargement pour des grandes distances, afin d'établir plus concrètement la distance minimum pour les tensions nominales élevés ; ce problème constitue l'objet des préoccupations du Comité de travail No 8 de CIGRE.

Pour l'établissement du niveau d'isolation en considérant les surtensions internes, les essais de laboratoire sont effectués à la fréquence industrielle. En réalité les surtensions internes ont une fréquence plus élevée, dépendant de la nature des surtensions et des caractéristiques du circuit. Le contournement des isolateurs à sec sont effectués de même pour les essais à fréquence industrielle ou pour une tension équivalente à la surtension interne. En échange, l'écart moyen carré de ces deux valeurs est assez différent, ce qui influence le choix du niveau d'isolation lorsque l'on considère le caractère aléatoire des phénomènes. Les tensions de

contournement sous pluie diffèrent beaucoup. Déjà P. L. Bellaschi et L. B. Rademacher [49], ainsi que W. Wanger et W. Huber [50] sont arrivés à la conclusion que dans le cas d'une tension pséudoharmonique d'une fréquence de 500—2000 Hz, les tensions de contournement sous pluie sont pratiquement égales aux tensions de contournement à sec.

Les recherches plus récentes de G. A. Lebedev montrent qu'il faudrait adopter un coefficient de correction pour les résultats obtenus à l'éssai de frèquence industrielle sous pluie, dépendant de la durée d'application de la tension d'éssai ; les valeurs de ce coefficient sont indiquée dans le tableau no. 6.

Tableau no. 6

Les valeurs des coefficients de correction pour les valeurs de la tension de contournement sous pluie

t, s	0,01	0,02	0,04	0,05	0,06	0,10	0,50	1,00
k	1,56	1,42	1,31	1,28	1,26	1,15	1,08	1,05

Pour l'essai sous pluie aussi, les valeurs de l'écart moyen carré diffèrent assez, dans le cas d'une tension qui a la fréquence industrielle ou égale à la frequence des surtensions internes ; cet aspect du problème doit être considéré au choix du niveau d'isolation de la ligne.

4. Conclusions

En résumant on peut mettre en évidence les conclusions suivantes :

— La tension maximum devrait être adoptée dans les normes nationales au lieu de la tension nominale.

— La comparaison des normes nationales montre la grande diversité des tensions maxime et nominales. Il serait posible de réduire le nombre des tensions maxima de 26 à 16 sur la base des recommandations CEI, en unifiant aussi la pratique éuropéenne avec celle américaine.

— Dans la situation actuelle, pour les tensions maxima supérieures à la valeur de 123 kV, en analisant les differentes normes nationales et les recommandations CEI, on voit que les dernières présentent toujours un accroissement presque uniforme, ce qui montre qu'elles sont les plus indiquées.

— On peut constater une diversité importante dans le domaine des niveaux d'isolation et de protection. On remarque aussi que quelques normes nationales ont des tensions d'essai pour divers outillages électriques (transformateurs, appareils de commutation à huile etc.) tandis que d'autres normes nationales, ci inclus les recomandations CEI, ont des valeurs générales pour le niveau d'isolation, valeurs qui se réfèrent en fait au transformateurs. Il serait nécessaire d'uniformiser les valeurs ainsi que les critères du choix du niveau d'isolation, en prenant comme base les recommandations CEI.

— Il serait nécessaire à faire une, différence entre les niveaux d'isolation entre phase-phase et phase-terre. L'établissement d'une valeur déterminée de leur rapport, en considérant la valeur correspondante de la tension maximum, serait utile.

— Tandis que le niveau d'isolation pour la fréquence industrielle est resté pratiquement le même pendant un long interval d'années, le niveau d'isolation à choc a une dynamique descendente avec le temps, ce qui est une conséquence de la réduction du niveau de protéction, déterminée par les performances toujours ameliorées des parafoudres.

— L'utilisation des éclateurs montés sur les traversées de l'outillage de haute tension (transformateurs, interrupteurs) n'est pas recommandée et il serait indiqué d'inclure cette recommandation dans les normes nationales, ainsi que dans les recomandations CEI.

— La réduction des niveaux d'isolation pour les tensions maxima égales ou plus élevées que 245 kV est réliée à la possibilité de réduire ces surtensions ainsi qu'à la construction des parafoudres qui puissent limiter le niveau des surtensions internes.

— Il est nécessaire d'établir plus tard certaines échelles pour les niveaux d'isolation des differents outillages des stations, comme fonction du niveau d'isolation du transformateur, respectivement vis-à-vis du niveau de protection.

— Le choix du niveau d'isolation doit être fait en considérant le caractère aléatoire des phénomènes qui déterminent la valeur de cette grandeur. Pour cela il est nécèssaire de faire un plus riche récueil des données sur les caractéristiques des surtensions internes et atmosphériques, des tensions de contournement et de percement etc.

— Pour un choix plus rationnel des niveaux d'isolation il est nécessaire de déterminer avec une plus grande précision l'influence des coefficients de correction pour les essais de laboratoire p. ex.: l'influence de la fréquence de la tension d'essai, ayant en vue la différence entre la fréquence des surtensions et celle de la tension d'essai, l'influence de la pollution de l'isolation etc.

La chaire des centrales électriques
Institut polytechnique de Bucarest

BIBLIOGRAFIE

1. *V. V. Burgsdorf:* Voprosî zaşcitî ot perenapreajenii i koordinaţii izoleaţii v S.U.A. CEI Moscova-Leningrad 1960.
2. * * * VDE 0111/2.61. Leitsätze für die Bemessung und Prüfung der Isolation elektrischer Anlagen für Wechselspannungen von 1 KV und darüber.
3. * * * Stas 6489-61. Coordonarea izolaţiei. Nivele de izolaţie şi de protecţie.
4. * * * CEI. Recommandations pour la coordination de l'isolement. Publication 71. 1960.

5. * * * Gost. 1516-60. Transformatoare, aparate și izolatori de înaltă tensiune. Norme și metode de încercare a rigidității dielectrice a izolației. Moscova 1960. Traducere București.

6. * * * SEV. 183. Règles et recommandations pour la coordination de l'isolement des installations à courant alternatif à haute tension. Bull. ASE tome 47 (1956) No. 20, p. 941—951.

7. * * * B. S. 77 1958. Voltages for a.c. transmission and distribution Systems.

8. *A. Hochrainer:* Probleme der Hochspannungstechnik ETZ-A. Vol. 84 (1963) H. 7, p, 225.

9. *P. Ailleret:* Le choix du nouvel et peut-être dernier échelon de tension en courant alternatif 700—765/765 kV. RGE 1962 decembre p. 531.

10. * * * CEI Comité d'études No. 28. Coordination de l'isolement. Documents CEI RM 722/CE 28 octobre 1962.

11. * * * Collectif des hautes tensions de l'Institut d'énergétique de l'Academie de R.P.R. Documents CEI 28 (Bucarest) 2. juin 1962. Comité technique No. 28. Coordination de l'isolement.

12. *A. Avramescu; G. Drăgan; I. Adămuț; B. Popa:* Izolația stațiilor de înaltă tensiune în lumina normelor naționale, a recomandărilor CEI și a unor experimentări pe izolatoare fabricate în R.P.R. Electrotehnica 1962 nr. 9, p. 335—347.

13. *H. Baatz:* Isolationskooordination ETZ-A 1962 H. 17, p.. 567.

14. *I. Sirotinski:* Tehnika vîsokih napreajenia. Vol. II. Moskva 1962.

15. *N. Tanaka:* Etude et exploitation du réseau de transport T.H.T. autour de la région metropolitaine de Tokyo. CIGRE 1962. Rap. 408.

16. *P. Laurent et M. Monnet:* Rapport sur les mesures de manoeuvre effectuées dans divers pays sur les réseaux à haute tension. CIGRE 1962, Rap. 410 Anexe I.

17. * * * CEI. Recommandation pour la coordination de l'isolement 1958.

18. *A. C. Monteith; H. R. Vaughen, A. A. Johnson:* Insulation Coordination Electrical Transmission and distribution reference book 1950 chapter 18 p. 620.

19. * * * C.S.N. 380810. Smernice pro pouzite ochron pred prepetim v. silovychs zarizenich. 1—10—1959. Tchecoslovaquie.

20. * * * CEI. Publication 99—1. Parafoudres Première partie. Parafoudres à résistance variable. Genève 1958.

21. * * * Gost. 8934-58. Razreadniki. Moscova 1959.

22. *G. Jancke:* Normalisation internationale des tensions des réseaux de transport à très haute tension CIGRE 1962 Rap. 419/1.

23. *J. M. Clayton:* Basic parameters in determining insultation requirements of transmission lines. AIEE Power app. 1962 Août p. 259.

24. * * * CEI. Supplement à la publication 71 Recommandations pour la coordination de l'isolement. Guide d'application 1962 Genève.

25. * * * Stas 1703-60. Transformatoare de putere trifazate în ulei. Condiții generale.

26. * * * Stas 6272-60. Izolatori de porțelan pentru linii electrice aeriene. Condiții generale.

27. * * * B.S. 3297/1960. Specification for high voltage post insulators.

28. * * * NFC 66-130 fevrier 1959. Isolateurs en porcelaine pour tensions superieures ou égales à 1000 volts. Régles.

29. *E. Bagala:* Il coordinamento dell'isolamento nei nuovi impianti a 220 e 130 kV della Edison Volta. L'elettrotecnica 1962 ottobre No. 10 p. 731.

30. * * * Langlois Berthelot Problèmes d'isolation et de coordination des isolements. BSFE 1951 no. 8 août p. 419.

31. *I. S. Cliff:* The coordination of insulation of high voltage electrical insulation. Proc. IE 1954. Vol. 101. Part I no. 128 march p. 39—56.

32. *T. Horvath; G. A. Nagy:* Méthodes et résultats experimentaux en Hongrie concernant les essais à pied-d'oeuvre du niveau d'isolement de sous-stations. CIGRE 1962. Rap. 416.

33. *W. Casson:* Le comportement en exploitation des lignes de tensions supérieures à 222 kV CIGRE 1962 Rap. 419-2.

34. *Booth, Clark, Egginton ans Forrest:* The 400 guid system for England and Wales. Proc. IEE 1962. nr. 6 decembre, p. 509.

35. *R. Gert:* Prinzipien der Koordination der Isolation von Hochspannungsnetzen mit besonderer Berücksichtigung von inneren Überspannungen Energietechsnik 1963, 13 Heft 10, Oktober p. 451—459.

36. *Fleck, Batho:* Wesentliche-und Isolationsvorschriften der neuen Errichtungsbestimmungen VDE 0101/7.60 ETZ-A 1962, H 6.S.174-178.

37. * * * B.S. 171-1959. Power transformers.

38. *M. M. Monnet:* Conditions à imposer aux parafoudres pour qu'ils protegent le material contre les surtensions internes BSFF 1960 nr. 8 p. 547—558.

39. *K. Berger:* Uberspannungen und Uberspannungsschutz. Bul. ASE t. 48 (1957) No. 10, p. 465—474.

40. *G. Drăgan; B. Popa; I. Adămuț:* Cercetări experimentale privind determinarea tensiunilor de conturnare a lanțurilor de izolatoare IC4. Stud. Cerc. energ. XI (1961) nr. 2 p. 354—375.

41. *G. Drăgan; B. Popa:* Incercarea izolatoarelor electrice de fabricație romînească pentru liniile de 10—35 kV. Electrotehnica V, 5, 139—147 (1959).

42. *I. Adămuț; G. Drăgan:* Cercetări privind stabilirea nivelului de izolație a barelor din stațiile și posturile de transformare de tip interior. Stud. Cerc. Energ. Seria A, 1962, nr. 2 p. 269.

43. *V. Burgsdorf, N. N. Beliacov:* Perevod linii electroperedaci na bolee vîsocoe nominalnoe napreajenie bez usilenia izoleații. Electricestvo 1959, nr. 2, p. 1.

44. *J. W. Simpson et V. E. Ogorodnikov:* Conversion des lignes à 115 kV en lignes à 230 kV, et exploitation ulterieure de ces dernières sous des tensions atteignant 262 kV CIGRE 1958 Rap. 407.

45. *D. E. Arteniev; N. N. Beliakov; V. V. Burgsdorf et autres:* Niveau des surtensions des manoeuvre dans les réseaux à 110—220 kV. CIGRE 1962 Rap. 406.

46. *R. Gert; J. Jirku; V. Kalousek et Vyskocil:* Etude statistique des surtensions avec incidence sur la coordination de l'isolation entre phases et la rigidité électrique vi-sà-vis des surtension internes CIGRE 1962 Rap. 415.

47. * * * Recommandations pour la coordination, le dimensionnement et l'essai de l'isolement des lignes aériennes à haute tension. Bull ASE 1959 nr. 20 p. 988.

48. *N. G. Alexandrov:* Metodica vîbora izoleatii linii elektroperedaci pri uslovii nadejnoi rabotî pri vozdeistvii vnutrenîh perenapreajenii. Iz VVZ Energetika 1962 nr. 7.

49. *L. P. Bellaschi; B. L. Redemacher:* Dielectric strength of station and line insulation to swtching surges. AIEE Trans., 1946, p. 1047.

50. *W. Wanger; W. Huber:* La sention disruptive d'isolateurs et d'éclateurs dans le domaine compris entre l'essai sous onde de choc et l'essai à la frequence industrielle. Revue BBC XXVII 1940, No. 12, p. 231.

51. *Ph. Sporn; T. J. Nagel; W. S. Price:* Transport de l'energie electrique aux Etats-Unis. Prévisions pour l'an 2000. CIGRE 1964. Rap. 412.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC BUCUREȘTI
Tomul XXVI — 1964, Fascicola 6

TERMOTEHNICĂ

FORSCHUNGSMITTEILUNGEN DES LEHRSTUHLES
„TERMOTEHNICA ȘI MAȘINI TERMICE"

II

C.Z.: 536.7

THERMODYNAMISCHE ZUSTANDSÄNDERUNGEN DIE MIT ENDLICHER KONSTANTER GESCHWINDIGKEIT VERLAUFEN

L. STOICESCU S. PETRESCU

In der vorliegenden Arbeit wollen wir folgende mit endlicher konstanter Geschwindigkeit verlaufenden Zustandsänderungen untersuchen: Adiabate, Polytrope, Isotherme und Isobare, indem wir den neuen dazu entsprechenden Ausdruck * für den ersten Grundsatz benützen:

$$dQ = dU + A\,p_{med}\left(1 \pm \frac{a\,w}{c_{med}}\right) dV, \quad \text{(siehe Gl. 48)*} \quad (1)$$

worin

$$dU = G\,c_v\,dT_{med}.$$

Um die vielen Kennzeichen zu vermeiden, bezeichnen wir T, p, c und verstehen darunter mittlere Temperatur, mittleren Druck und mittlere, molekulare Geschwindigkeit (siehe Paragraph 2. c.)*

1. Adiabate mit endlicher Geschwindigkeit

1.1. *Die im Wege des ersten Grundsatzes abgeleitete Gleichung der Adiabate.*

Da für die Adiabate $dQ = 0$, so wird nach (1):

$$dU + A\,p\left(1 \pm \frac{a\,w}{c}\right) dV = 0. \quad (2)$$

Für ideale Gase:

$$dU = G\,c_v\,dT \quad \text{und} \quad p = \frac{GRT}{V};$$

* Siehe: L. Stoicescu und S. Petrescu — Der erste Grundsatz der Thermodynamik für technische Prozesse, welche mit endlicher Geschwindigkeit und ohne Strömung verlaufen. Buletinul Institutului politehnic București Tom XXVI fasc. 5/1964.

somit

$$\frac{c_v\, dT}{T} + AR\left(1 \pm \frac{a\,w}{c}\right)\frac{dV}{V} = 0 \tag{3}$$

oder, nach geringer Umformung:

$$\frac{dT}{T} = -(k-1)\left(1 \pm \frac{a\,w}{c}\right)\frac{dV}{V}. \tag{4}$$

Aus der molekularen Kinetik, ist

$$c = \sqrt{\frac{3\,K\,T}{m}}, \tag{5}$$

worin K = Boltzmannsche Konstante und m = die Masse der Gasmolekel. Die Geschwindigkeit w kann entweder konstant oder veränderlich angenommen werden. Der letzte Fall bildet Gegenstand einer nächsten Arbeit.

Wenn also in (4) w = konst und c nach (5) eingeführt werden, erhält man die Differentialgleichung

$$\frac{dT}{T\left(1 \pm \frac{a\,w}{\sqrt{3\,K\,T/m}}\right)} = -(k-1)\frac{dV}{V} \quad \text{worin} \quad k-1 = \frac{AR}{c_v}. \tag{6}$$

a. *Die Adiabate der Verdichtung.*

Für eine adiabate Verdichtung von V_1 zu einem Volumen $V_2 < V_1$, bei konstanter Kolbengeschwindigkeit (w), gilt Gleichung (6) mit dem Zeichen +, also:

$$\frac{dT}{T\left(1 + \frac{a\,w}{\sqrt{\frac{3\,K\,T}{m}}}\right)} = -(k-1)\frac{dV}{V}. \tag{7}$$

Bezeichnen wir

$$B = \frac{a\,w}{\sqrt{\frac{3\,K}{m}}} \tag{8}$$

und so kann man schreiben

$$\frac{dT}{T\left(1 + B\,T^{-\frac{1}{2}}\right)} = -(k-1)\frac{dV}{V}. \tag{9}$$

Bezeichnen wir noch:

$$T^{-\frac{1}{2}} = x, \quad \text{also} \quad x^{-2} = T \quad \text{und} \quad dT = -2\,x^{-3}\,dx. \tag{10}$$

Damit kann (9)

$$\frac{-2x^{-3}\,dx}{x^{-2}(1+Bx)} = -(k-1)\frac{dV}{V} \tag{11}$$

oder

$$\frac{-2\,dx}{x(1+Bx)} = -(k-1)\frac{dV}{V} \tag{12}$$

geschrieben werden.
Die linke Seite wird in einfache Brüche zerlegt:

$$\frac{-2}{x(1+Bx)} = \frac{D}{x} + \frac{E}{1+Bx} = \frac{D+x(DB+E)}{x(1+Bx)}. \tag{13}$$

Durch Identifizierung:

$$\left.\begin{aligned} -2 &= D + x(DB+E) \\ D &= -2 \\ DB+E &= 0 \\ E &= 2B\,. \end{aligned}\right\} \tag{14}$$

Es ergibt sich

$$\frac{-2}{x(1+Bx)} = -\frac{2}{x} + \frac{2B}{1+Bx}. \tag{15}$$

Somit, Gleichung (12) wird:

$$\frac{-2\,dx}{x} + \frac{2B\,dx}{1+Bx} = -(k-1)\frac{dV}{V}, \tag{16}$$

also auch

$$\int_1^2 \frac{2\,dx}{x} + 2B\int_1^2 \frac{dx}{1+Bx} = -(k-1)\int_1^2 \frac{dV}{V} \tag{17}$$

$$\left| -2\ln x + 2\ln y \right|_1^2 = \left| -(k-1)\ln V \right|_1^2, \tag{18}$$

worin

$$1+Bx = y\,; \quad B\,dx = dy\,; \quad \int \frac{2\,dy}{y} = 2\ln y\,. \tag{19}$$

Gleichung (18) kann auch

$$\left| \ln \frac{y^2}{x^2} \right|_1^2 = -\left| \ln V^{k-1} \right|_1^2$$

geschrieben werden, und, auf die Veränderliche x (nach 19) zurückkommend,

$$\left| \ln \left(\frac{1+Bx}{x}\right)^2 \right|_1^2 = -\left| \ln V^{k-1} \right|_1^2.$$

Indem man die Bezeichnungen (10) benützt, kommt man in der Folge auf die Veränderliche T zurück:

$$\left| \ln \left(\frac{1 + B T^{-\frac{1}{2}}}{T^{-\frac{1}{2}}} \right)^2 \right|_1^2 = - \left| \ln V^{k-1} \right|_1^2 ,$$

$$\ln \frac{T_1 \left(1 + \frac{B}{\sqrt{T_1}}\right)^2}{T_2 \left(1 + \frac{B}{\sqrt{T_2}}\right)^2} = \ln \left(\frac{V_2}{V_1} \right)^{k-1} , \tag{20}$$

und nach (8)

$$\frac{T_1}{T_2} \left(\frac{1 + \frac{a w}{\sqrt{\frac{3 K T_1}{m}}}}{1 + \frac{a w}{\sqrt{\frac{3 K T_2}{m}}}} \right)^2 = \left(\frac{V_2}{V_1} \right)^{k-1} . \tag{21}$$

Da aber

$$c = \sqrt{\frac{3 K T}{m}} ,$$

so ist die für die mit endlicher, konstanter Geschwindigkeit verlaufende Verdichtung geltende Adiabate:

$$\frac{T_1}{T_2} \left(\frac{1 + \frac{a w}{c_1}}{1 + \frac{a w}{c_2}} \right)^2 = \left(\frac{V_2}{V_1} \right)^{k-1} . \tag{22}$$

b. *Die Adiabate der Ausdehnung.*

Diese unterscheidet sich dadurch von der Verdichtungsadiabate, dass es in der rechten Seite der Gleichung (1), — statt + auftritt. Demgemäss, die folgenden Berechnungen sind den obigen identisch. Indem man von

$$\frac{d T}{T \left(1 - \frac{a w}{\sqrt{\frac{3 K T}{m}}}\right)} = - (k - 1) \frac{d V}{V} \tag{23}$$

ausgeht, erhält man analogisch:

$$\frac{-2\,dx}{x(1-Bx)} = -(k-1)\frac{dV}{V}, \tag{24}$$

$$\frac{-2}{x(1-Bx)} = \frac{D}{x} + \frac{E}{1-Bx} = \frac{D + x(E-DB)}{x(1-Bx)}, \tag{25}$$

$$-2 = D + x(E-DB) \; ; \quad E - DB = 0,$$

$$D = -2 \; ; \quad E = DB = -2B,$$

$$\frac{-2}{x(1-Bx)} = -\frac{2}{x} - \frac{2B}{1-Bx}. \tag{26}$$

Mit Rücksicht auf (24):

$$-2\int_1^2 \frac{dx}{x} - 2\int_1^2 \frac{B\,dx}{1-Bx} = -(k-1)\int_1^2 \frac{dV}{V} \tag{27}$$

Da

$$\left| -2\ln x + 2\ln y \right|_1^2 = -\left| \ln V^{k-1} \right|_1^2 \tag{28}$$

$$y = 1 - Bx \; ; \quad B\,dx = -dy$$

$$\int_1^2 \frac{B\,dx}{1-Bx} = -\int_1^2 \frac{dy}{y} = -\left| \ln y \right|_1^2$$

$$\left| 2\ln \frac{y}{x} \right|_1^2 = \ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right)^{k-1}. \tag{29}$$

Das führt uns, wie im Falle der Verdichtung, zu

$$\frac{T_1}{T_2}\left(\frac{1-\frac{aw}{c_1}}{1-\frac{aw}{c_2}}\right)^2 = \left(\frac{V_2}{V_1}\right)^{k-1}. \tag{30}$$

1.2. *Die Ermittlung der Adiabate auf Grund von molekularkinetischen Betrachtungen.*

Man kann die Interaktion Kolben-Gas aus molekular-kintetischem Standpunkt derart betrachten, dass die Gleichung der Adiabate hergeleitet werden kann, ohne den Ausdruck des ersten Grundsatzes in Anspruch zu nehmen.

Durch eine molekular-kinetische Beweisführung wird die Adiabate sehr intuitiv. Dabei wird auch der Einfluss der Kolbengeschwindigkeit auf deren Verlauf hervorgehoben.

In einem von einem Kolben dicht verschlossenen Zylinder, der adiabat isoliert ist, befindet sich ein Gas, dessen Moleküle einatomig sind. Der Kolben bewege sich reibungslos im Verdichtungssinne, mit der Geschwindigkeit (w). In der Folge, wollen wir die Interaktion Kolben-Gas in denselben Voraussetzungen untersuchen, wie unter (2.1.a)* geschah, und zwar :

— die Relaxationszeit = 0, d.h. die Gasmasse befindet sich ständig im thermodynamischen Gleichgewicht ;
— Gleichverteilung der Energie auf die drei Freiheitsgrade wird angenommen ; auf jeden der drei Freiheitsgrade entfallen $\frac{N}{3}$ Molekeln, deren mittlere Geschwindigkeit (c) ist ;
— Die Beziehung

$$E_c = \frac{3}{2} KNT = N \frac{mc^2}{2} \tag{31}$$

wird angenommen. Darin

K = Boltzmannsche Konstante
N = Gesamtzahl der Molekeln im Zylinderraum ;
m = Masse einer Gasmolekel
c = mittlere Molekelngeschwindigkeit
E_c = kinetische Energie der Translationsbewegung der N-Molekeln, die, bei einatomigen Molekeln, der inneren Energie des Gases gleich ist.

Bei der adiabaten Gasverdichtung ist die Zunahme seiner inneren Energie, und damit auch seiner Temperatur, der Interaktion Kolben-Gas

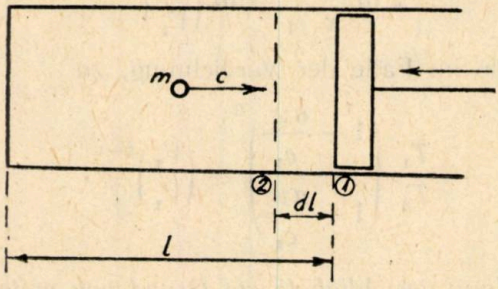


Fig. 1

zu verdanken. *Die hauptsächliche Interaktion geschieht nach der Zylinderachse,* d.h. in der Bewegungsrichtung des Kolbens, wo N/3 Molekeln ihre Translationsbewegung ausführen, wobei sie sich alle ähnlich verhalten. Unter solchen Bedingungen ist es hinreichend, wenn wir nur die Interak-

* Siehe L. Stoicescu und S. Petrescu — „Buletinul Politehnicei Bucureşti" 1964, Nr. 5.

tion Kolben-Gas einer einzigen dieser Molekeln untersuchen, und dann das Ergebnis auf die übrigen ($N/3$) erweitern. Aus diesem Grunde haben wir in Abb. 1 nur eine Molekel betrachtet.

Auf dem unendlich kleinen Weg (dl), soll n_c die Zahl der Zusammenstösse des Kolbens mit der Molekel sein. Mit jedem Stoss gibt der Kolben einen Teil seiner Energie der Molekel ab wobei die Molekelenergie eine Zunahme erfährt. Sind $N/3$ Molekeln vorhanden, die in axialer Interaktion mit dem Kolben stehen, so ist die an sie abgegebene Energie $N/3$-mal grösser. Diese Energiezunahme verteilt sich, dem Gleichverteilungsgesetz gemäss, gleichmässig auf sämtliche sich im Zylinderraum befindlichen N-Molekeln. Die Folge davon ist eine Temperaturerhöhung des Gases von T_1 auf T_2.

Nun wollen wir die Differentialgleichung aufstellen, die diesem Prozess zugrunde liegt.

Bezeichnen wir:

ΔE_{1c} = die Änderung der kinetischen Energie einer Molekel, die einem einzigen Zusammenstoss entspricht;

dE_{nc} = dasselbe wie oben für n_c Zusammenstösse, auf dem Wege dl;

dE = die Änderung der kinetischen Energie für $N/3$ Molekeln;

n_c = die Zahl der in der Zeit (dt) erfolgten Zusammenstösse;

dt = die Zeit, die den Kolbenweg (dl) kennzeichnet.

Bei einer Kolbengeschwindigkeit (w) wird der Weg (dl) in der Zeit

$$dt = \frac{dl}{w}$$

zurückgelegt. Die für einen Zusammenstoss nötige Zeit ist $2l/(c+w)$ Sekunden. Somit wird die Zahl (n_c) der in dt Sekunden stattfindenden Zusammenstösse

$$n_c = \frac{dt}{\frac{2l}{c+w}} = \frac{\frac{dl}{w}}{\frac{2l}{c+w}} . \tag{32}$$

Beim Anprall, besitzt die Molekel (Abb. 1) die relative Geschwindigkeit $(c+w)$ und nach dem Anprall $-(c+w)$. Die absolute Geschwindigkeit nach dem Anprall ist also $-(c+w)-w = -(c+2w)$. Da die absolute Molekelgeschwindigkeit vor dem Anprall (c) ist, so tritt nach dem Anprall, eine Energieänderung:

$$\Delta E_{1c} = \frac{m(c+2w)^2}{2} - \frac{mc^2}{2} = 2mc^2\left(\frac{w}{c} + \frac{w^2}{c^2}\right). \tag{33}$$

Damit steigt die Energiezunahme einer Molekel nach n_c Zusammenstössen auf

$$dE_{nc} = n_c \Delta E_{1c}$$

oder, nach (32):

$$dE_{nc} = \frac{\frac{dl}{w}}{\frac{2l}{c+w}} 2mc^2 \left(\frac{w}{c} + \frac{w^2}{c^2}\right) = \frac{dl}{l} mc^2 \left(1 + \frac{w}{c}\right)^2.$$

Wenn S = Zylinderquerschnitt, und wenn $lS = V$ gleich dem der augenblicklichen Kolbenstellung entsprechenden Gasraum, erhalten wir, nach geringer Umformung (da $Sdl = dV$):

$$dE_{nc} = mc^2 \left(1 + \frac{w}{c}\right)^2 \frac{dV}{V}. \tag{34}$$

Befinden sich aber in dem Volumen (V) $\frac{N}{3}$ einatomige Molekeln, die auf dem Wege dl in Interaktion mit dem Kolben stehen, so ist die von der Verschiebebewegung verursachte Energiezunahme der Gasmasse:

$$dE = \frac{N}{3} mc^2 \left(1 + \frac{w}{c}\right)^2 \frac{dV}{V}. \tag{35}$$

Bei einatomigen Molekeln ist diese Energieänderung, die sogenannte translatorische Bewegungsenergie, der alleinige Energieinhalt und daher identisch mit der inneren Energie.

Mit Hilfe von (31) können wir die in (35) angegebene Änderung der inneren Energie (dE) als Funktion von der Temperatur ausdrücken, wobei sich die Differentialgleichung der Adiabate im TV-Koordinatensystem ergibt. Also

$$dE = \frac{3}{2} KN\,dT \tag{36}$$

und, da nach 31

$$\frac{N}{3} mc^2 = KNT, \tag{37}$$

so kann die Gleichung (35) geschrieben werden:

$$\frac{3}{2} KN\,dT = KNT \left(1 + \frac{w}{c}\right)^2 \frac{dV}{V},$$

woraus

$$\frac{dT}{T} = \frac{2}{3} \left(1 + \frac{w}{c}\right)^2 \frac{dV}{V}. \tag{38}$$

Beim Verdichten ist aber dV negativ und dT positiv; so muss man (38) wie folgt:

$$\frac{dT}{T} = -\frac{2}{3}\left(1+\frac{w}{c}\right)^2 \frac{dV}{V} \tag{39}$$

schreiben.

Da aber

$$\frac{2}{3} = 0{,}66 = 1{,}66 - 1 = k - 1$$

ist, worin k = adiabater Exponent für einatomige Molekeln = 1,66, so erhält man schliesslich die Gleichung

$$\frac{dT}{T} = -(k-1)\left(1+\frac{w}{c}\right)^2 \frac{dV}{V} \tag{40}$$

die mit (4) identisch ist. Wie wir wissen, (4) wurde aber aus dem ersten Grundsatz für *thermodynamische Vorgänge mit endlicher Geschwindigkeit hergeleitet* (siehe Paragraph 1.1.). Wir gelangten also auf Grund von reinen molekularen kinetischen Erwägungen zur Differentialgleichung der Adiabate und nebenbei auch zum genauen Wert von $k = 1{,}66$.

Auf Grund von ähnlichen Betrachtungen kann man die *Differentialgleichung der adiabaten Ausdehnung herleiten*, wobei wir

$$\frac{dT}{T} = -(k-1)\left(1-\frac{w}{c}\right)^2 \frac{dV}{V}$$

finden; wie man sieht, sie unterscheidet sich von (40) durch das Zeichen in der zweiten Klammer.

1.2a. *Differentialgleichung der mit endlicher Geschwindigkeit verlaufende Adiabate für Gase, deren Molekeln zwei oder mehratomig sind.*

Wie man weisst, kann die kinetische Gastheorie nicht nur die spezifischen Wärmen und ihr Verhalten deuten, sondern auch ihre Werte für alle Gase zahlenmässig berechnen. So gibt sie uns für einatomige Molekeln, die nur translatorische Bewegungen ausführen können,

$$\frac{mc_p}{mc_v} = \frac{4{,}967}{2{,}98} = 1{,}66 = k$$

an, was mit unseren Berechnungen bei normalen Temperaturen gut übereinstimmt $(1{,}66-1) = 0{,}66 = \frac{2}{3} = (k-1)$

Da *bei zweiatomigen Molekeln* zu den translatorischen Freiheitsgraden zwei Rotationsfreiheitsgrade hinzukommen, ändern sich (nach der kinetischen Gastheorie) die Molwärmen wie folgt:

$$\frac{mc_p}{mc_v} = \frac{6{,}957}{4{,}97} = 1{,}4 = k,$$

also $k-1 = 1{,}4-1 = 0{,}4 = \frac{2}{5}$. Infolgedessen, wenn zweiatomige Gase vorhanden sind, wird in Gleichung (39) statt $\frac{2}{3}$ der Wert $\frac{2}{5}$ eingesetzt.

Drei- oder mehratomige Molekeln, deren Atomanordnung unsymmetrisch ist, besitzen drei Rotationsfreiheitsgrade, die bei normalen Temperaturen zu einem Koeffizienten $\frac{1}{3}$ führen, der auch die Translationsbewegung in Betracht zieht. Bei hohen Temperaturen kommt noch die Oszillationsenergie hinzu, die mit der Temperatur stetig zunimmt.

Für grosse Temperaturbereiche muss dieser Koeffizient den Tabellen entnommen werden, indem man das Verhältnis mc_p/mc_v bildet und 1 in Abzug bringt.

Diese Verallgemeinerung kann auch rein molekular-kinetisch begründet werden, ohne dass wir uns auf die spezifischen Wärmen berufen. Dazu ist es angezeigt, statt der Gleichung (31), die nur für Gase mit einatomigen Molekeln gilt, uns der Gleichung der inneren Energie E_i zu bedienen, die eine Funktion von den Freiheitsgraden (f_{tr}, f_{rot}) der Molekeln (welche von der molekular-kinetischen Gastheorie angegeben werden) ist. Also

$$E_i = f_{tr}\,\frac{1}{2}\,KNT + f_{rot}\,\frac{1}{2}\,KNT\,,$$

worin die Freiheitsgrade der Oszillation nicht betrachtet werden, da normale Temperatur angenommen wird. Aus dieser Gleichung erhalten wir

$$dE = (f_{tr} + f_{rot})\,\frac{1}{2}\,KN\,dT \qquad (40\,a)$$

und nach 35:

$$(f_{tr} + f_{rot})\,\frac{1}{2}\,KN\,dT = \frac{N}{3}\,mc^2\left(1+\frac{w}{c}\right)^2\frac{dV}{V}.$$

Da die kinetische Energie der Translationsbewegung

$$E_{tr} = f_{tr}\,\frac{1}{2}\,KNT = \frac{1}{2}\,Nmc^2$$

ist, ergibt sich der Wert von Nmc^2

$$Nmc^2 = 2\,f_{tr}\,\frac{1}{2}\,KNT\,,$$

den wir in (40a) einsetzen und so gelangen wir zur folgenden Differentialgleichung der Adiabate mit endlicher Geschwindigkeit, für Gase mit zwei- oder mehratomigen Molekeln:

$$(f_{tr} + f_{roi})\,\frac{1}{2}\,KN\,dT = \frac{1}{3}\,2\,f_{tr}\,\frac{1}{2}\,KNT\left(1+\frac{w}{c}\right)^2\frac{dV}{V}$$

oder

$$\frac{dT}{T} = \frac{2}{3}\,\frac{f_{tr}}{f_{tr}+f_{rot}}\left(1+\frac{w}{c}\right)^2\frac{dV}{V}.$$

Da $f_{tr} = 3$, ergibt sich Gleichung

$$\frac{dT}{T} = \frac{2}{f_{tr}+f_{rot}}\left(1+\frac{w}{c}\right)^2\frac{dV}{V},$$

die mit (4) verglichen zu

$$k-1 = \frac{2}{f_{tr}+f_{rot}}$$

führt. Für Gase mit einatomigen Molekeln, $f_{rot} = 0$, und so finden wir wieder den weiter oben besprochenen Wert

$$k-1 = \frac{2}{3}, \quad k = 1{,}66.$$

Für Gase mit zweiatomigen Molekeln $f_{rot} = 2$, und

$$k-1 = \frac{2}{5}, \quad k = 1{,}4.$$

Für Gase mit drei- und mehratomigen Molekeln, bei linearer Atomanordnung, ist die Zahl der Rotationsgraden auch $f_{rot} = 2$, und also $k = 1{,}4$. Sind die Molekeln dreiatomig, oder mehratomig mit nichtlinearer Atomanordnung, $f_{rot} = 3$ und also:

$$k-1 = \frac{2}{6} \text{ und } k = 1{,}33.$$

1.3. *Andere Gleichungen der Adiabate, in integrierter Form.*

Bei Verdichten und Ausdehnen, unterscheiden sich die Adiabaten in den thermischen Maschinen, die mit endlicher Geschwindigkeit verlaufen, nur durch das Zeichen + bzw. —, und so kann man im allgemeinen

$$\frac{T_1}{T_2}\left(\frac{1 \pm \dfrac{aw}{c_1}}{1 \pm \dfrac{aw}{c_2}}\right)^2 = \left(\frac{V_2}{V_1}\right)^{k-1} \tag{41}$$

schreiben. Die Klammer wollen wir

$$\delta = \left(\frac{1 \pm \dfrac{aw}{c_1}}{1 \pm \dfrac{aw}{c_2}}\right)^2 \tag{42}$$

bezeichnen. Somit ist die allgemeine Gleichung der Adiabate

$$\frac{T_1}{T_2}\,\delta = \left(\frac{V_2}{V_1}\right)^{k-1}. \tag{42 a}$$

Für zwei (1,2) auf derselben Adiabate sich befindlichen Gaszustände, die durch p_1, V_1, T_1, G, R, bzw. p_2, V_2, T_2, G, R bestimmt sind, da

$$T_1 = \frac{p_1 V_1}{GR} \quad \text{und} \quad T_2 = \frac{p_2 V_2}{GR}, \tag{43}$$

ergibt sich

$$\frac{T_1}{T_2} = \frac{p_1 V_1}{p_2 V_2}$$

und nach (41):

$$\frac{p_1 V_1}{p_2 V_2}\,\delta = \left(\frac{V_2}{V_1}\right)^{k-1},$$

oder

$$\frac{p_1}{p_2}\,\delta = \left(\frac{V_2}{V_1}\right)^{k}, \tag{44}$$

wo, nach gegebenem Fall,

$$\delta = \delta_c = \left(\frac{1+\frac{aw}{c_1}}{1+\frac{aw}{c_2}}\right)^2 > 1, \text{ da } c_1 < c_2, \text{ und } \delta = \delta_a = \left(\frac{1-\frac{aw}{c_1}}{1-\frac{aw}{c_2}}\right)^2 > 1 \text{ da } c_1 > c_2.$$

Also (44) ist die allgemeine Gleichung der Adiabate in Funktion von P. V. Aus (43) und (44) erhält man, nach entsprechender Umformung:

$$\frac{T_1}{T_2}\,\delta = \left(\frac{T_2}{T_1}\cdot\frac{p_1}{p_2}\right)^{k-1}, \quad \text{woraus} \quad \frac{T_1}{T_2}\,\delta^{\frac{1}{k}} = \left(\frac{p_1}{p_2}\right)^{\frac{k-1}{k}}. \tag{44 a}$$

Das ist die allgemeine Gleichung der Adiabate als Funktion von T, P.

Indem wir T_2 als Funktion von T_1 aus 41 (worin $c_2 = \sqrt{3gRT_2}$), explizit ausdrücken, ergeben sich andere Formen der Adiabaten-Gleichung, und zwar:

für Ausdehnung mit endlichher Geschwindigkeit,

$$T_2 = T_1\left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{k-1}\left[\left(1-\frac{a\,w}{c_1}\right)+\frac{a\,w}{c_1}\left(\frac{V_2}{V_1}\right)^{\frac{k-1}{2}}\right]^2; \tag{44 b}$$

desgleichen für Verdichtung,

$$T_2 = T_1\left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{k-1}\left[\left(1+\frac{a\,w}{c_1}\right)-\frac{a\,w}{c_1}\left(\frac{V_2}{V_1}\right)^{\frac{k-1}{2}}\right]^2. \tag{44 c}$$

Aus (44b), für $aw = c_1$, findet man

$$T_2 = T_1,$$

d.h. der Prozess ist eine isotherme Adiabate. Zwischen 44 b, 44 c und 41 Vergleich ziehend, ergibt sich der Irreversibilität kumulierende Faktor der Adiabate (δ), in Abhängigkeit vom Anfangszustand und Endvolumen V_2:

$$\delta = \left[\left(1 \pm \frac{a\,w}{c_1}\right) \mp \frac{a\,w}{c_1}\left(\frac{V_2}{V_1}\right)^{\frac{k-1}{2}}\right]^2 \qquad (44\,d)$$

Damit kann man den genauen Wert von δ berechnen. Der sich aus (42) ergebende ist annähernd, da, anfangs, die mittlere Molekelngeschwindigkeit c_2, im Endzustand, unbekannt ist.

1.4. *Darstellung der Ausdehnungs- und Verdichtungsadiabaten mit endlicher Geschwindigkeit in pV-Diagramm.*

Kennzeichnend bei den mit endlicher Geschwindigkeit verlaufenden Prozessen ist, dass der mittlere Gasdruck während der K-Bewegung ständig kleinere Werte aufweist als der Kolbendruck. Die Gasdruckkurve 1—2 und die K-Druckkurve 1_p—2_p, Abb. 2, stimmen also nicht überein, und beide stimmen nicht mit der Druckkurve (1—2_t) überein, die einem adiabaten reversiblen Prozess entspricht.

Die Gleichung

$$\frac{p_1}{p_2}\,\delta = \left(\frac{V_2}{V_1}\right)^k \text{ worin } \delta = \left(\frac{1 \pm \dfrac{aw}{c_1}}{1 \pm \dfrac{aw}{c_2}}\right)^2$$

liefert den Gasdruck beim Verdichten (+) und beim Ausdehen mit (—).

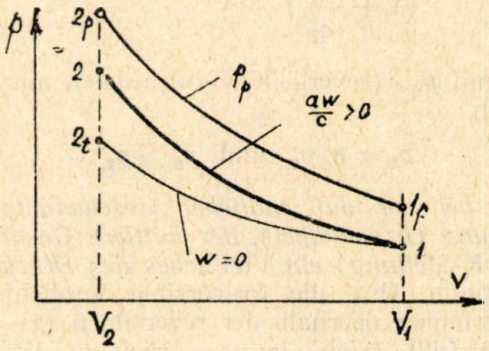


Fig. 2

Wie wir wissen, δ ergibt sich durch die Integration der Differentialgleichung der Adiabate 2 (siehe 1.1.).

Durch Vermittlung des augenblicklichen Faktors der Irreversibilitäts-Entstehung,

$$\delta_m = \left(1 \pm \frac{aw}{c}\right)$$

häuft δ, bei Integrierung, mit jedem Augenblick des Prozessverlaufes, die Irreversibilitäts-Effekte an, die der endlichen Geschwindigkeit der Prozessentwicklung zu verdanken sind, weswegen wir es Irreversibilität kumulierender Faktor der Adiabate benennen wollen.

Wenn man Reversibilität ($aw/c=0$) und Verdichtung voraussetzt,

$$\frac{p_1}{p_{2_t}} = \left(\frac{V_2}{V_1}\right)^k \tag{45}$$

stellt die Gleichung der adiabaten Verdichtung dar, deren Enddruck

$$p_{2_t} = p_1 \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^k \tag{45 a}$$

ist.

Im Irreversibilitätsfalle, d.h. die adiabate Verdichtung verläuft mit endlicher Gerschwindigkeit $\left(\frac{a\,w}{c} \neq 0\right)$, erhält man den *Gasenddruck* (p_2), aus

$$p_2 = \delta_c\, p_1 \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^k, \tag{45 b}$$

worin (für Kompression)

$$\delta_c = \left(\frac{1 + \frac{aw}{c_1}}{1 + \frac{aw}{c_2}}\right)^2 > 1, \quad \text{da} \quad c_2 > c_1. \tag{45 c}$$

Im Vergleich mit p_{2_t} (reversible Verdichtung), aus (45a) und wegen $\delta_c > 1$, ergibt sich

$$p_2 = \delta_c\, p_{2_t} \text{ und } p_2 > p_{2_t}.$$

Infolgedessen, *bei der mit endlicher Geschwindigkeit verlaufenden adiabaten Verdichtung (irreversibel), der mittlere Gasdruck ist jeden Augenblick (in jeder K-Stellung) ein Vielfaches des Druckes der reversiblen adiabaten Verdichtung.* Also, die irreversible Verdichtungsadiabate des Gases (1—2) liegt immer oberhalb der reversiblen (1—2_t), Abb.2.

Aus Gleichung (42) (siehe unsere Arbeit in Nr. 5—1964), jedem Gasdruck p (adiabate 1—2) entspricht ein Kolbendruck

$$p_p = p\left(1 + \frac{aw}{c}\right),$$

der durch Multiplizierung von p mit dem augenblicklichen Faktor der Irreversibilitäts-Entstehung

$$\delta_{mc} = \left(1 + \frac{aw}{c}\right)$$

erhalten wird.

Auf diese Weise erhält man die Kolbendruckkurve $1_p - 2_p$, (Abb. 2) indem man Punkt für Punkt die Ordinaten der irreversiblen Adiabate 1—2 mit δ_{mc} multipliziert. Der Wert von δ_{mc} ändert sich mit der Kolbenstellung, da c (mittlere Molekelngeschwindigkeit) einen Wert hat, der der mittleren Temperatur einer gegebenen K-Stellung entspricht.

Da bei Verdichtung $\delta_{mc} = (1 + aw/c) > 1$, so liegt die *Kolbendruk-kurve* $(1_p - 2_p)$ oberhalb der irreversiblen Adiabate (1—2), Abb. 2.

Wir betrachten jetzt eine adiabate Ausdehnung mit endlicher Geschwindigkeit, deren Anfangs- und Endzustand von den Zustandsgrössen p_{2_t}, V_2 im Punkt 2_t bzw. p_3, V_1 im Punkt 3 (Abb. 3) bestimmt sind. Ihre Gleichung liefert den Druck

$$p_3 = p_{2_t}\, \delta_a \left(\frac{V_{2_t}}{V_1}\right)^k,$$

worin

$$\delta_a = \left(\frac{1 - \dfrac{aw}{c_{2t}}}{1 - \dfrac{aw}{c_3}}\right)^2 > 1, \quad \text{da} \quad c_3 < c_{2t}.$$

Von demselben Anfangszustand (2_t) ausgehend, der Enddruck einer reversiblen adiabaten Ausdehnung $\left(\mathrm{d}\cdot\mathrm{h}\cdot\delta_a = 1, \dfrac{aw}{c} = 0\right)$ im Endzustand 1, ist

$$p_1 = p_{2_t} \left(\frac{V_{2_t}}{V_1}\right)^k,$$

also

$$p_1 < p_3.$$

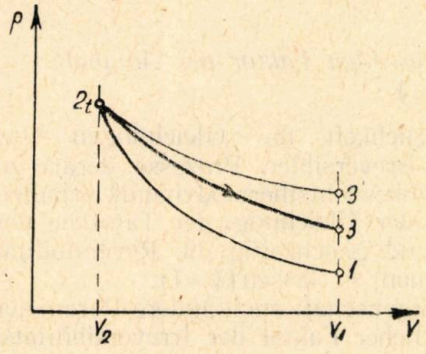


Fig. 3

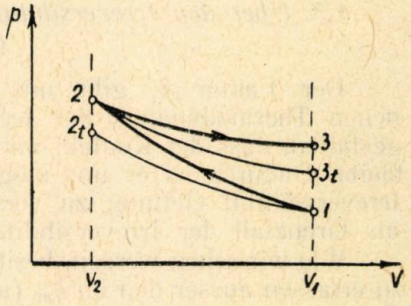


Fig. 4

Es steht also fest, dass auch bei der Ausdehnung die irreversible Adiabate (2_t—3), Abb. 3, oberhalb der reversiblen liegt (2_t—1), Abb. 3.

An der Grenze, wenn $aw = c$, erhält man eine Ausdehnung die zugleich Adiabate und Isotherme ist. Infolgedessen *alle mit endlicher Geschwindigkeit verlaufenden Adiabaten (also irreversibel) liegen* zwischen der reversiblen Adiabate (2_t—1) Abb. 3 und der Isotherme (2_t—3'), je nach dem sich die endliche Geschwindigkeit des Vorgangs zwischen $w = o$ und $w = \frac{c}{a}$ ändert.

Nun wollen wir die Zustandsänderungen eines Gases verfolgen, das in einem Zylinder zuerst irreversibel, nach der Adiabate 1—2 (Abb. 4), verdichtet und dann, auch irreversibel, nach der Adiabate 2—3 ausgedehnt wird. In beiden Fällen ist die Kolbengeschwindigkeit (d.h. die Geschwindigkeit des Vorgangs) dieselbe (w).

Bei der Besprechung der Abb. 2 und 3 stellten wir fest dass:

I. — Eine irreversible Verdichtungsadiabate 1—2 (Abb. 4) liegt oberhalb der reversiblen 1—2_t, die denselben Ausgangspunkt 1 hat.

II. Eine irreversible Ausdehnungsadiabate 2—3 (Abb. 4) liegt immer oberhalb der reversiblen 2—3_t, die denselben Ausgangspunkt hat.

Es ergibt sich die gegenseitige Lage in der p,V— Ebene der zwei irreversiblen Adiabaten 1—2 und 2—3, Abb. 4, und zwar:

Die irreversible Ausdehnungs — 2-3 liegt immer oberhalb der irreversiblen Verdichtungsadiabate 1—2, wenn sie im Sinne 1—2—3 durchlaufen werden.

Das führt zur Feststellung des Vorhandenseins eines Arbeit verbrauchenden Kreisprozesses 1—2—3—1 mit einem einzigen Wärmebehälter.

Wie wir noch sehen werden, die Existenz dieses Kreisprozesses bildet eine der Ursachen die dazu führt dass der thermische Wirkungsgrad der realen Kreisprozesse kleiner ist als derjenige der reversiblen.

Es ist hervorzuheben, dass jeder Punkt der pV-Ebene der Schneidepunkt einer irreversiblen Verdichtungs- mit einer irreversiblen Ausdehnungsadiabate ist. Die irreversiblen Verdichtungs- und Ausdehnungsadiabaten bilden zwei verschiedene Familien paralleler Kurven wenn ihre Entwicklungs-Geschwindigkeit dieselbe ist. Die zu derselben Familie gehörenden Kurven schneiden sich nicht.

1.5. *Über den Irreversibilität kumulierenden Faktor der Adiabate (δ_a und δ_c)*

Der Faktor δ, gibt uns die Möglichkeit, die Gleichungen einer neuen Thermodynamik der technischen irreversiblen Prozesse derart zu gestalten, dass der Kontakt mit der Gleichkewichtsthermodynamik erhalten bleibt. Dadurch ist es uns möglich, in jeder Gleichung, der Tatsache der Irreversibilität Geltung zu verschaffen und gleichzeitig die Reversibilität als Grenzfall der Irreversibilität erscheinen zu lassen ($\delta = 1$).

Wie wir sehen werden, besitzt δ die Eigenschaft auch andere Parameter zu erfassen ausser den im δ_m (augenblicklicher Faktor der Irreversibilitäts-Entstehung) enthaltenen und zwar: neben a, w, c kommt auch der

Verdichtungsgrad $\varepsilon = V_1/V_2$ und k dazu. Also die Irreversibilität der mit endlicher Geschwindigkeit durchlaufenen Adiabate hängt auch von ε und k ab.

Für Kompression kann der Ausdruck 42 wie folgt geschrieben werden:

$$\delta_c = \left(\frac{1+\frac{aw}{c_1}}{1+\frac{aw}{c_2}}\right)^2 \approx \left(1+2\frac{aw}{c_1}\right)\left(1-2\frac{aw}{c_2}\right) = 1+2\frac{aw}{c_1} - 2\frac{aw}{c_2} - 4\frac{a^2w^2}{c_1 c_2}.$$

Faktoren zweiter Potenz werden vernachlässigt, und so erhalten wir:

$$\delta_c = 1+2\frac{aw}{c_1}\left(1-\frac{c_1}{c_2}\right),$$

worin

$$\frac{c_1}{c_2} = \frac{\sqrt{\frac{3KT_1}{m}}}{\sqrt{\frac{3KT_2}{m}}} = \sqrt{\frac{T_1}{T_2}}.$$

Da

$$T_2 \approx T_1 \varepsilon^{k-1}, \quad \text{wo} \quad \varepsilon = \frac{V_1}{V_2} > 1,$$

es ergibt sich

$$\frac{c_1}{c_2} = \frac{1}{\varepsilon^{\frac{k-1}{2}}}$$

und also

$$\delta_c = 1+2\frac{aw}{\sqrt{\frac{3KT_1}{m}}}\left(1-\frac{1}{\varepsilon^{\frac{k-1}{2}}}\right) > 1. \qquad (46)$$

In der folgenden Tabelle, die nach oben gerichteten Pfeile zeigen Zunahme an und nach unten Abnahme. δ nimmt zu, wenn die Kolbengeschwindigkeit, der Verdichtungsgrad, der adiabate Exponent und die molekulare Masse zunehmen, oder wenn die Anfangstemperatur (T_1) abnimmt.

$\delta\uparrow$	$w\uparrow$	$\varepsilon\uparrow$	$k\uparrow$	$m\uparrow$	$T_1\downarrow$

Nach (42), für Ausdehnung, kann man schreiben:

$$\delta_a = \left(\frac{1-\frac{aw}{c_1}}{1-\frac{aw}{c_2}}\right)^2 \approx \left(1-2\frac{aw}{c_1}\right)\left(1+2\frac{aw}{c_2}\right) = 1-2\frac{aw}{c_1}+2\frac{aw}{c_2}-4\frac{a^2w^2}{c_1c_2}.$$

Indem man den Faktor zweiter Potenz vernachlässigt, ergibt sich:

$$\delta_a = 1+2\frac{aw}{c_2}\left(1-\frac{c_2}{c_1}\right),$$

worin

$$\frac{c_2}{c_1} = \frac{\sqrt{\frac{3K}{m}T_2}}{\sqrt{\frac{3K}{m}T_1}} = \sqrt{\frac{T_2}{T_1}}.$$

Da

$$T_2 \approx T_1\left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{k-1} = T_1\frac{1}{\varepsilon^{k-1}} \; ; \quad \varepsilon = \frac{V_2}{V_1} > 1,$$

erhalten wir

$$\frac{c_2}{c_1} = \frac{1}{\varepsilon^{\frac{k-1}{2}}}$$

und so erhalten wir den für die Ausdehnung entsprechenden Irreversibilität kumulierenden Faktor:

$$\delta_a = 1+2\frac{aw}{\sqrt{\frac{3KT_2}{m}}}\left(1-\frac{1}{\varepsilon^{\frac{k-1}{2}}}\right) > 1, \tag{47}$$

in Funktion von a, w, m, T_2, k und ε, das man als Ausdehnungsgrad auffassen könnte. Als Funktion von der Anfangstemperatur finden wir:

$$\delta_a = 1+2\frac{aw}{c_1}\left(\frac{c_1}{c_2}-1\right) = 1+\frac{2aw}{\sqrt{\frac{3KT_1}{m}}}\left(\varepsilon^{\frac{k-1}{2}}-1\right) > 1 \tag{48}$$

worin

$$\frac{c_1}{c_2} = \varepsilon^{\frac{k-1}{2}}.$$

Es wird festgestellt, dass auch $\delta_a > 1$ und, dass es sich, genau so wie δ_c, in Funktion von denselben Parametern ändert, wie obige Tabelle zeigt.

Da δ_c und δ_a immer grösser wie 1 sind, geht daraus hervor, dass der Druck und die Temperatur, sowohl bei der adiabaten Kompression wie auch Ausdehnung, die einer bestimmten Volumenänderung entsprechen, im Falle der Irreversibilität höher liegen als im Falle der Reversibilität.

1.6. *Die mechanische Arbeit der adiabaten irreversiblen Prozesse*

Wie wir in unserer vorangehenden Arbeit (siehe L. Stoicescu und S. Petrescu — Buletinul Politehnicii Bucureşti, 1964, Nr. 5), sahen, ist die elementare Arbeit der irreversiblen Prozesse:

$$dL = p_p\, dV = \left(1 \pm \frac{aw}{c}\right) p\, dV, \tag{49}$$

wo

p_p = Kolbendruck
p = Mitteldruck in der Gasmasse

In Gleichung 6, bezeichnen wir

$$\delta_m = \left(1 \pm \frac{aw}{c}\right);$$

so wird sie

$$\frac{dT}{T\delta_m} = -(k-1)\frac{dV}{V}$$

und daraus

$$dV = -\frac{V}{k-1}\frac{dT}{T\delta_m}.$$

Nach (49):

$$dL = -\frac{pV}{k-1}\frac{dT}{T}, \tag{50}$$

also scheinbar unabhängig von dem Faktor δ_m. Dem Zustandsgesetze ($pV = GRT$) entsprechend, ist die adiabate elementare Arbeit

$$dL = -\frac{1}{k-1} GR\, dT = -\frac{dU}{A}. \tag{51}$$

Das macht klar warum die Gleichung der adiabaten Arbeit unabhängig von der Irreversibilitätskorrektur erscheint. Dieser wird nur von der Temperatur Rechnung getragen, da die adiabate Arbeit, gleichviel ob Reversibilität oder Irreversibilität, der Änderung der inneren Energie gleich ist, die nur von der Temperatur abhängt. Es ist nun selbstverständlich, dass die Temperatur aus (41) oder (45) zu berechnen ist, wo die Irreversibilität durch δ zum Vorschein tritt.

Durch Integration liefert Gleichung (51) die Berechnungsformel der adiabaten irreversiblen Arbeit:

$$L_{1-2} = \frac{GR}{k-1}(T_1 - T_2). \tag{52}$$

Dem Anschein nach, ist (52) identisch mit der Arbeitsformel für die reversible Arbeit. Es gibt aber einen grundsätzlichen Unterschied, der darin besteht, dass T_2 aus (41) oder (45), welche für irreversible Prozesse gelten, zu berechnen ist. *Die mechanische Arbeit ist durch Vermittlung der Temperatur des Endzustandes doch eine Funktion von dem Faktor* δ.

Die Arbeit einer reversiblen und irreversiblen adiabaten Verdichtung.

Obiger Unterschied soll an einem Beispiel erläutert werden, indem wir in Abb. 5 zwei adiabate Verdichtungen betrachten. Das Anfang-und Endvolumen sind für beide V_1 bzw. V_2. 1—2 stellt die irreversible adiabate Verdichtung ($w > 0$) und $1—2_t$ die reversible dar ($w=0$). Wie wir wissen, die irreversible liegt oberhalb der reversiblen. Die Arbeit dieser letzten wird von der Fläche $1'12_t2'$ dargestellt. Wir müssen die Frage beantworten: *welche ist die Arbeitsfläche, die die irreversible Verdichtung darstellt?*

Der differentiale Ausdruck der irreversiblen Arbeit ist

$$dL = p\left(1 + \frac{aw}{c}\right) dV, \tag{53}$$

worin *p=mittlerer für jede augenblickliche K-Stellung gültige Gasdruck* (in der Gasmasse), der sich also mit dem Volumen nach einer diesem Wert p entsprechenden Gasdruckkurve ändert, die 1 als Ausgangspunkt hat.

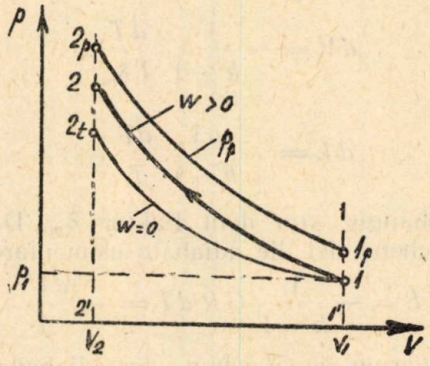


Fig. 5

In jeder Kolbenstellung aber wirkt auf der Kolbenfläche, vom Anfangszustand an, ein *mittlerer Kolbendruck dessen Wert*

$$p_p = p\left(1 + \frac{aw}{c}\right), \text{ worin } \left(1 + \frac{aw}{c}\right) > 1$$

ist, und also der Ausgangspunkt der Kolbendruckkurve sprungweise auf 1_p geht. [Die Kurve des mittleren Kolbendruckes ($1_p - 2_p$) liegt immer oberhalb der Kurve des mittleren Gasdruckes (1—2)].

Die Arbeitsfläche, die der irreversiblen Verdichtung entspricht, ist also

$$\int_{i_p}^{2_p} dL = \int_{i_p}^{2_p} p_p \, dV = \underline{1' \, 1_p \, 2_p \, 2'}$$

Diese ist immer grösser wie $1'122'$ (Gasdruckkurve irreversibel) und um so grösser wie $1'12_t2'$ (Gasdruckkurve reversibel) Abb. 6. Zum selben Schluss kommt man auch auf analytischem Wege.

Zu diesem Zweck, schreiben wir die Verdichtungsarbeit von V_1 zu V_2 für beide Prozesse (reversibel und irreversibel):

$$\underset{w=0}{L_{12_t}} = \frac{GR}{k-1} (T_1 - T_{2_t}) \tag{55}$$

$$\underset{w>0}{L_{12}} = \frac{GR}{k-1} (T_1 - T_2). \tag{56}$$

Wie wir in (1.3) sahen:

$$T_2 = T_1 \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{k-1} \left(\frac{1 + \frac{aw}{c_1}}{1 + \frac{aw}{c_2}}\right)^2 \quad \text{und, mit } \delta = \left(\frac{1 + \frac{aw}{c_1}}{1 + \frac{aw}{c_2}}\right)^2, \tag{57}$$

ergibt sich

$$T_2 = T_{2_t} \delta, \quad \text{wo } \delta > 1. \tag{58}$$

Wir führen (58) in (56), wobei wir

$$\underset{w>0}{L_{12}} = \frac{GR}{k-1} (T_1 - T_{2_t} \delta). \tag{59}$$

erhalten.

Vergleich zwischen (59) und 55 ziehend, ergibt sich:

$$\left| \underset{w>0}{L_{12}} \right| > \left| \underset{w=0}{L_{12_t}} \right|$$

D. h.: *man kann die irreversible Verdichtungsarbeit zahlenmässig ausdrücken.* Für dieselbe Volumenänderung ist sie grösser wie die reversible (siehe Abb. 6), sowie der Enddruck $p_2 > p_{2_t}$.

Will man in beiden Fällen denselben Verdichtungsdruck $p_2 = p_2$ (Abb. 6) erreichen, so ist die bei der Irreversibilität (Adiabate 1—2) nötige Volumenänderung kleiner wie bei der Reversibilität (Adiabate $1—2_t$), d. h. $\overline{1'2''} < \overline{1'2'}$.

Geometrisch ist ein Vergleich der zwei Arbeitsflächen $1'122''$ und $1'12_t2'$ nicht möglich (wie aus Abb. 6 ersichtlich). So werden wir beide mit Hilfe von (52) berechnen. Mit Bezug auf Abb. 6:

$$\underset{w=0}{L_{12_t}} = \frac{1}{k-1} GR (T_1 - T_{2_t}) \tag{61}$$

und

$$\underset{w>0}{L_{12}} = \frac{1}{k-1} G R (T_1 - T_2) . \tag{62}$$

Da der Punkt 2_t sich auf der reversiblen Adiabate befindet, so ist:

$$T_{2_t} = T_1 \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{k-1}{k}} . \tag{63}$$

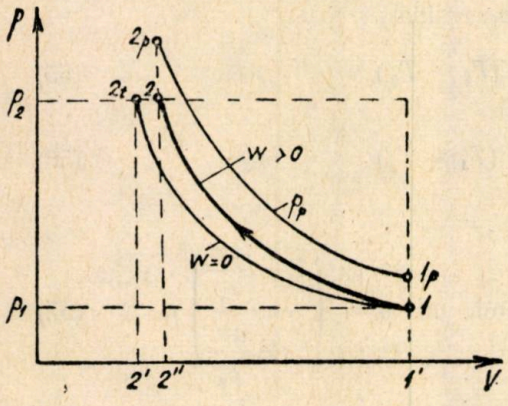


Fig. 6

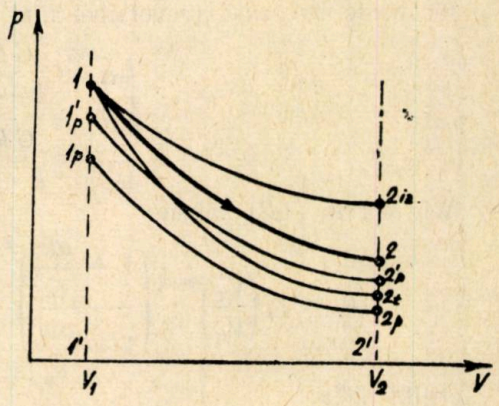


Fig. 7

Für T_2, auf der irrversiblen Adiabate, finden wir nach (45)

$$T_2 = T_1 \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{k-1}{k}} \cdot \delta^{\frac{1}{k}} \tag{64}$$

oder, mit (63)

$$T_2 = T_{2_t} \delta^{\frac{1}{k}} . \tag{65}$$

Es ergibt sich:

$$\underset{w>0}{L_{12}} = \frac{G R}{k-1} \left(T_1 - T_{2_t} \delta^{\frac{1}{k}}\right) , \quad \text{wo } \delta = \left(\frac{1 + \frac{a w}{c_1}}{1 + \frac{a w}{c_2}}\right)^2 > 1 , \tag{66}$$

und, durch Vergleich mit (61),

$$\left| \underset{w>0}{L_{12}} \right| > \left| \underset{w=0}{L_{12_t}} \right| . \tag{67}$$

b. *Die Arbeit einer reversiblen und irreversiblen adiabaten Ausdehnung*

Wir wollen nun den Unterschied zwischen der mechanischen Arbeit einer reversiblen und irreversiblen adiabaten Ausdehnung schildern.

In Abb. 7, stellen 1—2 eine adiabate irreversible Ausdehnung ($w=0$), ($1—2_t$) eine solche reversible ($w=0$) dar. Beide gehen von demselben Ausgangszustand aus (1) und haben gleiches Anfangs-und Endvolumen (V_1, V_2).

Der differentiale Ausdruck der irreversiblen adiabaten Arbeit für die Ausdehnung ist

$$dL = p\left(1 - \frac{aw}{c}\right) dV . \tag{68}$$

Darin p = mittlerer Gasdruck, während

$$p_p = p\left(1 - \frac{aw}{c}\right) \tag{69}$$

der mittlere Kolbendruck ist. Da $(1—aw/c) < 1$, so läuft die Kolbendruckkurve ($1_p - 2_p$) immer unterhalb der Gasdruckkurve (1—2).

Die Grösse der Arbeitsflächen der zwei Adiabaten, 1—2 und 1_p—2_p, kann für Vergleichszwecke nicht geschätzt werden, da es Situationen wie $1'_p$—$2'_p$ geben könnte. Da können nur Berechnungen massgebend sein. Also:

$$\underset{w=0}{L_{12_t}} = \text{Fläche } 1'\,12_t\,2' = \frac{GR}{k-1}\,(T_1 - T_{2_t}) \tag{70}$$

$$\underset{w>0}{L_{12}} = \text{Fläche } 1'\,1_p\,2_p\,2' = \frac{GR}{k-1}\,(T_1 - T_2) . \tag{71}$$

Nach (30), ist die irreversible Adiabate der Ausdehnung:

$$\frac{T_1}{T_2}\left(\frac{1 - \dfrac{aw}{c_1}}{1 - \dfrac{aw}{c_2}}\right)^2 = \left(\frac{V_2}{V_1}\right)^{k-1} ; \quad \delta = \left(\frac{1 - \dfrac{aw}{c_1}}{1 - \dfrac{aw}{c_2}}\right)^2 > 1 , \text{ da } c_2 < c_1 . \tag{72}$$

Aus (72), ergibt sich

$$T_2 = \delta T_1 \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{k-1} = \delta T_{2_t} . \tag{73}$$

Nach Einsetzung von T_2 in (71):

$$\underset{w>0}{L_{12}} = \frac{GR}{k-1}\,(T_1 - \delta T_{2_t}),$$

woraus

$$\underset{w>0}{L_{12}} < \underset{w=0}{L_{12_t}} \tag{74}$$

Es ergibt sich, dass, für dieselbe Volumenänderung, die adiabate irreversible Ausdehnungsarbeit kleiner ist als die reversible.

Wenn zwei adiabate Ausdehnungen, die vom selben Anfangszustand ausgehen und denselben Enddruk erreichen, ist die nötige Volumenän-

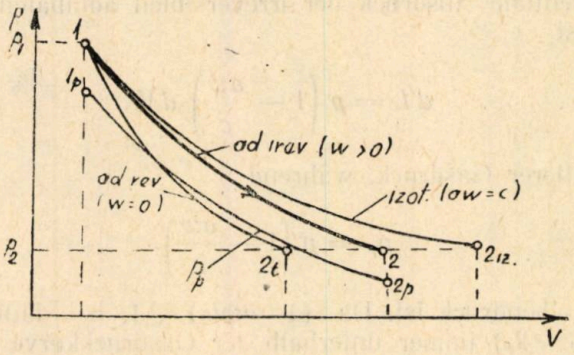


Fig. 8

derung kleiner bei Reversibiltät (Adiabate $1—2_t$) als bei Irreversibilität (Adiabate 1—2), Abb. 8. In dieser Abbildung, $1_p—2_p$ ist die Druckkurve bei Irreversibilität.

Zwecks Vergleichen, wollen wir die adiabate reversible (L_{12_t}) und irreversible Arbeit L_{12} berechnen :

$$\underset{w=0}{L_{12_t}} = \frac{GR}{k-1}(T_1 - T_{2_t}) = \text{Fläche } 1'122' \tag{75}$$

$$\underset{w>0}{L_2} = \frac{GR}{k-1}(T_1 - T_2) = \text{Fläche } 1'1_p 2_p 2'_p . \tag{76}$$

Wie in Abb. 8 ersichtlich, ein geometrischer Vergleich der zwei Flächen ist nicht massgebend.

Nach (45) ist

$$\frac{T_1}{T_2}\delta^{\frac{1}{k}} = \left(\frac{p_1}{p_2}\right)^{\frac{k-1}{k}}, \text{ wo } \delta = \left(\frac{1-\frac{aw}{c_1}}{1-\frac{aw}{c_2}}\right)^2 > 1 , \tag{77}$$

woraus

$$T_2 = T_1\left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{k-1}{k}} \cdot \delta^{\frac{1}{k}} = T_{2_t}\delta^{\frac{1}{k}} . \tag{78}$$

Nach Einseitzung von T_2, (76) wird

$$\underset{w>0}{L_{12}} = \frac{GR}{k-1}\left(T_1 - T_2 \delta^{\frac{1}{k}}\right) \tag{79}$$

und, in Anbetracht von (75), da $T_2\ \delta^{\frac{1}{k}} > T_2$, ergibt sich

$$\underset{w>0}{L_{12}} < \underset{w=0}{L_{12}} . \tag{80}$$

Mit Bezug auf (74) und (80) ist die irreversible adiabate Arbeit immer kleiner als die reversible, ob gleiches Endvolumen oder gleicher Enddruck bezweckt wird. Wenn $aw = c$ (in den Kühlanlagen leicht möglich bei sehr tiefen Temperaturen), ist die äussere Arbeit (L_{12}) gleich Null, da der Kolbendruck

$$p_p = p\,(1 - aw/c) = 0 . \tag{81}$$

Das könnte auch ein Hinweis darauf sein, dass in den Berechnungen nicht der mittlere Gasdruck sondern der mittlere Kolbendruck zu benützen ist. In diesem Falle findet eine isotherme, adiabate Ausdehnung statt.

1.7. *Die Adiabate mit endlicher Geschwindigkeit im T, S. Koordinatensystem*

Dem zweiten Grundsatz der Thermodynamik gemäss, die Entropie der adiabaten irreversiblen Kreisprozesse, in den technisch abgegrenzten Räumen, nimmt zu. Die Entropiezunahme ist ein Kriterium der Irreversibilität eines Prozesses. Trotzdem bietet der zweite Grundsatz nicht die effektive Möglichkeit an, jene Entropiezunanhme zu berechnen, die zur Irreversibilität einer offenen Zustandsänderung führt und das zahlenmässig auszudrücken, und so kann man auch nicht die Gleichung der anisentropen Adiabate in *TS*-Koordinaten aufstellen.

Indem wir uns des von uns umgeformten Ausdruckes des ersten Prinzips bedienen, welches der endlichen Geschwindigkeit der Prozesse in den thermischen Maschinen Rechnung trägt, versuchen wir die Entropieänderung eines irreversiblen adiabaten Prozesses zu bestimmen und gleichzeitig die Gleichung der entsprechenden Adiabate aufzustellen.

Wir gehen von der mathematischen Definition der Entropie aus:

$$dS = \frac{dU + A\,p\,dV}{T} . \tag{82}$$

Nach dem ersten umgeformten Ausdruck des ersten Prinzips für Prozesse die mit endlicher Geschwindigkeit verlaufen:

$$dQ = dU + A\,p\left(1 \pm \frac{aw}{c}\right) dV . \tag{83}$$

Da für die Adiabate $dQ = 0$, ergibt sich

$$dU + Ap\left(1 \pm \frac{aw}{c}\right) dV = 0, \tag{84}$$

woraus

$$dU + ApdV = \mp Ap\,\frac{aw}{c}\,dV. \tag{85}$$

(—) gilt für Verdichtung, (+) für Ausdehung.
Setzen wir (85) in (82) ein:

$$dS = \mp\,\frac{ART\,aw\,dV}{TVc}. \tag{86}$$

Um integrieren zu können, bemerken wir, dass

$$c = \sqrt{\frac{3KT}{m}}$$

und T eine Funktion von V ist.
In erster Annäherung kann man hier noch annehmen, dass

$$T = T_1\left(\frac{V_1}{V}\right)^{k-1},$$

und so:

$$dS = \mp\,AR\,\frac{aw}{\sqrt{\frac{3K}{m}\,T_1 V_1^{k-1}}} \cdot \frac{dV}{V^{\frac{k-1}{2}}} \tag{87}$$

$$dS = \mp\,AR \cdot \frac{aw}{c_1}\,\frac{1}{V_1^{\frac{k-1}{2}}} \cdot \frac{dV}{V^{\frac{3-k}{2}}} \tag{88}$$

Die Integration ergibt:

$$S_2 - S_1 = \mp\,AR\,\frac{aw}{c_1} \cdot \frac{1}{V_1^{\frac{k-1}{2}}} \cdot \frac{1}{\frac{k-1}{2}} \left| V^{\frac{k-1}{2}} \right|_{V_1}^{V_2} \tag{89}$$

$$S_2 - S_1 = \mp\,AR \cdot \frac{aw}{c_1} \cdot \frac{2}{k-1} \cdot \frac{1}{V_1^{\frac{k-1}{2}}}\left(V_2^{\frac{k-1}{2}} - V_1^{\frac{k-1}{2}}\right) \tag{90}$$

$$S_2 - S_1 = \mp\,AR\,\frac{2}{k-1} \cdot \frac{aw}{c_1} \cdot \left[\left(\frac{V_2}{V_1}\right)^{\frac{k-1}{2}} - 1\right]. \tag{91}$$

Für Verdichtung gilt (—) und ausserdem

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{1}{\varepsilon} \tag{92}$$

und so ergibt sich aus (85)

$$(S_2 - S_1)_c = AR \frac{2}{k-1} \frac{aw}{c_1} \left(1 - \frac{1}{\varepsilon^{\frac{k-1}{2}}}\right) > 0 . \tag{93}$$

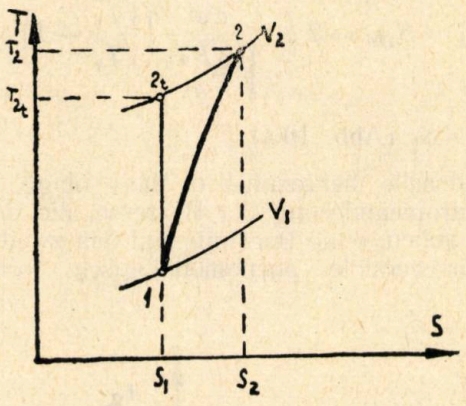


Fig. 9

Für die Ausdehnung gilt (+) und ausserdem

$$\frac{V_2}{V_1} = \varepsilon , \tag{94}$$

so dass, wenn man (91) in Betracht zieht,

$$(S_2 - S_1)_a = AR \frac{2}{k-1} \cdot \frac{aw}{c_1} \left(\varepsilon^{\frac{k-1}{2}} - 1\right) > 0 . \tag{95}$$

Die Gleichung der gesuchten irreversiblen adiabaten Verdichtung, in TS — Koordinaten, erhalten wir nach Einsetzung von

$$\varepsilon = \frac{V_1}{V_2} \approx \left(\frac{T_2}{T_1}\right)^{\frac{1}{k-1}} ; \quad \frac{AR}{k-1} = c_v ; \quad c_1 = \sqrt{\frac{3KT_1}{m}}$$

in (85), und zwar:

$$(S_2 - S_1)_c = 2\, c_v \frac{aw}{\sqrt{\frac{3KT_1}{m}}} \left[1 - \frac{1}{\left(\frac{T_2}{T_1}\right)^{\frac{1}{2}}}\right] \tag{96}$$

$$(S_2 - S_1)_c = 2\, c_v \frac{aw}{\sqrt{\frac{3KT_1}{m}}} \left(1 - \frac{\sqrt{T_1}}{\sqrt{T_2}}\right) . \tag{97}$$

Da $T_2 > T_1$ ergibt sich $S_2 > S_1$.

Die Gleichung der irreversiblen adiabaten Ausdehnung in TS — Koordinaten ergibt sich nach Einsetzung von

$$\varepsilon = \frac{V_2}{V_1} \approx \left(\frac{T_1}{T_2}\right)^{\frac{1}{k-1}}$$

in (95), wonach

$$(S_2 - S_1)_a = 2\, c_v \frac{a w}{\sqrt{\frac{3\,KT_1}{m}}} \left(\frac{\sqrt{T_1}}{\sqrt{T_2}} - 1\right). \tag{98}$$

Da $T_2 < T_1$ ist $S_2 > S_1$ (Abb. 10 a).

Es ist die Tatsache hervozuheben, dass obige Beweisführung zur Berechnung der Entropieänderung der Prozesse, die mit endlicher Geschwindigkeit vor sich gehen, ohne Berufung auf das zweite Prinzip der Thermodynamik, für irreversible phenomenologisch formulierte Prozesse, geschah.

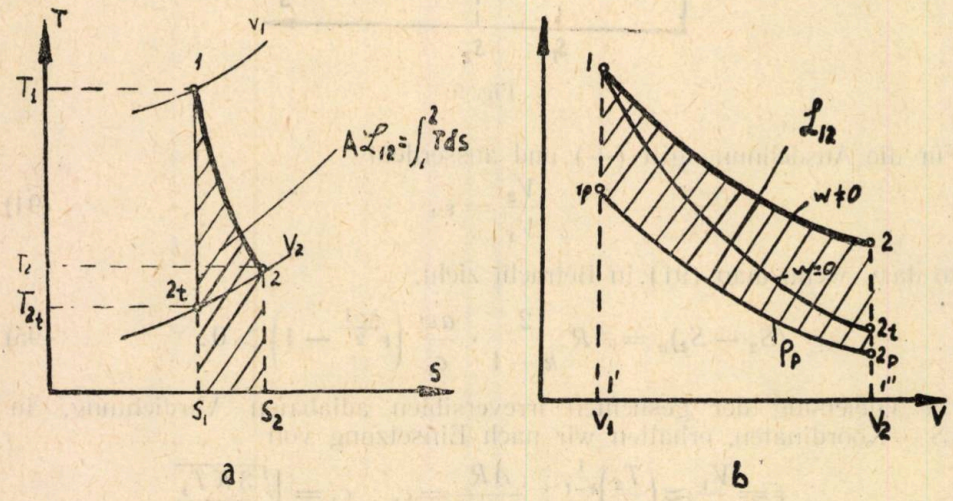


Fig. 10

Die Gleichung der Adiabate in TS — Koordinaten kann auch auf eine andere Weise ermittelt werden, und zwar, indem man in den Ausdruck der Entropieänderung einer reversiblen Adiabate das Verhältnis $\frac{V_2}{V_1}$ einsetzt, welches sich aus der Gleichung der irreversiblen ergibt. Also:

$$S_2 - S_1 = c_v \ln \frac{T_2}{T_1} + AR \ln \frac{V_2}{V_1}$$

ist die Entropieänderung einer reversiblen Adiabate. Aus (42),

$$\frac{V_2}{V_1} = \left(\frac{T_1}{T_2}\right)^{\frac{1}{k-1}} \left(\frac{1 \pm \frac{aw}{c_1}}{1 \pm \frac{aw}{c_2}}\right)^{\frac{2}{k-1}} = \left(\frac{T_1}{T_2}\right)^{\frac{1}{k-1}} \cdot \delta^{\frac{1}{k-1}} .$$

Damit wird

$$S_2 - S_1 = c_v \ln \frac{T_2}{T_1} + \frac{AR}{k-1} \left(\ln \frac{T_1}{T_2} + \ln \delta\right)$$

$$S_2 - S_1 = c_v \left(\ln \frac{T_2}{T_1} + \ln \frac{T_1}{T_2} + \ln \delta\right) = c_v \ln \delta . \qquad (98\,a)$$

In Paragraph 1.5 sahen wir, dass

$$\delta_c \approx 1 + 2 \frac{aw}{c_1} \left(1 - \frac{1}{\varepsilon^{\frac{k-1}{2}}}\right)$$

und

$$\delta_a \approx 1 + 2 \frac{aw}{c_1} \left(\varepsilon^{\frac{k-1}{2}} - 1\right).$$

Wir entwickeln die Reihe von $(ln\,\delta)$:

$$\ln \delta = \ln (1 + x) = \frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} \ldots\ldots ,$$

behalten nur den ersten Faktor, und kommen auf diese Weise zu den Gleichungen [(93), (95)] der Entropieänderung :

$$\left.\begin{aligned} \int_1^2 dS = S_2 - S_1 &= c_v \frac{2\,aw}{c_1} \left(1 - \frac{1}{\varepsilon^{\frac{k-1}{2}}}\right) \text{ Verdichtung} \\ S_2 - S_1 &= c_v \frac{2\,aw}{c_1} \left(\varepsilon^{\frac{k-1}{2}} - 1\right) \quad \text{Ausdehnung} \end{aligned}\right\} \qquad (99)$$

Insofern wir die annähernden Ausdrücke von δ_c und δ_a anwenden, sind auch die sich daraus ergebenden annähernd, zum Beispiel 99.

Indem wir den genauen Ausdruck von δ $(44\,d)$ in (98 a) einsetzen, so wird auch der sich, nach entsprechenden Umformungen, daraus ergebende Ausdruck der Entropieänderung

$$S_2 - S_1 = c_v \ln \left[\left(1 \pm \frac{aw}{c_1}\right) \mp \frac{aw}{c_1} \left(\frac{V_2}{V_1}\right)^{\frac{k-1}{2}}\right]^2 \qquad (99\,a)$$

ein genauer sein.

Wenn Ausdehnung vorhanden, und $a\,w = c_1$ vorausgesetzt, ergibt sich die genaue Entropieänderung in einem isotherm-adiabaten Prozess :

$$(S_2 - S_1)_{is-ad} = AR \ln \frac{V_2}{V_1} . \qquad (99\,b)$$

1.8. *Die Bedeutung der Integrale* $\int_1^2 TdS$ *für Adiabaten mit endlicher Geschwindigkeit*

Das Produkt TdS gibt, in der klassischen Thermodynamik, den Wärmeaustausch an. Wir wollen die ihm in der Thermodynamik der irreversiblen Prozesse zukommende Form:

$$A\mathfrak{L} = \int_1^2 T\,dS \tag{100}$$

ergründen. Für reversible Zustandsänderungen, stellt TdS eine mit der Umgebung ausgetauschte Wärme dar. Für Adiabaten, ist diese Deutung nicht mehr gültig, da, definitionsgemäss, eine Adiabate ohne Wärmezu — oder — abfuhr stattfindet. Mit Bezug auf die mathematische Definition der Entropie

$$dS = \frac{dU + A\,p\,dV}{T},$$

ergibt sich für (100)

$$\int_1^2 TdS = \int_1^2 (dU + A\,p\,dV) = \int_1^2 dU + A\int_1^2 p\,dV. \tag{101}$$

Unter Anwendung von (49) erhielten wir in (51), für adiabate irreversible Prozesse ($dQ = 0$):

$$dU = -A\,dL_{ir}. \tag{102}$$

Die in der Gleichung 101 vorkommenden mittleren Zustandsgrössen des Gases, p und T, kennzeichnen den in den Diagrammen pV (Abb. 10 b) und TS (Abb. 10 a) dargestellten, irreversiblen adiabaten Prozess 1—2, ($\varpi \neq 0$); $1—2_t$ stellt eine reversible Adabate ($\varpi = 0$) und $1_p — 2_p$ (Abb. 10 b) die Kolbendruckänderung dar.

Wir stellen fest, dass die irreversible Adiabate 1—2 (pV — und TS — Diagramme), gleichzeitig, auch einen reversiblen nichtadiabaten Prozess darstellen kann, der, sofern er nicht mit 1—2 zusammenfällt, (rev. Ad.), unbedigt polytrop ist. Als solcher betrachtet, ist seine mechanische Arbeit

$$\int_1^2 p\,dV = L_{rev}. \tag{103}$$

Somit identifizieren wir in Gleichung (101) die Integrale (103) als mechanische Arbeit einer reversiblen Polytrope, während nach (102) die Änderung der inneren Energie die Arbeit einer irreversiblen Adiabate ist. Somit nimmt (101) folgende Form an:

$$\int_1^2 TdS = AL_{rev} - AL_{ir} = A\mathfrak{L}_{1-2}. \tag{104}$$

Infolgedessen, in der Thermodynamik der irreversiblen Prozesse, $\int_1^2 TdS$ gibt nicht mehr den Wärmeaustausch an, sondern die Differenz zweier Arbeiten die man wie folgt erhält: Die gegebene irreversible Adiabate 1—2 wird als eine reversible Polytrope betrachtet die ihre entsprechende Arbeit (L_{rev}) ermittelt. [Die Zustandsgrössen p, V und T, S des Gases, die dazu in Betracht kommen, sind die mittleren, augenblicklichen Werte, die auch für die irreversible Adiabate gelten]. Es wird dann die Kolbendruckkurve (p_p) gezeichnet $\left[\text{wobei } p_p = p\left(1 - \frac{aw}{c}\right)\right]$ und die dazu entsprechende irreversible adiabate Arbeit berechnet (L_{ir}), die in Abzug gebracht wird. Die sich ergebende Differenz $\mathfrak{L}_{1-2}$ ist geometrisch anschaulicher:

$$L_{rev} = \int_1^2 p\,dv = \text{Fläche } 1'\,1\,2\,1''$$

stellt die polytrope reversible Arbeit 1—2, und

$$L_{ir} = \int_{1_p}^{2_p} p\,dV = \text{Fläche } 1'\,1_p\,2_p\,1''$$

die adiabate irreversible Arbeit 1—2, dar.

Die Differenz dieser Flächen

$$\mathfrak{L}_{1-2} = L_{rev} - L_{irev} = \frac{1}{A}\int_1^2 T\,dS = \text{Fläche } 1_p\,1\,2\,2_p$$

stellt einen Arbeitsverlust dar der dem irreversiblen adiabaten ($w \neq 0$), im Vergleich mit dem reversibelen polytropen Prozzes [im pV und TS Diagramm, beide Prozesse sind durch dieselbe Kurve 1—2 dergestellt] entspricht. Die Fläche $1_p\,1\,2\,2_p$ ergibt sich aus der Tatsache, dass einer gegebenen irreversiblen adiabaten Ausdehnung zwei Druckkurven entsprechen: eine die den mittleren augenblicklichen Gasdruck 1—2, und eine andere, darunterliegende, die den augenblicklichen Kolbendruck darstellt ($1_p - 2_p$).

Nun wollen wir die *irreversible* adiabate ($w \neq 0$) (Kurve 1—2), Abb. 10 b, mit der *reversiblen* auch adiabaten ($w = 0$) Arbeit (Kurve $1—2_t$) vergleichen:

$$L_{ad\ rev} - L_{ad\ ir} = \text{Fläche } 1\,2\,2_p\,1_p - \text{Fläche } 1\,2\,2_t =$$

$$= \text{Fläche } 1\,2_t\,2_p\,1_p = \mathfrak{L}_{12} - \int_1^2 (p - p_t)\,dV\,, \qquad (105)$$

wo p = mittlerer augenblicklicher Gasdruck des irreversiblen (1—2), und p_t = Gasdruck des reversiblen adiabaten Prozesses sind.

Um die Differenz $(p-p_t)$ zu berechnen, benützen wir die Gleichung der Adiabate mit endlicher Geschwindigkeit (44):

$$\left(\frac{p_1}{p}\right)\delta=\left(\frac{V}{V_1}\right)^k, \tag{106}$$

wo, nach Paragraph 1.5:

$$\delta_a=1+2\frac{aw}{c}\left(1-\frac{c}{c_1}\right) \text{ Ausdehnung}$$

$$\delta_c=1+2\frac{aw}{c_1}\left(1-\frac{c_1}{c}\right) \text{ Verdichtung.}$$

Im vorliegenden Falle, Ausdehnung vorausgesetzt, und mit Bezug auf (105),

$$p=p_1\left(\frac{V_1}{V}\right)^k\cdot\left[1+2\frac{aw}{c_1}\left(1-\frac{c}{c_1}\right)\right],$$

Aber

$$p_1\left(\frac{V_1}{V}\right)^k=p_t,$$

also

$$p=p_t+p_t\,2\frac{aw}{c_1}\left(1-\frac{c}{c_1}\right),$$

woraus

$$p-p_t=p_t\,2\frac{aw}{c_1}\left(1-\frac{c}{c_1}\right).$$

Somit, mit Rücksicht auf 105, erhalten wir

$$L_{ad.\,rev}-L_{ad.\,irev}=\frac{1}{A}\int_1^2 TdS-\int_1^2 p_t\frac{2aw}{c}\left(1-\frac{c}{c_1}\right)dV. \tag{107}$$

Also, zwischen einer irreversiblen und einer reversiblen Adiabate Vergleich ziehend, ergibt sich dass der Arbeitsverlust kleiner ist al $\int_1^2 TdS$, und somit nicht die ganze *unter der Kurve 1—2 in T, S liegende Fläche stellt* einen Arbeitsverlust dar.

Der Grundsatz der adiabaten Erreichbarkeit in der Thermodynamik der irreversiblen Vorgänge. Kreisprozess mit einem Wärmebehälter

In der klassischen Thermodynamik gelangt man, vom zweiten Grundsatz der reversiblen Vorgänge ausgehend, zur adiabaten Unerreichbarkeit (Theorem von Carathéodory) die besagt:

Von einem gegebenen Zustand (1) aus (Abb. 10, c, d), sind, auf reversiblem adiabatem Wege, nur jene Zustände erreichbar, die sich auf der durch (1) gehenden reversiblen Adiabate befinden ($2_t - 1 - 3_t$).

Laut den vorangehenden Paragraphen, haben wir, in Abb. 10 c, d, eine adiabate Verdichtung 1—2 und eine adiabate Ausdehnung 1—3, ($w > o$) dargestellt. Beide verlaufen mit endlicher Geschwindigkeit (irreversibel),

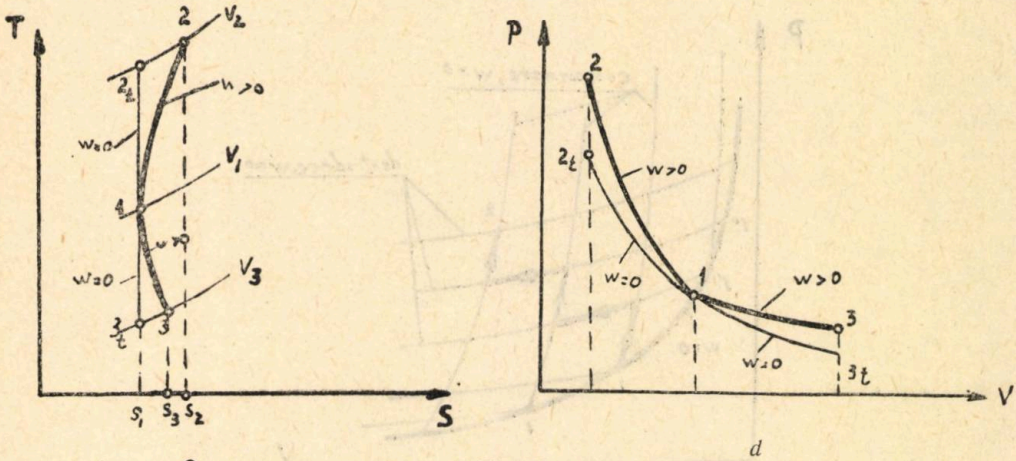


Fig. 10

und können punktweise den Gleichungen 42 a, 44, 97, 98 gemäss, konstruiert werden. Jeder Punkt 1 auf der reversiblen Adiabate 2_t—1—3_t ist der Durchschnittspunkt einer irreversiblen Verdichtungs — und Ausdehnungsadiabate gleicher Geschwindigkeit. Die erste kann sich nur nach oben und die zweite nur nach rechts entwickeln. Das bringt mit sich, wie in Abb. 10 e Punkt 2 sichtbar, dass alle sich oberhalb der reversiblen Adiabate befindlichen Zustände adiabat irreversibel erreichbar, während die sich unterhalb befindlichen unerreichbar sind. Handelt es sich um das *TS*-Koordinatensystem (10 c), so ist 2_t—1—3_t die reversible Adiabate [(1—2_t) = Verdichtung ; (1—3_t) = Ausdehnung], während 1—2 die irreversible Verdichtungs und 1—3 die irreversible Entspannungsadiabate sind, und also alle sich rechts befindlichen Zustände adiabat irreversibil erreichbar, während die sich links befindlichen unerreichbar sind.

Man kann also, für irreversible adiabate Vorgänge, die adiabate Unerreichbarkeit folgendermassen formulieren :

Mittels irreversibler adiabater Vorgänge (w > o) *(derer Gliechungen wir jetzt kennen), sind alle sich in pV — oberhalb der reversiblen Adiabate und im* TS*-Diagramm zu ihrer rechten Seite befindlichen Zustände adiabat erreichbar. Nur die darunter liegenden bzw. links davon bleiben unerreichbar.*

Aus dem *TS*-Diagramm geht hervor, dass dieser Grundsatz dem Prinzip der Entropiezunahme der irreversiblen adiabaten Vorgänge (also, die mit endlicher Geschwindigkeit durchlaufen werden) gleichwertig ist.

Wir gelangten zu diesen Schlussflogerungen, ohne Beruf auf das zweite phenomenologisch formulierte Prinzip der Thermodynamik, für irreversible Prozesse.

Kreisprozess mit einem Wärmebehälter. In der klassischen Thermodynamik, auf Grund des phenomenologisch formulierten zweiten Prinzips, kann die Existenz eines mit einem einzigen Wärmebehälter arbeitenden Kreisprozesses festgestellt werden, dessen Arbeit immer negativ ist.

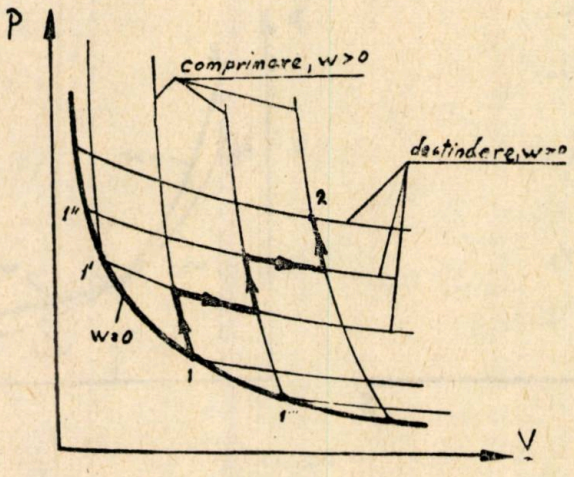


Fig. 10 e

An Hand von Abb. 10 c und d gelangen wir zu derselben Schlussfolgerung, aber ohne Rücksicht auf das zweite Prinzip der Thermodynamik der irreversiblen Vorgänge.

Nach Abb. 10 c und 10 d, sind in Punkt 1 zwei Kreisprozesse vorhanden:

— $133_t 1$, worin 1—3 die irreversible adiabate Ausdehnung ($w>o$), $3—3_t$ eine isochore Abkühlung und $3_t—1$ die reversible adiabate Verdichteung ($w=o$) sind;

— $1\ 2\ 2_t\ 1$, mit 1—2 als irreversible adiabate Verdichtung ($w>o$), $2—2_t$ als isochore Abkühlung, und $2_t—1$ als reversible adiabate Ausdehnung ($w=o$).

Obwohl der erste Kreisprozess rechts — und der zweite linksläufig ist, die Arbeit beider ist negativ.

2. Polytrope mit endlicher Geschwindigkeit

2.1. *Die Gleichung der Polytrope bei endlicher Geschwindigkeit*

Wir gehen von der in der klassischen Thermodynamik bekannten Definition der Polytrope und von der Gleichung des ersten Grundsatzes für Prozesse die mit endlicher Geschwindigkeit verlaufen, aus. (c_n = die polytrope spezifische Wärme).

Also :

$$\underset{w>0}{dQ} = G\,c_n\,dT \tag{108}$$

worin wir c_n = konst. betrachten und dT = Änderung der mittleren augenblicklicher Gastemperatur (siehe Seite 1). Der Gleichung 1 gemäss,

$$\underset{w>0}{dQ} = dU + Ap\,(1 \pm aw/c)\,dV \tag{109}$$

$$G\,c_n\,dT = dU + Ap\,(1 \pm aw/c)\,dV \tag{110}$$

$$dU = G\,c_v\,dT \tag{111}$$

$$p = \frac{GRT}{V} \tag{112}$$

$$c_n\,dT = c_v\,dT + \frac{ART}{V}\,(1 \pm aw/c)\,dV \tag{113}$$

$$\frac{c_n - c_v}{ART}\,dT = (1 \pm aw/c)\,\frac{dV}{V} \tag{114}$$

Letzte Gleichung wird in der Voraussetzung w = const. integriert. Dabei :

$$\frac{c_n - c_v}{AR} = -\frac{1}{n-1}\,;\quad c = \sqrt{3gRT},$$

wenn n=polytroper Exponent. Also,

$$\frac{dT}{\left(1 \pm \frac{aw}{\sqrt{3gRT}}\right)T} = -(n-1)\,\frac{dV}{V}. \tag{115}$$

Analog wie im Falle der Adiabate, ergibt sich schliesslich

$$\frac{T_1}{T_2}\left(\frac{1 \pm \frac{aw}{c_1}}{1 \pm \frac{aw}{c_2}}\right)^2 = \left(\frac{V_2}{V_1}\right)^{n-1}, \tag{116}$$

die Gleichung der Polytrope mit endlicher Geschwindigkeit, worin (+) für Kompression und (—) für Ausdehnung gilt. Ihre übrigen Gleichungen lauten :

$$\frac{p_1}{p_2}\,\delta = \left(\frac{V_2}{V_1}\right)^n,\ \text{worin}\ \delta = \left(\frac{1 \pm \frac{aw}{c_1}}{1 \pm \frac{aw}{c_2}}\right)^2 \tag{117}$$

$$\frac{T_1}{T_2}\,\delta^{\frac{1}{n}} = \left(\frac{p_1}{p_2}\right)^{\frac{n-1}{n}}. \tag{118}$$

Die Kurve der Polytrope, mit endlicher Geschwindigkeit, ihrer Gleichung gemäss, liegt immer sowohl bei Verdichtung als auch bei Ausdehnung, oberhalb der entsprechenden reversiblen Polytrope, wie in Abb. 11 und 12 sichtbar, die dieselbe spezifische Wärme c_n aufweist.

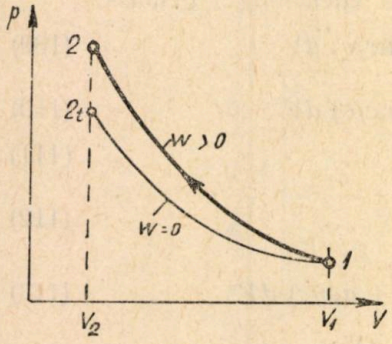


Fig. 11

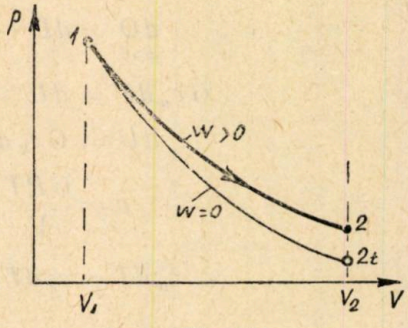


Fig. 12

2.2. *Mechanische Arbeit und polytrope Wärme (bei endlicher Geschwindigkeit)*

Wir gehen vom algemmeinen Ausdruck der mechanischen Arbeit aus:

$$\underset{w>0}{dL} = p\left(1 \pm \frac{aw}{c}\right) dV .$$

Darin, aus 115:

$$\left(1 \pm \frac{aw}{c}\right) dV = -\frac{V}{n-1} \cdot \frac{dT}{T}$$

und also

$$\underset{w>0}{dL} = -\frac{GR}{n-1} \cdot dT ,$$

oder, nach Integrierung:

$$\underset{w>0}{L_{1-2}} = \frac{GR}{n-1} (T_1 - T_2) \tag{119}$$

Darin ergibt sich T_2 aus 116 oder 118. Infolgedessen $\underset{w>0}{L_{1-2}}$ kann wie folgend geschrieben werden:

$$\underset{w>0}{L_{1-2}} = \frac{GRT_1}{n-1}\left[1 - \delta\left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{n-1}\right] \tag{119 a}$$

$$\underset{w>0}{L_{1-2}} = \frac{GRT_1}{n-1}\left[1 - \delta^{\frac{1}{n}}\left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{n-1}{n}}\right] \tag{119 b}$$

Da sowohl für Verdichtung wie auch für Ausdehung $\delta > 1$, ergibt sich, aus 119 a oder 119 b:

$$\underset{w>0}{L_{1-2}} > \underset{w=0}{L_{1-2}} \quad \text{bei Verdichtung}$$

$$\underset{w>0}{L_{1-2}} < \underset{w=0}{L_{1-2}} \quad \text{bei Ausdehnung}$$

Die polytrope ausgetauschte Wärme bei endlicher Geschwindigkeit ergibt sich indem wir Gl. 108 integrieren:

$$\underset{w>0}{Q_{1-2}} = Gc_n (T_2 - T_1) \tag{120}$$

worin T_2 der Gl. 116 oder 118 zu entnehmen ist, wobei

$$\underset{w>0}{Q_{1-2}} = GRT_1 \left[\delta \left(\frac{V_1}{V_2} \right)^{n-1} - 1 \right] \tag{120 a}$$

$$\underset{w>0}{Q_{1-2}} = GRT_1 \left[\delta \frac{1}{n} \left(\frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{n-1}{n}} - 1 \right] \tag{120 b}$$

und also

$$\underset{w>0}{Q_{1-2}} > \underset{w=0}{Q_{1-2}} \quad \text{bei Verdichtung}$$

$$\underset{w>0}{Q_{1-2}} < \underset{w=0}{Q_{1-2}} \quad \text{bei Ausdehnung}$$

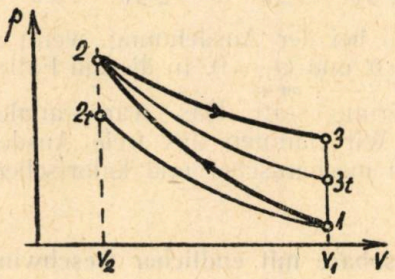


Fig. 13

Die gegenseitige Lage der Verdichtungs — und Entspanungspolytrope bei endlicher Geschwindigkeit und gleicher spezifischer Wärme c ist in Abb. 13 veranschaulicht. Das Gas vom Anfangszustand 1 wird nach $1—2_t$ polytrop mit $w = o$ verdichtet. Bei einer Verdichtungsgeschwindigkeit $w > o$ liegt die Verdichtungspolytrope 1—2 oberhalb der ersten. Würde man das Gas vom Zustand 2 polytrop, mit $w = o$ entspannen ist die entsprechende Polytrope $2—3_t$. Findet die Entspannung mit $w > o$ statt so kommt die Polytrope oberhalb der vorangehenden zu liegen.

3. Die Isotherme mit endlicher Geschwindigkeit

Wegen $T = konst.$, ist die Gleichung der Isotherme die mit endlicher Geschwindigkeit durchlaufen wird pV=konst., wobei p und T mittlere augenblickliche Werte sind.

Der Ausdruck der mechanischen Arbeit für Prozesse die bei endlicher Geschwindigkeit stattfinden ist:

$$dL = p\left(1 \pm \frac{aw}{c_1}\right) dV$$

Mit $\delta_m = (1 \pm aw/c)$, also $\delta_{mc} > 1$, $\delta_{ma} < 1$ und da $c = f(T) = \text{konst.}$ ergibt sich $\delta_m = \text{const.}$

Also

$$\underset{w>0}{L_{12}} = \delta_m \underset{w=0}{L_{12}} = \delta_m\, GRT \ln \frac{V_2}{V_1}$$

und

$$\underset{w>0}{Q_{12}} = \delta_m A \underset{w=0}{L_{1-2}} = \delta_m AGRT \ln \frac{V_2}{V_1}.$$

Das bedeutet soviel, dass, bei Verdichtung

$$\underset{w>0}{L_{12}} > \underset{w=0}{L_{12}} \quad \text{und} \quad \underset{w>0}{Q_{12}} > \underset{w=0}{Q_{12}}.$$

Bei der Ausdehnung kehren die Ungleichheiten um:

$$\underset{w>0}{L_{12}} < \underset{w=0}{L_{12}} \quad \text{und} \quad \underset{w>0}{Q_{12}} < \underset{w=0}{Q_{12}}.$$

Es gibt einen Grenzfall bei der Ausdehnung, wenn aw/c = 1 und entsprechend $\delta_m = 0$, also $\underset{aw=c}{L_{12}} = 0$ und $\underset{aw=c}{Q_{12}} = 0$. In diesem Falle findet eine isotherm-adiabate Zustandsänderung statt. Das wäre analog wie im Gay-Lussacschen Experiment. Wir nannten das freie Ausdehnung *d.h.* das Gas dehnt sich aus ohne in mechanischer und kalorischer Interaktion mit der Umgebung zu treten.

4. Die Isobare mit endlicher Geschwindigkeit

Da $p = \text{const.}$, ergibt sich die Gleichung aus dem Zustandsgesetz $V/T = \text{const.}$

Die mechanische Arbeit wird aus

$$\underset{w>0}{L_{12}} = \int p\,(1 \pm aw/c)\, dV$$

hergeleitet. Bei der Isobare ändert sich (c) mit der Temperatur, so dass:

$$T = \frac{T_1}{V_1} V.$$

So ergibt sich

$$c = \sqrt{3gRT} = \sqrt{3\,gR\,\frac{T_1}{V_1}\,V}\,.$$

Infolgedessen

$$\underset{w>0}{L_{12}} = p\int_1^2\left(1 \pm \frac{a\,w}{\sqrt{3\,gR\,\frac{T_1}{V_1}\,V}}\right)dV = p\,(V_2 - V_1) \pm \left| p\,\frac{2\,a\,w}{\sqrt{3\,gR\,\frac{T_1}{V_1}}}\sqrt{V}\right|_{V_1}^{V_2}$$

$$\underset{w>0}{L_{12}} = p\,(V_2 - V_1)\left(1 \pm \frac{2\,a\,w}{c_1}\cdot\frac{\sqrt{V_1}}{\sqrt{V_2}+\sqrt{V_1}}\right)$$

$$\underset{w>0}{Q_{1-2}} = G\,c_v\,(T_2 - T_1) + A\,\underset{w>0}{L_{12}}\,.$$

Um eine isobare oder isotherme Zustandsänderung mit endlicher Geschwindigkeit zu verwirklichen, müssen ganz besondere Bedingungen erfüllt werden, und zwar:

Die zu- und abgeführten Wärmemengen hängen von der Bewegungsrichtung des Kolbens, d.h. ob Verdichtung oder Ausdehnung, ab; dazu müssen sie noch genau der Kolbengeschwindigkeit angepasst werden.

SCHLUSSANMERKUNG

— Die sich aus dem neuen Ausdruck des ersten Prinzips ergebenden Gleichungen der thermodynamischen Vorgänge, die mit endlicher Geschwindigkeit durchlaufen werden, heben die Bedeutung des Verhältnisses w/c, bei der Entwicklung dieser Vorgänge hervor. Für den Fall $w \neq 0$, $c \neq \infty$, führt dieses Verhältnis, ohne Beruf auf zusätzliche Voraussetzungen, zu dem Schluss, dass solche Vorgänge irreversibel sind.

Die Ursache dieser Art von Irreversibilität besteht in der Natur selbst der Interaktion Gas-Kolben.

Die Analyse des inneren Mechanismus dieser Interaktion ist es, die uns die erzielten Ergebnisse ermöglichte.

— Konsequent auf dieser Linie, im Rahmen jener Vorgänge die wir behandelten, konnten wir qualitativ und quantitativ ihre Irreversibilität kennezeichnen, und zwar mittles folgender Grössen: Entropieänderung der offenen Adiabate; adiabate Irreversibilitäts-Faktoren δ_a, δ_c; $\int Tds$.

Es geht daraus hervor, dass die Entropieänderung nicht die einzige Grösse ist, welche die Irreversibilität kennzeichnen kann: es gibt auch andere Grössen die demselben Zweck dienen können. Man muss von Fall zu Fall analysieren, welche davon, in Abhängigkeit von der Natur des Prozesses sowie vom verfolgten Ziel, vorzuziehen sind. Jedwelche zur Kennzeichnung der Irreversibilität geignete Grösse, ist, durch ihre Herkunft, komparativer Natur.

In allen vorkommenden Fällen ergeben sich diese Grössen indem man diejenigen, die einen irreversiblen Prozess kennzeichnen sollen mit den entsprechenden einen reversiblen kennzeichnenden, vergleicht.

— Die molekular-kinetische Behandlung der adiabaten Prozesse besitzt beachtenswerte Vorteile der phenomenlogischen Behandlung gegenüber: sie veranschaulicht intuitiv den Mechanismus der Interaktion Gas-Kolben; führt zum genauen Wert von k, ohne an den ersten phenomenologisch formulierten Grundsatz und an die spezifische Wärme zu appellieren; durch das Vorhandensein des Verhältnisses w/c in den erhaltenen Gleichungen, hebt sie dessen Einfluss auf die Entwicklung des untersuchten Prozesses hervor; sie ermöglicht die Irreversibilität der hier untersuchten Prozesse quantitativ auszudrücken, ohne den II-ten phenomenologisch formulierten Grundsatz in Anspruch zu nehmen.

— Indem man augenblickliche mittlere Parameter benützte, gelangte man zu dem Schluss, dass die globale Entwicklung eines irreversiblen Prozesses in denselben Koordinatensystemen wie in der klassischen Thermodynamik, graphisch dargestellt werden kann. Das ermöglicht, auf eine sehr veranschauliche Weise, auch einen graphischen Vergleich zwischen den irreversiblen und reversiblen Vorgängen.

Es wird dabei festgestellt, dass, bei der Beschreibung der irreversiblen Prozesse, die blosse graphische Darstellung der Gasparameteränderung ungenügend sein kann. Darstellung der Druckänderung auf der Stirnfläche des Kolbens ist unerlässlich (ein Beispiel bildet die graphische Deutung der mechanischen Arbeit).

Infolgedessen, ein irreversibler Vorgang wird in p,V—Koordinatensystem durch zwei Kurven dargestellt: eine davon beschreibt das globale Geschehen in der Gasmasse, während die andere das Geschehen auf der Kontaktfläche zwischen Gas und Kolben.

— Die graphische Darstellung der Verdichtungs-und Entspanmungsadiabaten, die mit endlicher Geschwindigkeit verlaufen, führt uns zur *adiabaten irreversiblen Erreichbarkeit aller Zustände oberhalb der reversiblen Adiabate.*

Für $w=o$ ergibt sich das Theorem von Carathéodory über die reversible adiabate Unerreichbarkeit (für vollkommene Gase). *Die irreversible Erreichbarkeit oberhalb der reversiblen Adiabate* rechtfertigt die Kreisprozesse mit einem einzingen Wärmebehälter, ohne an das II-te phenomenologisch formulierte Prinzip für irreversible Prozesse zu appellieren.

— Aus den bisherigen Untersuchungen geht hervor, dass der neue Ausdruck des ersten Grundsatzes, hinsichtlich der Irreversibilitäts-Ergründung viel fruchtbarer sein kann, als der zweite phenomenologisch formulierte Grundsatz für irreversible Prozesse.

— Alle erhaltenen Gleichungen sind allgemeiner als die klassischen. Diese letzten ergeben sich aus den ersteren für den abstrakten Grenzfall $w=o$. Die Tatsache, dass

$$\underset{w>0}{L} < \underset{w\ 0}{L},$$

hat aus dem Fall $w=o$ ein Vergleichsterm gemacht. Für die Technik kann das in verschiedenen Situationen fraglich werden. Vergleichen wir die

Vollkommenheit eines realen Prozesses ($w \neq 0$) mit einem reversiblen ($w = o$). In der Technik, für $w = o$ hört aber das thermische Geschehen in den Maschinen auf. Die Tendenz des heutigen Maschinenbaues ist aber auf ständige Erhöhung der Geschwindigkeit eingestellt. Es liegt nahe, dass es richtiger ist ein neues Vergleichsterm zu schaffen, das für den Betrieb einer thermischen Maschine noch etwas bedeutet. Das kann nur ein reibungsloser Prozess sein, dessen Entwicklungsgeschwindigkeit $w \neq 0$, und zwar der Kolben-Geschwindigkeit der untersuchten Maschine gleich ist.

Für einen solichen theoretischen Vergleichsprozess bieten, die von uns aufgestellten Gleichungen, einen wertvollen Anhaltspunkt.

Lehrstuhl für Thermotechnik und thermische Maschinen
Politechnisches Institut Bukarest

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC BUCUREȘTI
Tomul XXVI — 1964, Fascicola 6

ELECTROTEHNICĂ

C.Z.: 621.316

ANALIZOR PENTRU CERCETAREA FENOMENELOR DE COMUTAȚIE

GH. HORTOPAN *

Procesul de comutație al întreruptoarelor, în rețelele de înaltă tensiune este însoțit, în regimul tranzitoriu, de valori ale tensiunii de restabilire superioare tensiunii nominale. Condițiile în care au loc aceste supratensiuni au fost studiate pe baza literaturii existente [1],...[15] în cadrul unor lucrări anterioare [16], [17], la care sînt indicate indicații bibliografice suplimentare. Recent au mai apărut informații asupra unor ample lucrări de modelare a liniilor electrice în gol [18]...[21].

Din lucrările menționate rezultă importanța pe care o are modelarea în stabilirea supratensiunilor de comutație și a tensiunii oscilante de restabilire.

In lucrarea de față se expun:

— Rezultatele cercetărilor teoretice obținute pînă acum [16];

— O relație nouă pentru determinarea tensiunei oscilante de restabilire, valabilă în condiții date.

— Analizorul pentru cercetarea supratensiunilor de comutație construit și primele oscilograme obținute cu acest analizor.

1. *Rezultatele cercetărilor teoretice obținute pînă în prezent.* Pentru reproducerea, pe model, a tensiunei oscilante de restabilire este necesară o modelare, pe bază de similitudine. Folosirea mărimilor relative în original și model conduce la precizarea mărimilor de bază indicate în tabela 1 [16]:

Mărimi de bază în rețea și în model *Tabela 1*

nr.	mărimea	în rețea	în model
1	admitanța	U_{Br}	U_{Bm}
2	impedanța	I_{Br}	I_{Bm}
3	putere	$S_{Br} = U_{Br} \cdot I_{Br}$	$S_{Bm} = U_{Bm} \cdot I_{Bm}$
4	curent	$Z_{Br} = \frac{U_{Br}^2}{S_{Br}}$	$Z_{Bm} = \frac{U_{Bm}^2}{S_{Bm}}$
5	tensiune	$Y_{Br} = \frac{1}{Z_{Br}}$	$Y_{Bm} = \frac{1}{Z_{Bm}}$

*) Lucrare comunicată în sesiunea științifică a cadrelor didactice din Institutul politehnic București, 22—23 februarie 1964.

Pe baza calculelor detailate [16] s-au obținut relațiile de similitudine indicate în tabela 2.

Tabela 2

Mărimi în funcție de mărimile în rețea

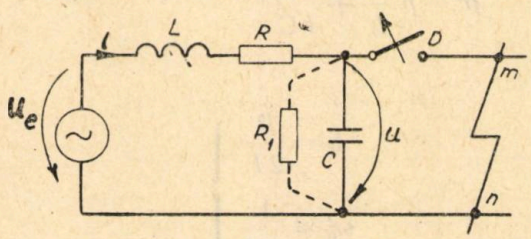
nr.	mărimea	în rețea	în model
1	pulsația de serviciu	ω_r	ω_m
2	pulsația proprie	ω_{er}	$\omega_{em} = \frac{\omega_m}{\omega_r} \omega_{er}$
3	rezistența	R_r	$R_m = \frac{Z_{Bm}}{Z_{Br}} R_r$
4	inductivitatea	L_s	$L_m = \frac{\omega_r}{\omega_m} \cdot \frac{Z_{Bm}}{Z_{Br}} L_r$
5	capacitatea	C_r	$C_m = \frac{\omega_r}{\omega_m} \cdot \frac{Z_{Br}}{Z_{Bm}} C_r$
6	amortizarea	δ_r	$\delta_m = \frac{\omega_m}{\omega_r} \delta_r$
7	timpul (perioada)	T_r	$T_m = \frac{\omega_r}{\omega_m} T_r$
8	factorul de supraoscilație	γ_r	$\gamma_m = \gamma_r$

2. *Relație nouă pentru determinarea tensiunii oscilante de restabilire.* în fig. 1a s-a reprezentat schematic circuitul, cu întreruptorul D, la bornele căruia se stabilește tensiunea oscilantă u, iar în fig.1b s-a reprezentat în diagramă relația de fază între e, i în regim de scurt circuit între punctele m și n, cu întreruptorul D închis. Circuitul din fig.1a are însemnătate pentru laboratoarele de încercări unde rezistența R, inductivitatea L și capacitatea C sînt valori de elemente concentrate. În cazul efectuării de scurtcircuite în rețele valorile menționate sînt uniform distribuite. Mai trebuie menționat că amortizarea, în cazul încercărilor de laborator este determinată de rezistența R, în timp ce această amortizare în cazul rețelelor reale buclate sau ramificate puternic, rezultă în mare măsură din rezistența R_1 corespunzătoare pierderilor în dielectric și efectului corona. Rezultă astfel că schema de principiu din fig. 1 este suficient de reală și exactă pentru încărcări de laborator cu sursă proprie.

Pentru a calcula tensiunea oscilantă de restabilire u, se admite că întreruperea curentului de scurtcircuit are loc la trecerea lui naturală prin zero, ceea ce apropie mult de realitate mai ales la întreruptoarele cu aer comprimat.

Curentul de scurtcircuit este de forma:

$$i = \frac{\hat{E}}{\sqrt{R^2 + L^2\omega^2}} \sin \omega t. \tag{1}$$



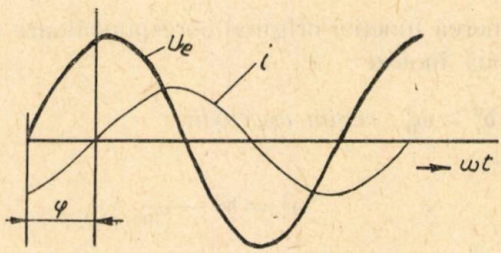


Fig. 1. Circuitul echivalent, pentru stabilirea formei tensiunii oscilante de restabilire.

Tensiunea de alimentare, în ipoteza considerării ca origine a timpului, momentul trecerii prin zero a curentului de scurtcircuit, este:

$$u_e = \hat{E} \sin (\omega t + \varphi) \tag{2}$$

unde

$$\varphi = \text{arc tg} \frac{\omega L}{R}. \tag{3}$$

Ecuațiile diferențiale ale circuitului, după deconectarea întreruptorului D, și ținînd seama că din cauza scurtcircuitului la momentul $t = 0$ condensatorul nu a fost încărcat cu sarcină electrică, sînt:

$$u_e = \hat{E} \sin (\omega t + \varphi) = Ri + L \frac{di}{dt} + u \tag{4}$$

$$i = C \frac{du}{dt}. \tag{5}$$

Din relațiile (4) și (5) se obține:

$$u_e = RC \frac{du}{dt} + LC \frac{d^2u}{dt^2} + u \tag{6}$$

sau prin aplicarea transformării Laplace, cu condițiile inițiale precizate:

$$\mathfrak{L}u = \frac{1}{LC} \cdot \frac{\mathfrak{L}u_e}{p^2 + p\frac{R}{L} + \frac{1}{LC}} = \frac{1}{LC} \cdot \frac{\mathfrak{L}u_e}{p^2 + 2p\delta + \omega_0^2} \tag{7}$$

unde s-a notat:

$$\left.\begin{aligned} \delta &= \frac{R}{2L} \\ \omega_0^2 &= \frac{1}{LC} \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

Pentru obținerea funcției original corespunzătoare funcției imagine (7) sînt de făcut două ipoteze:

Ipoteza I: $\delta^2 > \omega_0^2$, *regim aperiodic:*

Cu notațiile:

$$\omega_e^2 = \delta^2 - \omega_0^2 \tag{9}$$

$$\left.\begin{aligned} \psi_1 &= \operatorname{arc\ tg} \frac{\omega\delta}{\omega_0^2 - \omega^2} \\ \psi_2 &= \operatorname{arc\ tg} \frac{\omega}{\delta - \omega_e} \\ \psi_3 &= \operatorname{arc\ tg} \frac{\omega}{\delta + \omega_e} \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

expresia finală a tensiunii aperiodice de restabilire, dedusă în anexa 1 este:

$$u = \frac{\hat{E}\sin(\omega t + \varphi - \psi_1)}{C\omega\sqrt{R^2 + (L\omega - 1/C\omega)^2}} +$$

$$+ \frac{\hat{E}}{2\omega_e LC} e^{-\delta t}\left[\frac{e^{\omega_e t} \cdot \sin(\varphi - \psi_2)\cos\psi_2}{\delta - \omega_e} + \frac{e^{-\omega_e t}\sin(\varphi - \psi_3)\cos\psi_3}{\delta + \omega_e}\right] \tag{11}$$

În această expresie primul termen reprezintă o funcție sinusoidală de timp și al doilea, o componentă amortizată. Este de menționat că acest prim caz examinat nu prezintă interes din punct de vedere practic, deoarece condițiile în rețele sînt de natura celor care satisfac ipoteza 2.

Ipoteza II: $\omega_0^2 > \delta^2$, *regim oscilant amortizat.*

Cu notațiile:

$$\omega_e^2 = \omega_0^2 - \delta^2 \tag{12}$$

$$\left.\begin{aligned} \psi_1 &= \text{arc tg}\ \frac{\omega\delta}{\omega_0^2 - \omega^2} \\ \psi_2 &= \text{arc tg}\ \frac{\delta}{\omega_e - \omega} \\ \psi_3 &= \text{arc tg}\ \frac{-\delta}{\omega + \omega_e} \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

se obține expresia finală a tensiunii oscilante de restabilire, dedusă în anexa 2:

$$u = \frac{E \sin(\omega t + \varphi - \psi_1)}{C\omega\sqrt{R^2 + (L\omega - 1/C\omega)^2}} + \\ + \frac{\hat{E}\, e^{-\delta t}}{2\omega_e LC}\left[\frac{\sin(\omega_e t - \psi_2)}{\sqrt{\delta^2 + (\omega - \omega_e)^2}} - \frac{\sin(\omega_e t + \psi_3)}{\sqrt{\delta^2 + (\omega + \omega_e)^2}}\right] \tag{14}$$

Relația (14) reprezintă expresia tensiunei oscilante de restabilire. Primul termen al expresiei definește regimul staționar după întrerupere, iar termenul al doilea reprezintă componenta tranzitorie, oscilantă, amortizată.

3. *Modelul dinamic construit.* Schema de principiu a modelului este indicată în fig. 2. De la rețea, prin intermediul autotransformatorului *AT*,

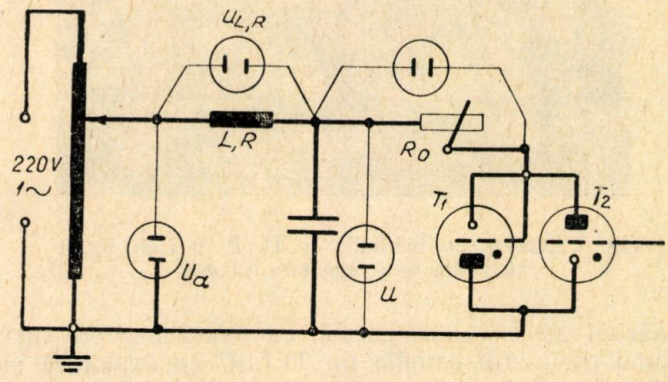


Fig. 2. Schema de principiu pentru verificarea funcționării corecte a întreruptorului ideal.

se alimentează modelul de rețea *L, R, C*. Întreruptorul este modelat prin tiratroanele T_1 și T_2 montate antiparalel. Tiratronul T_1 conduce, în regim de durată, toate alternanțele negative. Tiratronul T_1 conduce trei alternanțe (semiperioade) pozitive, iar în alternanța următoare (a patra) este blocat, astfel încît în această alternanță apare, la bornele întreruptorului modelat, tensiunea oscilantă de restabilire.

În fig. 2 s-au marcat mărimile electrice, care au fost studiate pentru verificarea funcționării corecte a funcționării schemei și mai ales a *întreruptorului ideal*, constituit din tuburile tiratron T_1 și T_2 montate în antiparalel, după cum urmează :

u — tensiunea de restabilire

i — curentul de scurtcircuit

$u_{L,R}$ — tensiunea la bornele inductivității cu rezistență.

u_a — tensiunea de alimentare.

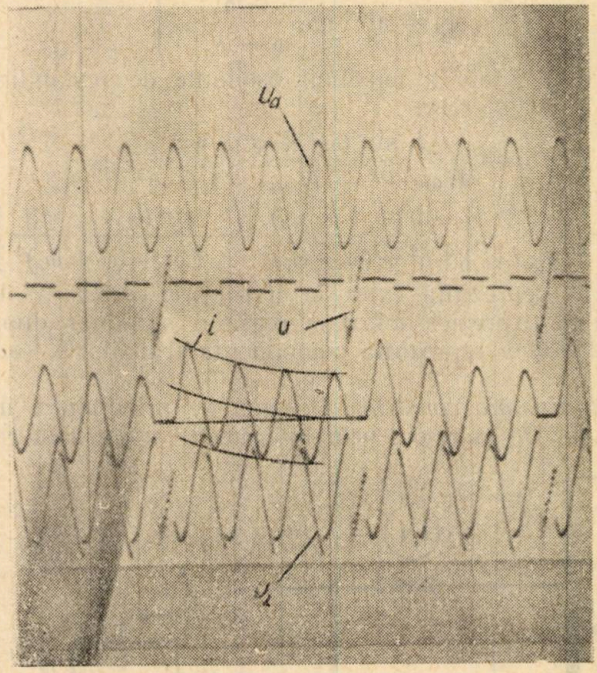


Fig. 3. Oscilograma mărimilor u U R u i din fig. 2 cu viteza de înregistrare 0,4 m/s.

Aceste mărimi au fost înregistrate, ca fenomene care nu se repetă, cu ajutorul unui oscilograf catodic tip TELEC cu explorare mecanică și intrare pe plăci. În acest mod fenomenele nu sînt deformate ca în cazul înregistrării mărimilor cu ajutorul oscilografului cu bucle.

În fig. 3 este dată oscilograma corespunzătoare mărimilor menționate. Funcționarea corectă a schemei rezultă din :

— Repetarea fenomenului la fiecare 8 semiperioade (7 de conducție, a 8-a de blocaj). Această repetare permite vizionalizarea fenomenului pe ecranul unui osciloscop catodic.

— Existența componentei de curent continuu amortizate în curentul de scurtcircuit, ca urmare a stabilirii scurtcircuitului la un moment diferit

de momentul trecerii prin zero a curentului de scurtcircuit prezumat, adică $\alpha = \varphi - \psi \neq 0$. Amortizarea componentei de curent continuu are loc după aproximativ șase perioade.

— Conducția de durată neegală, în regim tranzitoriu de scurtcircuit a tuburilor T_1 și T_2, ca urmare a stingerii tubului numai la trecerea prin zero a curentului.

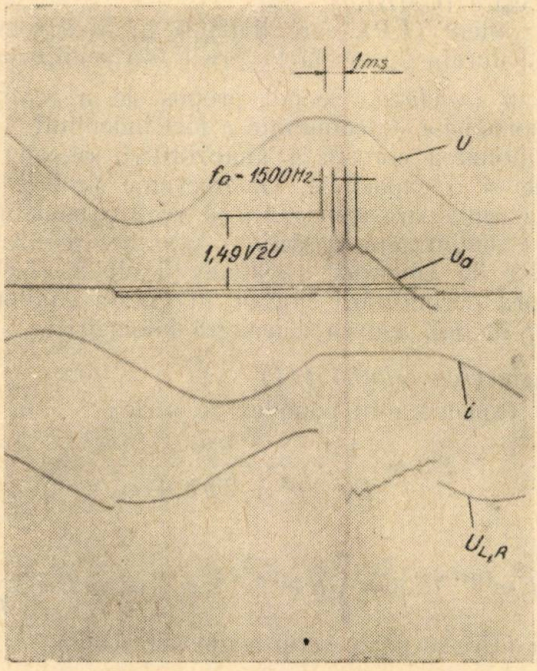


Fig. 4. Oscilograma mărimilor u u R u, i din fig. 2 cu viteza de înregistrare de 4 m/s.

— Existența unei tensiuni de rest, tensiunea arcului electric, în tiratron de cca. 12 V.

In fig. 4 este dată oscilograma de verificare a funcționării corecte a schemei, ridicată la viteza de 4 m/s. Aci se poate remarca frecvența proprie de oscilație a tensiunii de restabilire u de 1500 Hz și factorul de oscilație $\delta = 1{,}49$.

4. *Blocul de comanda tiratronului* T_2 [1]) Rolul funcțional al blocului de comandă, indicat în fig. 5 este de a trimite pe grila tiratronului T_2 un impuls negativ (de blocare) la fiecare a 8-a semiperioadă. Impulsul are durata de 20 ms și amplitudinea de 24 V.

[1]) Acest bloc a fost realizat de tov. ing. Brana C. din cadrul IPA, pe baza unor elemente tip elaborate anterior în laboratorul condus de tov. ing. Cleja Vladimir.

Acest impuls se obține de la o schemă cu tranzistoare formată din:

— 1 element de formare F, care primește o tensiune alternativă de 2 V, reglabilă ca fază cu ajutorul unui potențiometru de 50Ω și care la ieșire livrează un impuls dreptunghiular, cu durata de 20 ms (F).
— etaje de numărare, care numără trecerile prin zero ale tensiunei alternative într-un sens dat ($N1...N4$).
— 1 etaj de ieșire (CMB).
— 1 etaj de putere (EP), care livrează în final tensiunea negativă de 24 V și durata 20 ms la fiecare a 8-a semiperioadă.

5. *Rezultate și concluzii.* Scopul propus de a realiza un analizor pentru studiul fenomenelor de comutație a fost îndeplinit. În această etapă s-a verificat funcționarea corectă a analizorului, rețeaua fiind înlocuită cu o inductivitate și o capacitate, cu frecvențe proprii de oscilație de 1500 Hz. În etapa următoare urmează a se realiza modelul de rețea, conform relațiilor de similitudine stabilite. Aparatul realizat va servi atît efectuării lucrărilor de laborator cu studenții cît și efectuării lucrărilor de cercetare asupra deconectării liniilor în gol, a liniilor în sarcină, a transformatoarelor în gol, asupra defectului kilometric.

Anexa 1: Deducerea relației (11)

Expresia (7) exprimată în complex se scrie:

$$\mathfrak{L}u = \frac{1}{LC} \cdot \frac{\mathfrak{L}u_e}{p^2 + 2p\delta + \omega_0^2} \tag{15}$$

unde

$$\mathfrak{L}u_e = \mathfrak{L}\left\{\hat{E} \cdot e^{j(\omega t + \varphi)}\right\} = \int_0^\infty \hat{E}\, e^{j(\omega t + \varphi)}\, e^{-pt}\, dt = \hat{E}\, e^{j\varphi} \frac{1}{p - j\omega}.$$

Deci expresia (15) se poate scrie acum sub forma:

$$\mathfrak{L}u = \frac{\hat{E}}{LC} \cdot e^{j\varphi} \frac{1}{(p - j\omega)(p^2 + 2p\delta + \omega_0^2)}. \tag{16}$$

Pentru obținerea funcției original se aplică formula de dezvoltare a lui Heaviside:

$$u(t) = \sum_{k=1}^{n} \frac{G(p_k)}{H'(p_k)}\, e^{p_k t} \tag{17}$$

În ipoteza că $\delta^2 > \omega_0^2$, rădăcinile numitorului sînt:

$$\left.\begin{aligned} p_1 &= j\omega \\ p_2 &= -\delta + \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2} = -\delta + \omega_e \\ p_3 &= -\delta - \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2} = -\delta - \omega_e \\ \text{iar } \omega_e^2 &= \delta^2 - \omega_0^2 \end{aligned}\right\} \tag{18}$$

Cu $H'(p) = p^2 + 2p\delta + \omega_0^2 + 2(p+\delta)(p - j\omega)$ rezultă :

$$\left.\begin{aligned} H'(p_1) &= -\omega^2 = 2j\omega\delta + \omega_0^2 \\ H'(p_2) &= 2\omega_e(\omega_e - \delta - j\omega) \\ H'(p_3) &= 2\omega_e(\omega_e + \delta + j\omega) \end{aligned}\right\} \tag{19}$$

Relația (17) se poate explicita după cum urmează :

$$\underline{u}(t) = \frac{E}{LC} e^{j\varphi}\left[\frac{e^{j\omega t}}{-\omega^2 + 2j\omega\delta + \omega_0^2} + \frac{e^{(\omega_e - \delta)t}}{2\omega_e(\omega_e - \delta - j\omega)} + \frac{e^{-(\delta+\omega_e)t}}{2\omega_e(\omega_e + \delta + j\omega)}\right] \tag{20}$$

Dacă în relația (20) eliminăm cantitățile complexe de la numitor și se ține seama de notațiile (10), se obține :

$$\underline{u}(t) = \frac{\hat{E}}{LC}\left[\frac{e^{j(\omega t+\varphi)} \cdot e^{-j\psi_1}}{\sqrt{4\omega^2\delta^2 + (\omega_0^2 - \omega^2)^2}} + \frac{e^{j\varphi} \cdot e^{(\omega_e - \delta)t} \cdot e^{-j\psi_2}}{2\omega_e\sqrt{(\omega_e - \delta)^2 + \omega^2}} + \right.$$
$$\left. + \frac{e^{j\varphi} \cdot e^{-(\delta+\omega_e)t} \cdot e^{-j\psi_3}}{2\omega_e\sqrt{(\omega_e + \delta)^2 + \omega^2}}\right] \tag{21}$$

Pentru obținerea soluției în final se execută operația :

$$u(t) = Im\,[\underline{u}(t)] \text{ și deci :}$$

$$u(t) = \frac{\hat{E}}{LC}\left[\frac{\sin(\omega t + \varphi - \psi_1)}{\sqrt{4\omega^2\delta^2 + (\omega_0^2 - \omega)^2}} + \frac{e^{(\omega_e - \delta)t} \cdot \sin(\varphi - \psi_2)}{2\omega_e\sqrt{(\omega_e - \delta)^2 + \omega^2}} + \right.$$
$$\left. + \frac{e^{-(\delta+\omega_e)t} \cdot \sin(\varphi - \psi_3)}{2\omega_e\sqrt{(\omega_e + \delta)^2 + \omega^2}}\right]. \tag{22}$$

Prin transformări simple, ținînd cont de relațiile (8), (9) și (10) se ajunge la relația finală (11).

Anexa 2 : Deducerea relației (14).

În ipoteza că $\omega_0^2 > \delta^2$ rădăcinile numitorului ecuației (16) sînt :

$$\left.\begin{aligned} p_1 &= j\omega \\ p_2 &= -\delta + j\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} = -\delta + j\omega_e \\ p_3 &= -\delta - j\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} = -\delta - j\omega_e \end{aligned}\right\} \tag{23}$$

iar $\omega_e = \omega_0^2 - \delta^2$.

Cu $H'(p) = p^2 + 2p\delta + \omega_0^2 + 2(p+\delta)(p - j\omega)$ rezultă :

$$\left.\begin{aligned} H'(p_1) &= -\omega^2 + 2j\omega\delta + \omega_0^2 \\ H'(p_2) &= 2\omega_e(\omega - \omega_e - j\delta) \\ H'(p_3) &= 2\omega_e(-\omega - \omega_e + j\delta) \end{aligned}\right\} \tag{24}$$

Acum se poate scrie explicit formula de dezvoltare (17) :

$$\underline{u}(t) = \frac{\hat{E}e^{j\varphi}}{LC}\left[\frac{e^{j\omega t}}{\omega_0^2 - \omega^2 + 2j\omega\delta} + \frac{e^{-(\delta+j\omega_e)t}}{2\omega_e(\omega - \omega_e - j\delta)} + \frac{e^{-(\delta+j\omega_e)t}}{2\omega_e(-\omega - \omega_e + j\delta)}\right] \quad (25)$$

Prin eliminarea cantităților complexe de la numitor și ținînd seama de relațiile (13) se obține :

$$\underline{u}(t) = \frac{\hat{E}}{LC}\left[\frac{e^{j(\omega t+\varphi-\psi_1)}}{\sqrt{4\omega^2\delta^2 + (\omega_0^2 - \omega^2)^2}} + \right.$$

$$\left. + \frac{e^{-\delta t}\cdot e^{j\omega_e t}\cdot e^{-j\psi_2}}{2\omega_e\sqrt{\delta^2 + (\omega - \omega_e)^2}} + \frac{e^{-\delta t}\cdot e^{-j\omega_e t}\cdot e^{-j\psi_3}}{2\omega_e\sqrt{\delta^2 + (\omega + \omega_e)^2}}\right] \quad (26)$$

Pentru obținerea funcției $u(t)$ se ia partea imaginară :

$$u(t) = I_m[\underline{u}(t)]$$

$$u(t) = \frac{\hat{E}}{LC}\cdot\frac{\sin(\omega t + \varphi - \psi_1)}{\sqrt{4\omega^2\delta^2 + (\omega_0 - \omega)^2}} +$$

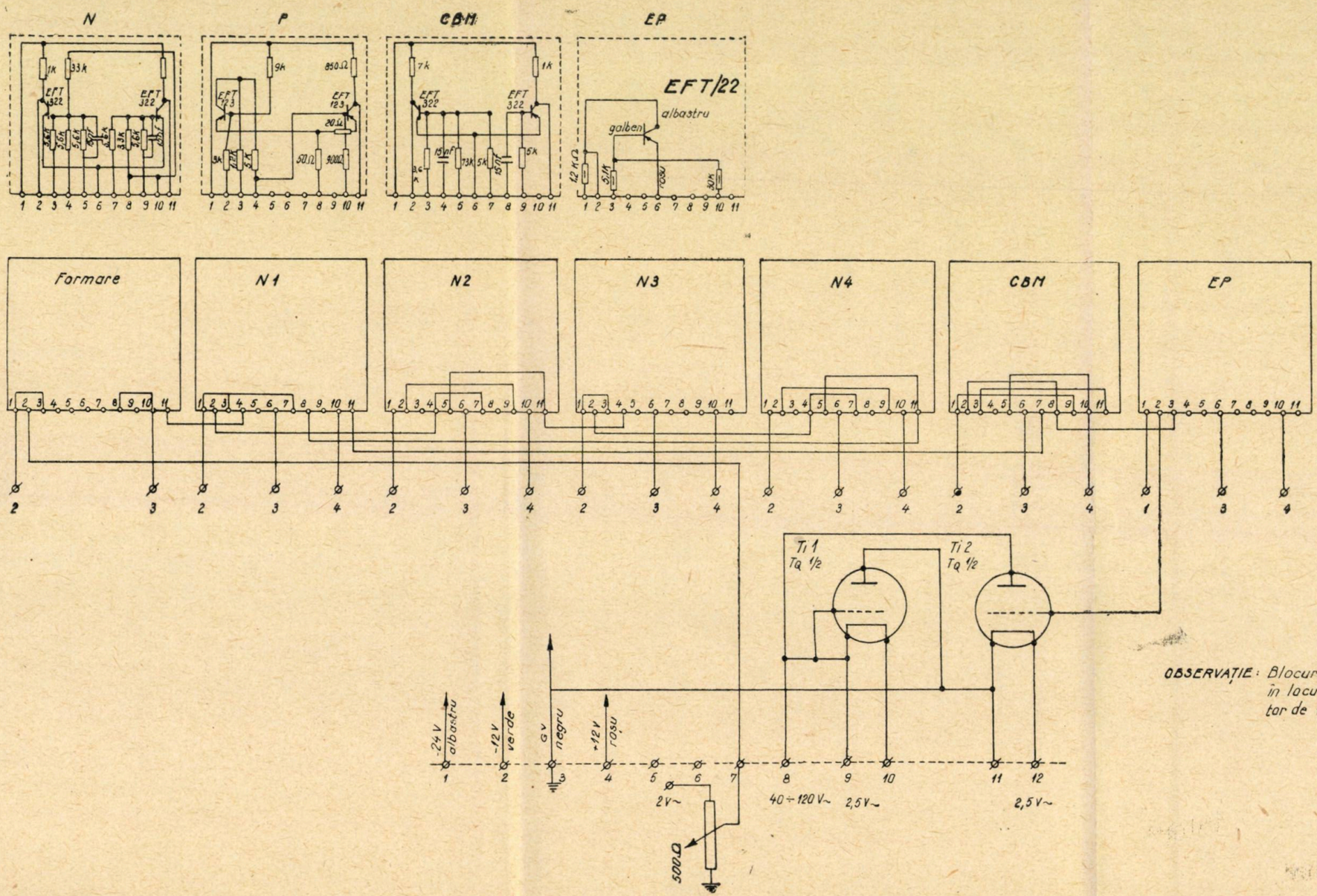
$$+ \frac{e^{-\delta t}\hat{E}}{2\omega_e LC}\left[\frac{\sin(\omega_e t - \psi_2)}{\sqrt{\delta^2 + (\omega - \omega_e)^2}} - \frac{\sin(\omega_e t + \psi_3)}{\sqrt{\delta^2 + (\omega + \omega_e)^2}}\right]. \quad (27)$$

După transformări simple, ținînd seama de relațiile (8) și (12) se obține relația (14).

Catedra de măsuri și aparate electrice
Institutul politehnic București

BIBLIOGRAFIE

1. * * * Regles de la CEI pour le disjoncteur à courant alternatif. Publ. nr. 56 Génève, 1954.
2. *Butchevici, I. V.:* Partea electrică a centralelor și stațiilor electrice. Traducere din limba rusă, EES, București, 1953.
3. *Sirotinski, L. L.:* Tehnica tensiunilor înalte. G.E.I. Moscova-Leningrad 1951.
4. *Belousov M. M.:* Vitezele de restabilire a tensiunii la contactele întreruptorului în sistemele energetice de mare putere. Elektricestvo 77 (1957) 4, 21.
5. *Orgeret L., Renaud I.:* Le disjoncteur à haute tension et les vitesses de retablissment des tensions élévées. Le défaut kilométrique. Bul. Soc. El. 7 serie 9 (1959) 108.
6. *Hochrainer A.:* Proposition relative à la détermination d'une tension transitoire de retablissment équivalente pour les disjoncteurs (Méthode de quatre paramètres) Anexe II Rap. 151 CIGRE, 1958.
7. *Hochrainer A.:* Der Abstandskürzschluss ETZ A 80 (1959) H 3, 65—70.
8. *Maury E., Lavant M.; Vigreux I.:* Le Cerda (Centre d'Essaiss et de Recherches Delle-Alsthom) RGE 44 (1960) Tome 69 nr. 3, 135—174.



OBSERVAȚIE: Blocurile N1 și N3 au pe intrarea 4 și 9 în locul rezistenței de 5,6K un condensator de 15 nf

Fig. 5. Schema de principiu a blocului de comanda tiratronului T_2

9. *Fourmarier P.:* New experimental metods for determining restriking voltage. Results obtaind on the Belgium sistems. CIGRE Rap. 117, 1950.

10. *Hochrainer A., Kriechbaum K.:* Verfahren zum Bestimmen der Einschwingspannung. ETZ A 77 (1956) H. 20, 721—724.

11. *Cernisev N. M. Arzaiev A. M.:* Aparat pentru comandă automată a experiențelor în laborator la puteri de rupere. Electricestvo 79 (1959) 50.

12. *Hortopan, Fh.:* Comutator program pentru încercarea aparatajului de comutație. Electrotehnica 7 (1959) 4, 135—139.

13. *Kriechbaum, K.:* Netzanalisator sur Messung der Einschwingspannung. ETZ A 78 (1957) H 17, 593—599.

14. *Bretschneider G.:* Die Messung der wiederkehrenden Spannung mit Hilfe des Netzmodelles, nr. 331 Studiengesellschaft f. H. e. V., Ruit Westdeutscher Verlag/Köln u. Opladen 1956.

15. *Kriechbaum K.:* Uber die Messung der Einschwingspannung im Netzanalysator. ETZ A 80 (1959) H 7, 193—196.

16. *Hortopan, Gh.:* Analizorul de rețea pentru studiul fenomenelor tranzitorii. Electrotehnica 8 (1960) 12, p. 417—425.

17. *Dinculescu, C.; Hortopan, Gh.:* Comportarea întreruptoarelor în serviciu. Sesiunea de comunicări de electrotehnică din cadrul MIC, anul 1962.

8. *Novotny, Vl.:* Die Methode der Schalterprüfung beim Abschalten von Kurzschlussströmen, kleinen induktiven und kapazitiven Strömen. Tagungsbericht der III. Internationalen Kolloquiums der Hochschule für Elektrotechnik Ilmenau, 1959.

9. *Baltensperger:* Forme et grandeur des surtensions apparaissant lors de la conpure de faibles comants inductifs et capacitifs dans les réseaux à haute tension. Rev. B. Boveri 47 (1960) 4, p. 195—224.

10. *Cernisev, N. M.:* Circuite echivalente pentru încercarea întreruptoarelor, în ce privește întreruperea liniilor în gol. VEI, Moscova, Simposion Praga 1959.

11. *Nasko, H.:* Nachbildung von leerlaufenden Leitungen im Hochleistungs-Prüffeld. AEG Mitt. 52 (1962) 317—329.

BULETINUL INSTITUTULUI POLITEHNIC BUCUREȘTI
Tomul XXVI — 1964, Fascicola 6

ELECTRONICĂ

C.Z.: 621.382.3

INFLUENȚA MULTIPLICĂRII PURTĂTORILOR DE SARCINĂ IN JONCȚIUNEA COLECTORULUI ASUPRA CURENTULUI DE EMITOR, LA TRANZISTOARELE PNP DE GERMANIU, ALIATE

C. BULUCEA, S. CSERVENY

Introducere

Funcționarea dispozitivelor semiconductoare în regim de multiplicare în avalanșă este studiată într-un număr mare de lucrări. In aceste lucrări se au în vedere procesele fizice ale ionizării în avalanșă, implicațiile multiplicării asupra circuitului de curent continuu și de curent alternativ al tranzistorului sau aplicațiile tranzistoarelor cu multiplicare în avalanșă.

Lucrarea de față își propune studierea caracteristicilor de intrare ale tranzistoarelor cu multiplicare în avalanșă la joncțiunea colectorului — problemă neatacată în literatura consultată — pornind de la observarea experimentală a influenței multiplicării asupra acestor caracteristici. In plus, se fac unele observații de ordin experimental asupra comportării tranzistoarelor EFT la tensiuni mari de colector.

*
* *

Joncțiunea colector-bază a unui tranzistor cu emitorul în gol ($i_E = O$) admite o caracteristică similară cu a unei diode alimentată invers. Teoretic, pe o asemenea caracteristică, ar trebui ca, în regiunea tensiunilor normale de lucru, curentul să aibe o valoare constantă, I_{CO}, independentă de tensiunea de colector. Valoarea curentului rezidual de colector depinde de caracteristicile fizice și geometrice ale tranzistorului și de temperatură. Se arată că [1]

$$I_{CO} = S_E \frac{e D_p p_n}{w} \left(\frac{w}{L_p}\right)^2 + (S_C - S_E) \frac{e D_p p_n}{w}, \qquad (1)$$

* Lucrare comunicată la sesiunea științifică a cadrelor didactice din Institutul politehnic București 22—23 februarie 1964.

în care:

S_E este secțiunea joncțiunii emitorului,
S_C — secțiunea joncțiunii colectorului,
e — sarcina electronului,
D_p — constanta de difuzie a golurilor în bază,
L_p — lungimea de difuzie a golurilor în bază,
p_n — concentrația golurilor, la echilibru termic, în bază,
w — grosimea efectivă a bazei.

Dependența curentului rezidual de temperatură apare datorită creșterii exponențiale a concentrației intrinseci de purtători cu temperatura. Se arată că [2]

$$I_{CO} = \text{const } T^m \exp\left(-\frac{b}{T}\right), \tag{2}$$

unde T este temperatura absolută a joncțiunii iar exponentul m are valoarea 2,3 pentru germaniu; constanta b este egală cu 6000 °K.

În apropierea tensiunii de străpungere U_{CS}, este de așteptat o creștere foarte puternică a curentului datorită efectului de multiplicare în avalanșă. Se definește factorul de multiplicare M,

$$M = \frac{1}{I_{CO}} \cdot i_C \Big|_{i_E = 0} \tag{3}$$

pentru care se acceptă expresia empirică [3]

$$M = \left[1 - \left(\frac{u_{CB}}{U_{CS}}\right)^n\right]^{-1} \tag{4}$$

cu $n=3$ pentru germaniu.

1. Observații asupra comportării tranzistoarelor EFT la tensiuni mari de colector

Experiențele din lucrarea de față au fost făcute cu tranzistoare de joasă frecvență de tip *EFT* 321, 322, 323, 351, 352, 353. S-a constatat că la o parte din aceste tranzistoare (în special la *EFT* 352) apare efectul de penetrare a bazei la tensiuni mai mici decît tensiunea de străpungere în avalanșă. S-au eliminat de la început aceste tranzistoare din studiu.

Trebuie observat că, pe caracteristicile experimentale din figura 1 și figura 2, nu se poate face o verificare cantitativă a relațiilor (3) și (4). Aceste relații explică numai alura curbelor experimentale care au, în general, o creștere mai puțin abruptă decît cea teoretică. Abaterile se pot datora unor efecte cum ar fi efectele termice, efectele de suprafață, generarea de purtători în regiunea de trecere și efectul Zener.

Efectele termice, ducînd la o creștere mai pronunțată a curentului pe o caracteristică reală față de cea teoretică, izotermă, nu pot explica abaterea semnalată. Aceste efecte sînt esențiale numai la multiplicări mari, determinînd în cele din urmă întoarcerea termică a caracteristicii, pusă

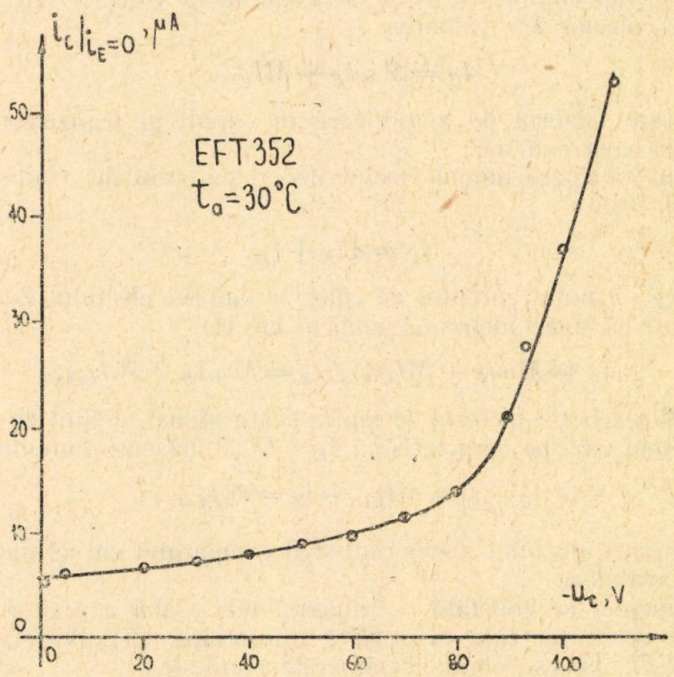


Fig. 1 — Caracteristica curent-tensiune a joncțiunii colector-bază invers alimentată la un tranzistor *EFT* 352.

în evidență experimental. În lucrarea [4] se calculează efectul temperaturii și se ajunge la concluzia că creșterea curentului din cauza temperaturii este mai mică decît de 2,72 ori.

Efectele de suprafață și generarea de purtători afectează valoarea curentului de saturație, determinînd o creștere de tip logaritmic, respectiv de exponent ½, ori, curbele experimentale acuză o creștere mai rapidă.

În ceea ce privește efectul Zener, în literatură [5] se arată că, la diodele de germaniu aliat în indiu, acesta apare la rezistivități ale bazei mai mici decît 0,5 Ω cm, iar la rezistivități mai mari ca 2 Ω cm apare ionizarea în avalanșă. Tranzistoarele experimentate aveau rezistivități cuprinse între 1,5 și 4 Ω cm. Este deci posibilă și apariția combinată a celor două fenomene, în final predominînd multiplicarea în avalanșă, se menționează [6] că ionizarea în avalanșă este însoțită de un zgomot electric, lucru care s-a constatat la tranzistoarele experimentale.

Menționăm că au fost încercate mai multe tranzistoare de joasă frecvență de tip *EFT*, precum și tranzistoare II 2 și II 13, fără a se putea pune în evidență o caracteristică abruptă.

Acceptînd teoriile actuale, deosebirea între cazul tranzistorului cu multiplicare și cazul cu efect Zener sau cu ambele efecte, apare în legătură cu influența emitorului asupra curentului de colector. În primul caz, curentul de colector are valoarea

$$i_C = M\alpha i_E + MI_{CO}, \tag{5}$$

în care α este factorul de amplificare în curent al tranzistorului în conexiunea cu baza comună.

În cazul că apare numai efectul Zener, curentul de emitor nu suferă multiplicare, deci

$$i_C = \alpha i_E + i_Z, \tag{6}$$

unde prin i_Z s-a notat curentul de colector datorat efectului Zener.

În cazul că apar împreună ambele efecte,

$$i_C = M\alpha i_E + MI_{CO} + i_Z = M\alpha i_E + \mathfrak{M}I_{CO}, \tag{7}$$

unde prin $\mathfrak{M}$ s-a notat factorul de multiplicare global, definit de relația (7).

În ultimul caz, pe caracteristici $i_E = O$ se măsoară curentul

$$i_C|_{i_E=0} = MI_{CO} + i_Z = \mathfrak{M}I_{CO}, \tag{8}$$

termenul datorat efectului Zener putînd fi comparabil cu cel datorat multiplicării în avalanșă.

Experimental se constată o influență mai slabă a emitorului asupra colectorului decît cea care ar rezulta din relația (5). Astfel, pentru un tranzistor *EFT* 351, se obțin următoarele rezultate:

$$i_C = I_{CO} = 5\ \mu A \text{ la } i_E = 0,\ u_{CB} = -5\ V,$$

$$i_C = 500\ \mu A \text{ , la } i_E = 0,\ u_{CB} = -70\ V \text{ și}$$

$$i_C = 650\ \mu A \text{ , la } i_E = 100\ \mu A,\ u_{CB} = -70\ V,$$

ceea ce ar duce la un factor de amplificare în curent

$$\alpha^* = M\alpha \approx M = \frac{i_C - i_C|_{i_E=0}}{i_E} = \frac{150}{100} = 1{,}5,$$

mult mai mic decît valoarea care s-ar calcula din multiplicarea curentului rezidual de colector, I_{CO} presupunînd că există numai multiplicare în avalanșă:

$$M = \frac{i_C|_{i_E=0}}{I_{CO}} = \frac{500}{5} = 100.$$

Se poate ține seama și de mărirea curentului I_{CO} cu temperatura, datorată încălzirii joncțiunii, calculîndu-se astfel multiplicarea reală a cu-

rentului. Valoarea curentului I_{CO} la temperatura respectivă a joncțiunii se poate determina experimental măsurînd curentul rezidual imediat după comutarea tensiunii de colector de la valoarea respectivă la o valoare mai mică, de exemplu 5 V. In acest fel s-a măsurat $I_{CO}(T)=10\ \mu A$ în exemplul considerat, ceea ce duce tot la o multiplicare mare a curentului rezidual (50).

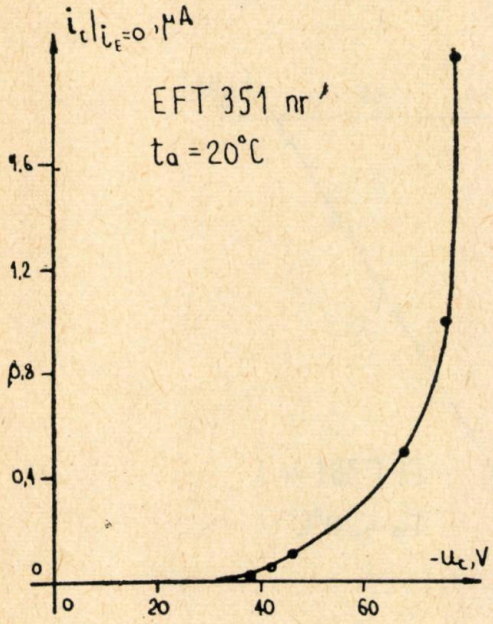


Fig. 2 — Caracteristica curent-tensiune joncțiunii colector-bază invers alimentată un tranzistor *EFT* 351.

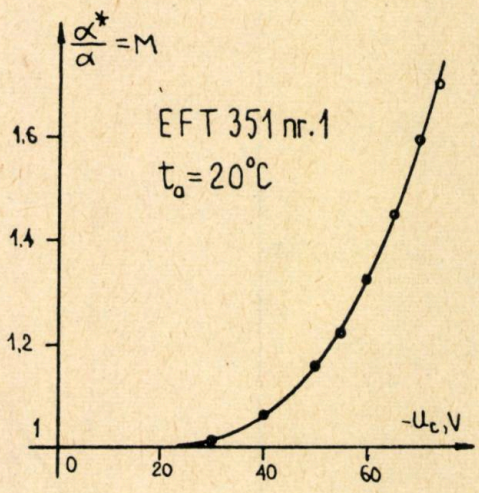


Fig. 3 — Curba $M=f(u_c)$ la un tranzistor *EFT* 351.

Rezultă că, la acest tranzistor, multiplicarea în avalanșă apare numai cu un factor de 1,5, restul creșterii curentului de colector fiind datorat efectul Zener sau altor efecte *).

In cele ce urmează se va presupune o relație de forma

$$i_C=\alpha^* i_E+\mathfrak{M}I_{CO}, \tag{9}$$

valabilă și în prezența efectului Zener sau a altor efecte.

Valoarea mică a factorului de amplificare global, determinată în curent continuu este confirmată și de măsurători de curent alternativ.

*) Este posibilă și o multiplicare mai mare, valoarea mică a factorului α^* datorîndu-se unei scăderi a factorului de curent α în prezența multiplicării. Intr-adevăr, prin multiplicare în avalanșă, se produce o injecție puternică de electroni în bază, care poate consuma, prin recombinare, o fracțiune mai importantă a curentului de goluri injectat de emitor decît 1-α. Acest lucru este de așteptat, deoarece valoarea factorului de curent α a fost dedusă în teoria la nivelele mici de injecție, fără a presupune o injecție de electroni la colector.

S-au determinat curbele factorului de amplicare în curent în funcție de tensiunea de colector pentru $i_E = 0{,}5\ mA$ și $i_E = 1\ mA$, pentru un tranzistor *EFT* 351 și un tranzistor *EFT* 321, crescînd tensiunea de colector pînă la ambalarea termică a tranzistorului (fig. 3; 6). Se observă o creștere maximă de 1,65 ori a factorului de amplificare în curent la *EFT* 351 și de 1,1 ori la *EFT* 121.

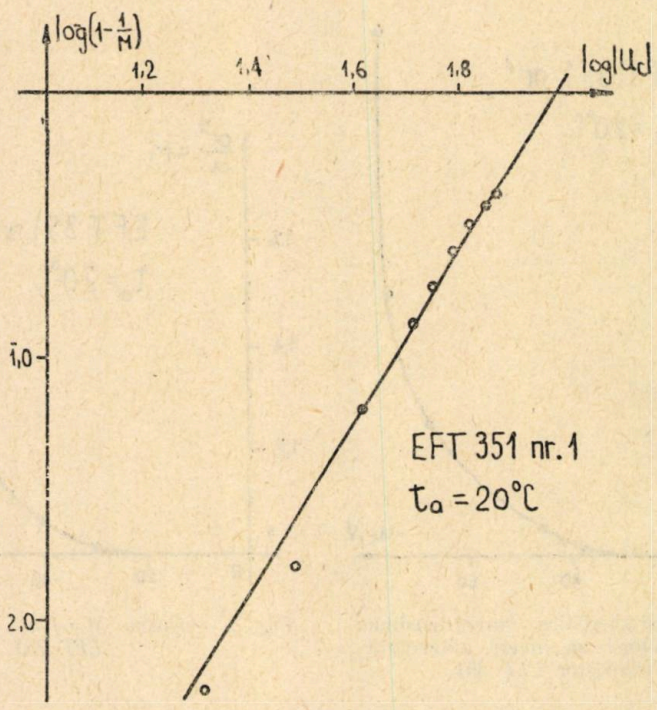


Fig. 4 — Curba $\log(1-1/M)=f(\log|u_c|)$ la un tranzistor *EFT* 351.

Montajul de măsură este dat în figura 7, unde, condiția de scurtcircuit la ieșire a fost realizată cu $R = 100\ \Omega$. Se face observația că, în prezența multiplicării în avalanșă, condiția de scurtcircuit la ieșire este mai greu de îndeplinit, datorită creșterii conductanței colectorului în acest regim. S-a constatat că o rezistență de 1 $k\Omega$, suficientă la tensiuni normale de colector, nu mai satisface această condiție. Faptul că, cu rezistența de 100 Ω s-a îndeplinit condiția de scurtcircuit la ieșire este asigurat de observația că aceleași rezultate se obțin cu $R = 10\ \Omega$.

La curba din figura 3 ar trebui să fie îndeplinită relația

$$\log\left(1-\frac{1}{M}\right) = n\log|u_C| - n\log|U_S| \qquad (10)$$

În figura 4 s-a trasat curba $\log\left(1-\frac{1}{M}\right)$ în funcție de $\log|u_C|$ și s-au obținut, într-adevăr puncte care pot fi considerate pe o dreaptă. Pe această dreaptă, se determină $n = 1{,}57$ și $U_S = 157{,}5\text{V}$.

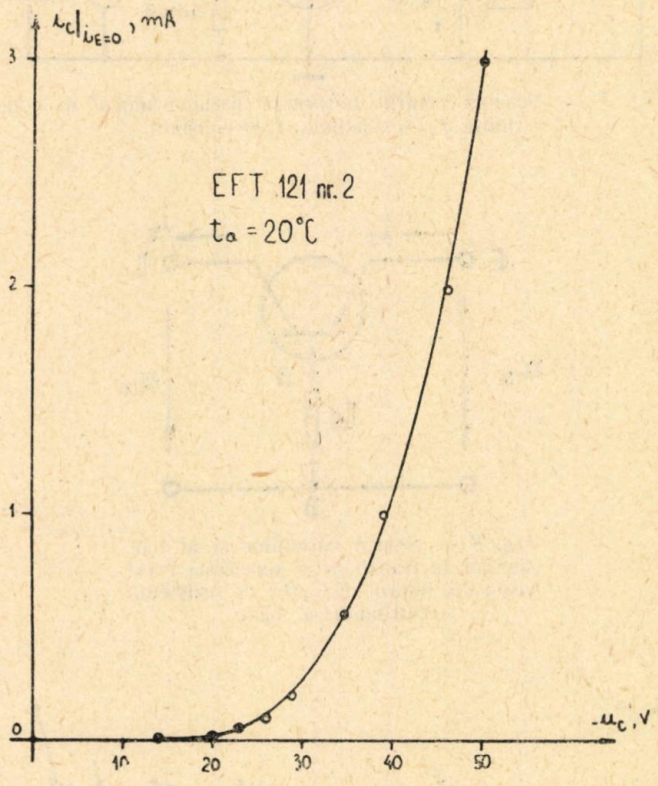


Fig. 5 — Caracteristica curent-tensiune a joncțiunii colector-bază invers alimentată la un tranzistor *EFT* 121.

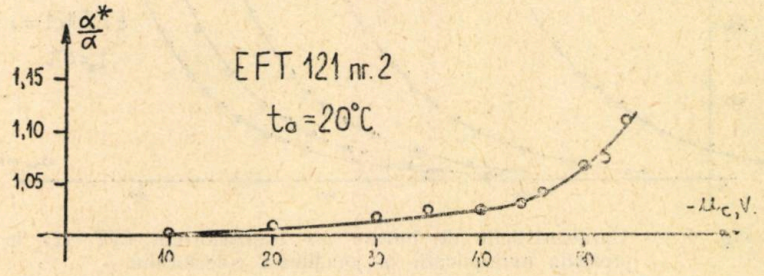


Fig. 6 — Curba $M = f(u_C)$ la tranzistorul *EFT* 121.

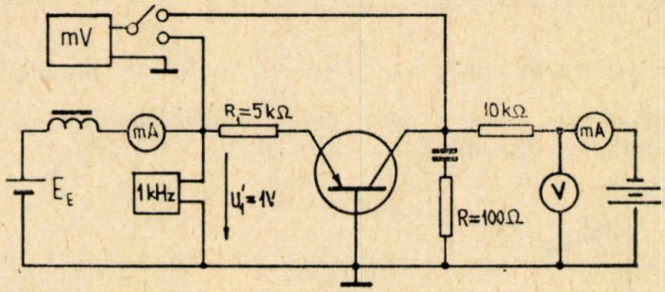


Fig. 7 — Schemă pentru măsurarea parametrului α^* în condițiile I_E = constant, I_e = constant.

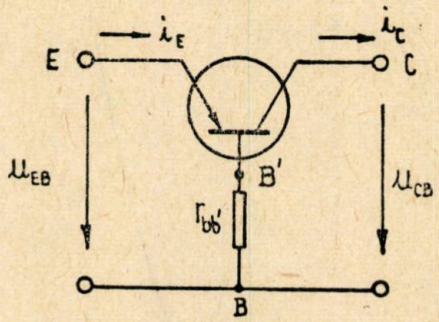


Fig. 8 — Sensul curenților și al tensiunilor la tranzistor și separarea tranzistorului intern (E, C, B') de rezistența distribuită a bazei.

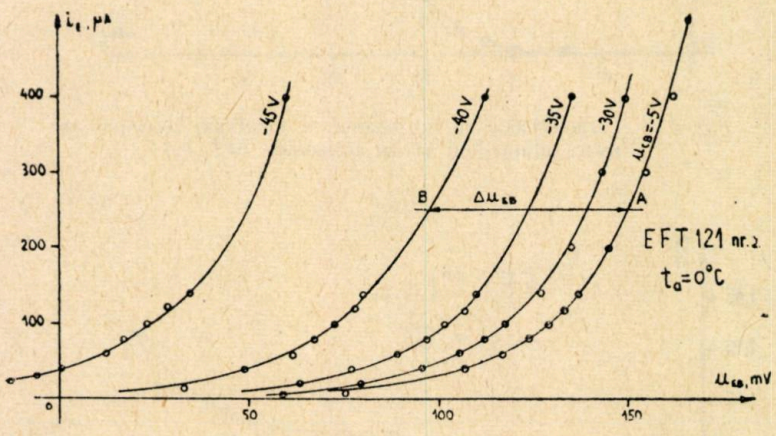


Fig. 9 — Caracteristicile de intrare ale tranzistorului *EFT* 121 în prezența multiplicării la joncțiunea colectorului.

2. Efectul rezistenței distribuite a bazei, $r_{bb'}$ asupra caracteristicilor de intrare

In teoria tranzistorului la nivele mici de injecție se găsește următoarea ecuație a caracteristicilor de intrare ale tranzistorului:

$$I_E \approx S_E \frac{e D_p p_n}{w} \exp\left(\frac{e u_E}{k T}\right) \tag{11}$$

în care u_E este tensiunea aplicată nemijlocit joncțiunii emitor-bază. Această tensiune diferă de tensiunea u_{EB} între terminalele tranzistorului, din cauza căderii de tensiune pe rezistența distribuită a bazei (fig. 8).

$$u_E = u_{EB} + r_{bb'} i_B \tag{12}$$

La tensiuni de colector normale, curentul de bază este mic (zeci de μA) și căderea de tensiune pe rezistența $r_{bb'} = 20 \div 50\ \Omega$ este neglijabilă în comparație cu tensiunea $u_{EB} = 0{,}1 \div 0{,}3$ V, astfel că

$$u_E \approx u_{EB}. \tag{13}$$

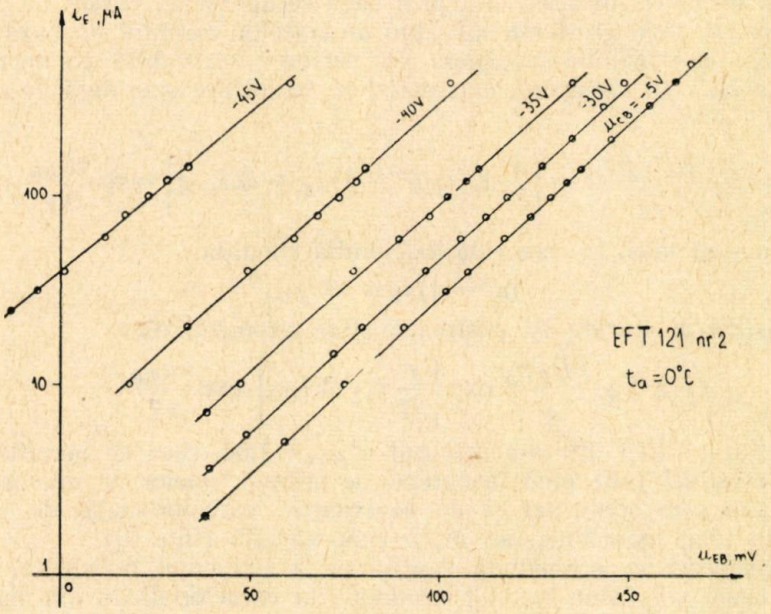


Fig. 10 — Caracteristicile de intrare ale tranzistorului *EFT* 121, afectate de multiplicare, trasate în scară logaritmică.

Curbele din fig. 9 și fig. 11, pentru tensiuni de colector mici, reprezintă o verificare foarte bună a relației (11); alura exponențială se observă trasînd caracteristica la scară logaritmică (fig. 10; 12) și panta caracteristicilor are o valoare foarte apropiată de kT/e (23,6 mV față de $kT/e = 23{,}5$ mV).

Conform relației (11), tensiunea de colector trebuie să influențeze în mică măsură caracteristicile de intrare, prin modificarea grosimii efective a bazei :

$$w = w_o - k\sqrt{|u_{CB}|}, \tag{14}$$

unde w_o este grosimea efectivă a bazei la $u_{CB} = O$.

O creștere foarte mare a curentului de emitor ar putea apare din această cauză dacă grosimea bazei ar scădea foarte mult, deci la valori ale tensiunii de colector apropiate de tensiunea de penetrare. Într-adevăr, o modificare a caracteristicilor de intrare inexplicabilă altfel a fost observată la tranzistoare *EFT* 352, care manifestau fenomenul de penetrare. Excluzînd din experiențe tranzistoarele cu penetrare, micșorarea grosimii bazei nu explică în suficientă măsură modificarea caracteristicilor de intrare la tensiuni mari de colector.

O explicare care a putut fi verificată experimental cantitativ se poate da pe baza efectului rezistenței distribuite a bazei. Într-adevăr, în prezența unei multiplicări în avalanșă sau a efectului Zener la joncțiunea colectorului, căderea de tensiune pe rezistența bazei nu mai poate fi neglijată, deoarece, în acest caz, prin bază se derivă un curent de ordinul miliamperilor. Prin creșterea tensiunii de colector, curentul de bază crește ($i_B \approx i_C$), determinînd o cădere de tensiune favorabilă conducției pe rezistența $r_{bb'}$. În acest caz, caracteristica de intrare este dată de ecuația implicită

$$i_E = S_E \frac{e D_p p_n}{w} \exp\left\{\frac{e}{kT} r_{bb'}[(\alpha^* - 1) i_E + \mathfrak{M} I_{CO}]\right\} \cdot \exp\frac{e u_{EB}}{kT} \tag{15}$$

Pentru curenți mici, la care este îndeplinită condiția

$$(\alpha^* - 1) i_E \ll \mathfrak{M} I_{CO}, \tag{16}$$

caracteristica de intrare își păstrează alura exponențială ;

$$i_E \approx S_E \frac{e D_p p_n}{w} \exp\left[\frac{e}{kT} r_{bb'} \mathfrak{M} I_{CO}\right] \cdot \exp\frac{e u_{EB}}{kT}. \tag{17}$$

La tranzistorul *EFT* 121 s-a măsurat $\alpha^*_{Max} = 1{,}04$, ceea ce permite îndeplinirea condiției (16) pînă la curenți de ordinul sutelor de microamperi. Acest lucru este confirmat și de experiență : caracteristicile de intrare, trasate în plan logaritmic, au alură exponențială (fig. 10).

O verificare experimentală cantitativă a influenței rezistenței distribuite a bazei s-a făcut în felul următor : la caracteristicile din figura 9 s-a măsurat, în fiecare punct, curentul de colector. La o variație $\triangle i_B$ a curentului de bază și o variație $\triangle u_{EB}$ a tensiunii aplicată joncțiunii, corespunde o variație $\triangle u_E$ a tensiunii u_E, dată de relația

$$\Delta u_E = \Delta u_{EB} + r_{bb'} \Delta i_B. \tag{18}$$

Se consideră o variație de la punctul A la punctul B, la același curent de emitor. În acest caz,

$$\Delta u_E = 0, \tag{19}$$

conform relației (11), dacă se neglijează modificarea grosimii efective a bazei, și

$$\Delta i_B = \Delta i_C, \tag{20}$$

deci

$$r_{bb}' = -\frac{\Delta u_{EB}}{\Delta i_C} \tag{21}$$

Cunoscînd, din curbele experimentale valorile variațiilor Δu_{EB} și Δi_C, se poate determina rezistența bazei.

S-au considerat variații între curba de 5 V și curbele de $30 \div 50$ V, la diverși curenți, și s-au obținut valori ale rezistenței bazei cuprinse între 34,9 și 52,2 Ω, conform tabelului 1.

Tabelul 1

	i_E mA	0	0,01	0,02	0,04	0,06	0,08	0,10	0,12	0,14	0,50
$u_C = -5$ V	i_C mA		0,009	0,018	0,036	0,055	0,073	0,094	0,110	0,130	0,466
	u_{EB} mV		74,3	90,5	107,1	116,6	123,7	128,7	133,2	136,8	166
$u_C = -30$ V	i_C mA	0,310	0,317	0,325	0,340	0,367	0,383	0,393	0,417	0,430	0,790
	u_{EB} mV		63	79,5	96,1	105,6	112,2	117,7	122,2	126	149
	r_{bb}' Ω		*37,6*	*35,9*	*36,2*	*35,3*	*37,1*	*36,8*	*37,5*	*36*	*52,5*
$u_C = -35$ V	i_C mA	0,790	0,791	0,797	0,807	0,813	0,817	0,827	0,833	0,842	
	u_{EB} mV		47	63	80	89,1	96,7	101,7	105,7	110,5	
	r_{bb}' Ω		*34,9*	*35,3*	*35,1*	*35,3*	*36,3*	*36,8*	*38*	*35,9*	
$u_C = -40$ V	i_C mA	1,47	1,475	1,48	1,48	1,49	1,5	1,5	1,505	1,51	2
	u_{EB} mV		17,8	33	49,1	61,6	67,2	72,7	77,7	79,7	102,5
	r_{bb}' Ω		*39,2*	*39,3*	*40,1*	*38,3*	*39,6*	*39,8*	*40,1*	*41,5*	*41,3*
$u_C = -45$ V	i_C mA	2,36			2,36	2,36	2,38	2,39	2,4	2,91	2,78
	u_{EB} mV				1,1	10	17,2	22,7	28,2	32,8	60
	r_{bb}' Ω				*45,7*	*46,3*	*46,1*	*46,2*	*46*	*45,9*	*45,9*

Măsurînd rezistența bazei la înaltă frecvență (1 MHz) printr-o metodă de punte, s-a găsit $r_{bb'} = 40\,\Omega$ la $i_E = 1$ mA.

Fenomenul influenței curentului de emitor prin rezistența distribuită a bazei se resimte și în regim dinamic, prin modificarea parametrului h_{12} al tranzistorului global, disponibil între terminale. Se poate face un calcul al parametrului h_{12b} la multiplicări mari, cu neglijarea grosimii efective a bazei:

$$h_{12b} = \left.\frac{du_{EB}}{du_C}\right|_{i_E = \text{const}} = -\frac{r_{bb'}\, di_C}{du_C} =$$

$$= r_{bb'}\left[I_E \frac{d\,\alpha^*}{d|u_C|} + I_{CO}\frac{d\,\mathfrak{M}}{d|u_C|}\right] \tag{22}$$

În cazul unei multiplicări pure, $\mathfrak{M} = M$ și M este dat de relația (4). Se găsește

$$h_{12b} = r_{bb'}(\alpha I_E + I_{CO})\frac{dM}{du_C} = (M-1)\, r_{bb'}\frac{I_C}{U_C}. \tag{23}$$

3. Efectul cuplajului termic colector-emitor

Experimental, se constată că, la curenți mari, caracteristicile de intrare ale tranzistorului părăsesc alura exponențială, rezultînd în cele din urmă o întoarcere a lor (fig. 11, 12). Considerăm că depărtarea caracteristicilor de la alura exponențială, ducînd în final la întoarcerea lor, este o consecință a încălzirii tranzistorului.

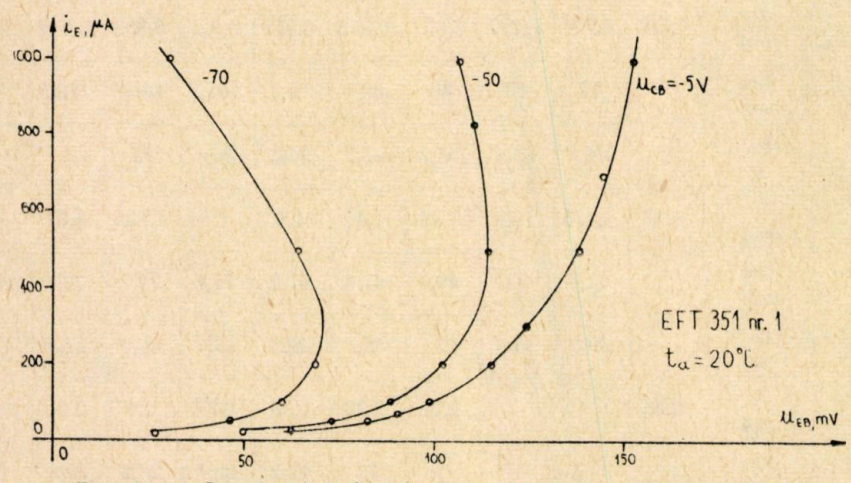


Fig. 11 — Caracteristici de intrare cu întoarcere, ridicate pentru un tranzistor *EFT* 351.

Este cunoscut [2] faptul că, atît în alimentare inversă, cît și în alimentare directă, caracteristicile unei diode semiconductoare se întorc, ca urmare a încălzirii joncțiunii datorită puterii disipate în ea.

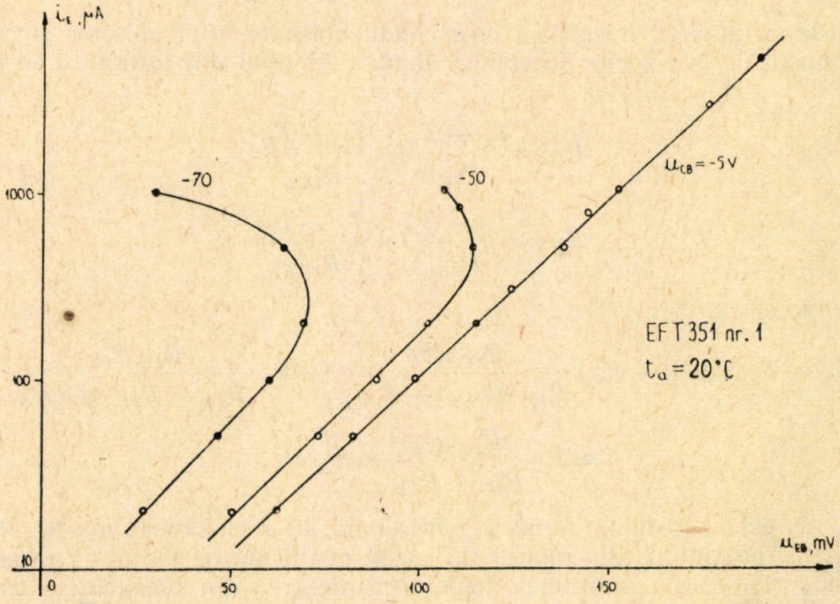


Fig. 12 — Caracteristicile de intrare ale tranzistorului *EFT* 351, afectate de multiplicare, trasate în scară logaritmică.

Intoarcerea termică a caracteristicilor de intrare la tranzistor are însă un caracter diferit față de situația de la dioda semiconductoare în alimentare directă, datorită faptului că joncțiunea emitorului nu se încălzește numai datorită puterii disipate în ea. În principal, încălzirea joncțiunii emitorului apare ca urmare a disipării puterii în joncțiunea colectorului, care transmite, prin conductibilitate, prin bază, putere spre emitor. Se

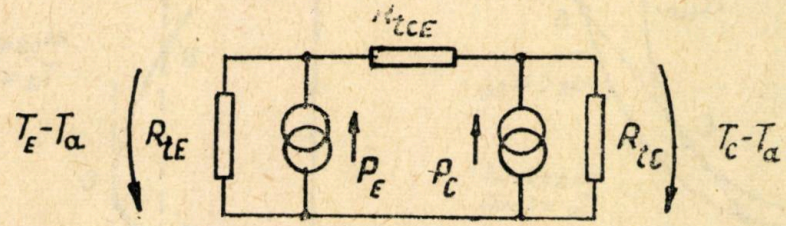


Fig. 13 — Model electric equivalent pentru circuitul termic al transistorului

poate spune că are loc, în afară de cuplajul electric colector-emitor, prin injecția de purtători, și un cuplaj termic de la colector la emitor.

Pentru aprecierea cuplajului termic al tranzistorului în regim staționar, se poate utiliza modelul electric din figura 13.

Deoarece puterea disipată pe colector este mult mai mare decît puterea disipată pe emitor,

$$P_C = -U_C I_C \gg P_E = U_E I_E, \tag{24}$$

se vede că puterea transmisă prin conductibilitate între colector și emitor are sensul de la colector la emitor. Pentru circuitul din figura 13 se poate scrie :

$$P_C = \frac{T_C - T_a}{R_{tC}} + \frac{T_C - T_E}{R_{tCE}}, \tag{25}$$

$$P_E = \frac{T_E - T_a}{R_{tE}} - \frac{T_C - T_E}{R_{tCE}}, \tag{26}$$

de unde se găsește

$$T_E - T_a = (P_C + P_E)\frac{R_{tC} R_{tE}}{R_{tE} + R_{tC} + R_{tCE}} + P_E \frac{R_{tC} R_{tE}}{R_{tE} + R_{tC} + R_{tCE}} \approx$$

$$\approx P_C \frac{R_{tC} R_{tE}}{R_{tC} + R_{tE}} = P_C R_t, \tag{27}$$

unde R_t este rezistența termică echivalentă cu rezistențele R_{tC} și R_{tE} în paralel. Aproximația din relația (27) este justificată de faptul că rezistența termică R_{tCE} este mult mai mică decît fiecare din rezistențele termice R_{tC}, R_{tE} [8].

Relația (27) pune în evidență influența puterii disipate pe colector asupra temperaturii emitorului. În literatură [8] [9], se consideră $T_C = T_E = T$, deci se presupune o rezistență termică nulă între colector și emitor. În aceste condiții, se poate arăta că apare întoarcerea caracteristicilor $i_E = f(u_{EB})$ ale tranzistorului.

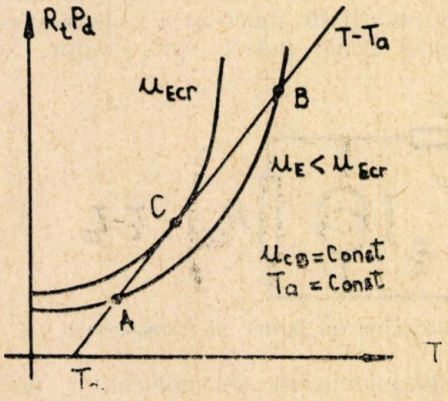


Fig. 14 — Diagramă pentru rezolvarea ecuației transcedente (28).

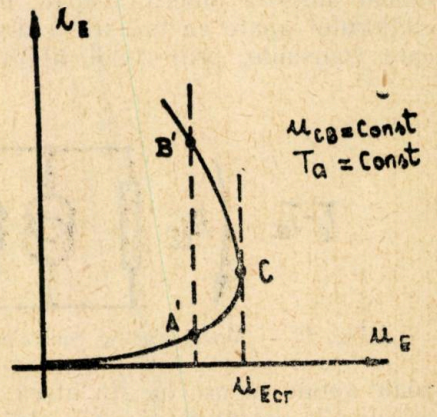


Fig. 15 — Caracteristică $i_E = f(u_E)$ cu întoarcere, dedusă cu ajutorul diagramei din fig. 14.

Ținînd seama de relațiile (2), (5) și (11), ecuația de echilibru termic (27) se scrie sub forma

$$T - T_a = M(U_C)\, U_C \left(C_1 + C_2 \exp \frac{eu_E}{kT}\right) \exp\left(-\frac{b}{T}\right) = f(T, U_C, u_E) \quad (28)$$

Reprezentînd grafic dependența de temperatură a funției f pentru $U_C = \text{constant}$, se obține o familie de curbe avînd pe u_E drept parametru. In aceste condiții, ecuația (28) prezintă două soluții la același u_E, corespunzătoare punctelor A și B din figura 14. La o anumită tensiune u_{Ecr}, aceste soluții devin confundate (punctul C, ceea ce, în planul $i_E = f[u_E, T(u_E)]$ se reflectă sub forma întoarcerii caracteristicilor la această tensiune (fig. 15).

Intoarcerea caracteristicilor poate apărea și la tensiuni de colector normale, însă la tensiuni de colector cu multiplicări mari, ea apare la curenți de emitor mult mai mici. Astfel, pentru tranzistorul *EFT* 351, la $U_C = -5$ V, nu s-a obținut întoarcerea caracteristicilor pînă la $i_E = 25$ mA. In schimb, la $U_C = -70$ V, caracteristicile s-au întors la un curent de aproximativ 250 μA.

Modificarea caracteristicilor de intrare sub influența cuplajului termic colector-emitor nu afectează comportarea dinamică a tranzistorului, la frecvențe normale de lucru (nu prea coborîte).

Catedra de tuburi electronice și tranzistori
Institutul politehnic București

BIBLIOGRAFIE

1. *Я. А. Федотов*: Основы физики полупроводниковых приборов, Москва, 1963.
2. *A. N. Matz:* Thermal Turnover in Germanium PN Junctions (Proc. IEE, 18, nr. 11, 1957, p. 555).
3. *S. L. Miller:* Avalanche Breakdown in Germanium (Physical Rewiev, 99, nr. 4, 1955, p. 1234).
4. *S. Cserveny, C. Bulucea:* Influența temperaturii asupra caracteristicilor statice ale dispozitivelor semiconductoare (Automatica și Electronica, nr. 1, 1964).
5. *D. R. Muss, R. F. Grene:* Reverse Breakdown in In-Ge Alloy Junctions (Jornal Of Applied Physics, 29, 1958, p. 1534).
6. *K. G. McKay, K. B. McAffel:* Electron Multiplication in Silicon and Germanium (Physical Rewiev, 91, nr. 5, 1953, p. 1079).
7. *K. G. McKay:* Avalanche Breakdown in Silicon (Physical Rewiev, 94, nr. 4, 1954, p. 877).
8. *V. Pauker:* Rezistența termică a tranzistorului EFT de joasă frecvență și de mică putere (Automatica și Electronica, nr. 4, 1963).
9. *Г. М. Авакьянц, А. Б. Павлинов, В. А. Сабликов, М. П. Синюков, А. В. Юровский:* Исследование некоторых тепловых эффектов в мощных германиевых транзисторах (Радиотехника и электоника, 8, 1962, p. 1421).
10. *R. Smith:* Voltage Breakdown of Transistors (Electronic Technology, nr. 10, 1061, p. 348).

SUMMARY OF THE REVIEWS IN 1964

SOCIAL SCIENCES

D. Rebuşapcă. On the Determination of Physical and Moral Wear of the Fixed Funds in Socialism (3. 1964)

S. Antonescu. Glimpses on of the Development of Rumania's Economy During the 1944—1964 Period (4. 1964)

D. Rebuşapcă, R. Soare, Gh. Maşală, Gh. Petcu, I. Hristache. Maschine Building Industry-the Creation of the Popular Democratie Regime of our Country. (4. 1964)

MATHEMATICS

D. Mangeron, L. E. Krivosein. Boundary Value, Problems Concerning a Class of Parabolic Partial Integro-differential Equations (1. 1964)

M. St. Botez. On a Generalization of Monge Draught (1. 1964)

D. Mangeron. Some Problems Related to Nonlinear Mechanics. (2. 1964)

I. M. Miu. On the Real Zeros of Functions. (2. 1964)

I. M. Miu. General Conclusions of the Mean Value Theorem. (3. 1964)

A. Tănăsescu. On a Bicentral Projection System with any Two Basic Plan. (3. 1964)

N. Mirescu. On First Species Displacements in the Epure with Null Fundamental Dihedral Angle. (3. 1964)

P. A. Muraviov. A Generalisation of the Laplace-Carson Transformation with Applications to the Solving of the Liniar Differential Equations with Variable Coefficients. (4. 1964)

M. St. Botez. On Axial Representation of the 4 Dimensional Space (4. 1964)

I. M. Miu. On Sturm's Theorem. (4. 1964)

M. Tirnoveanu. About a Total Semiconstructive System. (5. 1964)

I. M. Miu. On Some Theoremes Referring to Polynomial Zeros (6. 1964)

M. Tirnoveanu. About the Valence Modalities of a Logistic Unconstructive I Rate System. (6. 1964)

TECHNOLOGICAL CHEMISTRY

F. M. Albert, V. T. Mărculeţiu, V. Brăteanu, N. Căplescu, M. Stoia, M. Popescu-Văleanu. Requiring of Vanadium the Catalyst of the Contact Sulfuric Acid Industry. (1. 1964)

Gr. Teodorescu, A. Dinescu. Colorimetric Method for the Determination of Isonicotinic Acid Hydrazide. (1. 1964)

CHEMISTRY PHYSICS

I. Răducanu, T. Făşie. Contributions to the Corrosion Study of the Mining Equipment for Coal, Which Contain Sulphur. (1. 1964)

V. Părăuşanu. The Separation of Ions with near Physico-Chemical Properties Through Diffusion in Ion Exchangers. (3. 1964)

CHEMISTRY

G. Bejan, I. Niculescu, F. Popescu, A. M. Iancu. Rapid Methods of Analysis of Salts in Galvanising Baths. (3. 1964)

V. T. Mărculeţiu, I. Strugaru. Recovery of Bismuth from Indigenous Concentrates. (5. 1964)

D. Fărcaşiu. Choline, N-bis (β-chloroethyl) Carbamate, a Choline Derivative Related to Nitrogen Mustards. (5. 1964)

ELECTRICAL CHEMISTRY

I. Atanasiu, L. Blum Lazăr, M. Constantinescu. The Electrolytic Extraction of Iodine out of the Mineral and Deposit Waters. (2. 1964)

INORGANIC CHEMISTRY

Gh. Teodorescu, I. Niculescu, F. Popescu, A. M. Iancu. Rapid Analysis Methods of Gallium, Indium and Talium. (4. 1964)

PHYSICS

D. Anghelescu. Influence of Storage in Liquids of Nuclear Emulsion on α Tracks and Thoron Diffusion. (2. 1964)

G. Moisil. Protection with Sacrificial Anodes of Buried Structures (Theory practical formulas, tables.) (6. 1964)

MECHANICS

A. Stan. Some Useful Nomograms to Protect Machines Against Vibrations. (2. 1964)

M. Atanasiu. Some Topological Properties of the Systems of Bodies. (2. 1964)

N. I. Manolescu, P. Antonescu. Mechanisms for Marking Ellipses with Peripheral Constant. (3. 1964)

P. A. Lebedev, A. I. Efron. Plane Oscillations of a Connecting rod with Variable Cross-Saction and Curvilinear Symmetry Axis. (5. 1964)

D. Taşcă. Irrotational Axisymmetrical Flows Around Open Hulls Applied to Theoretical Studies of Turbo-machines. (5. 1964)

M. Atanasiu. Fundamental Problems of Mechanical Calculus of Systems in the Kinematic Displacement Field. (5. 1964)

STRENCHT OF MATERIALS

St. Bratu, N. Iliescu. The Study of the Unitary Stress in the Bar of Rectangular Section Subjected to Torsion by Analogy with the Electric Networks. (1. 1964)

I. Zamfirescu. On Some Aspects of the Tube Strength (3. 1964)

Al. Marinescu, C. Guţă. Forced Vibrations of the Rockets with Discontinuous Disturbing Charges. (3. 1964)

V. Drobotă. Lateral Buckling of Constinuous Pendulous Beams under Uniformly Distributed Loads. (6. 1964)

ELECTRIC POWERS

C. Penescu, S. Călin, I. Chenzbraun. Study on the Possibility of Utilizing the RD-11 Relay in the R.P.R. Electrical Networks. (1. 1964)

C. Wlezek. Influence of the Heat Consumption Structure upon the Heat Output for District Heating and upon the District Heating Coefficient. (4. 1964)

C. Wlezek. Special Method for Calculation of the Average Specific Power Output per Year of Backpressure Turbines used in District Heating. (5. 1964)

C. Dinculescu, G. Drăgan, I. Adămuț. The Co-ordination of the Insulation of High-Voltage Electro-Power Plants. (6. 1964)

VIBRATION THEORY

Gy. Ludvig. The Demonstration of the Technical, Oscillations Phenomena by Means of Analog Computers. (4. 1964)

ELECTRICITY

I. S. Gheorghiu. A unitary Theory of Electrical Machines. (1. 1964)

A. Timotin, A. Țugulea. On the Relativistic Interpretation of the Maxwell-Hertz Electrodynamics. (2. 1964)

C. Nemoianu, Al. Timotin. Skin Effect in Scheets of Different Conductivities and Permeabilities, Joined in Series. (3. 1964)

M. Preda, P. Cristea. The Calculus of Complex Networks Based on the Generalization of some Theorems, Belonging to the Electrical Network Theory for the Active Multi-pole Assembly. (4. 1964)

Gh. Mortopan. Analyser for the Research of Commutation Phenomena. (6. 1964)

THERMODYNAMICS

A. Selești eanu. Thermo-gazo-dynamic Cycles for Power Englines. (2. 1964)

M. Năstase. The Poliphase Aspect of the Delay Period at Self-ignation with Preference to Experiments Carried out on Engines Ignited by Compression with a Separate Turbulence Chamber. (2. 1964)

C. Guță. Experimental Investigation on the Plade System of the Axial Compressor Designed by Taking into Account the Losses of Energy. (2. 1964)

B. Grünwald. The Influence of the Burning Range of the Turbulent Flame upon the Cyclic Dispersion Phenomenin in the Spark Ignition Motor. (4. 1964)

L. Stoicescu, S. Petrescu. The First Principle of Thermodynamics for Technical Processes with Constant Finite Speed. (5. 1964)

C. Guță. Considerations on Determining the Speeds Field Entering the Mobile Blade System of the Axial Compressor. (5. 1964)

L. Stoicescu, S. Petrescu. Thermodynamic Stat Transformations Resulting with a Steady Finite Speed (6. 1964)

DETAILS OF MACHINES

Gh. Manea, M. R. Mustafa, D. Tudor. Gh. Vasilca. Aspects of the Behaviour of Polyamide as Bearing Materials. (1. 1964)

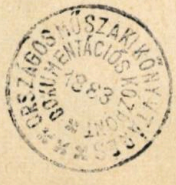
ELECTRONICS

R. Piringer. On the Potential Negative Feedback Applied to an Amplifierstage (1. 1964)

Ed. Nicolau. On Inhomogeneous Electromagnetic Waves. (4. 1964)

C. Bulucea, S. Cserveny, The Influence at the Collector Junction of the Multiplication of the Charge Carrier upon the Emiter Current, in the PNP Olloy Transistors. 6. 1964)

INTREPRINDEREA POLIGRAFICA „GRAFICA NOUA" II, BUCUREȘTI — c. 11849



INDICAȚII REDACȚIONALE

Manuscrisele vor fi prezentate în două exemplare, dactilografiate la două rînduri și colaționate de autor. Relațiile matematice și formulele se vor scrie cît mai clar, cu cerneală.

Desenele și graficele vor fi executate în tuș negru pe hîrtie de calc, numerotate și prezentate separat cu un borderou cuprinzînd nr. curent și legenda fiecărei figuri. Locul figurilor se va indica în text. Scrisul pe figuri va fi cel standardizat.

În continuarea textului, pentru fiecare exemplar se va da bibliografia de referință și, pe cîte o foaie separată de hîrtie, cîte un rezumat, în limbile : rusă, franceză, germană și engleză. La bibliografie se va indica în mod obligatoriu : numele și inițialele de prenume ale autorului, titlul și volumul lucrării, editura, locul și anul apariției, sau periodicul în care a apărut, volumul, anul, pagina inițială și finală a articolului.

Bibliografia se va întocmi în ordinea de citare în text și se va numerota curent. Referințele la bibliografie se vor face în text prin indicarea numărului de ordine al lucrării, încadrat în paranteze drepte, de exemplu [5].

Întreaga responsabilitate pentru exactitatea calculelor, datelor experiențelor și afirmațiilor științifice revine numai autorilor. Conducerea revistei își rezervă dreptul de a nu publica materialele necorespunzătoare.

40820

1965 ОКТ 6